ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 10 (449)

УДК 517.988

А.В. ЛАПИН, Е.Г. ШЕШУКОВ

ЗАДАЧА ФИЛЬТРАЦИИ ЧЕРЕЗ ПОРИСТУЮ ПРЕГРАДУ НА ПРОНИЦАЕМОМ ОСНОВАНИИ СО СЛОЕМ СОЛЕНОЙ ВОДЫ

Изучается стационарная задача фильтрации несжимаемой жидкости через плотину на проницаемом основании со слоем соленой воды с большей плотностью, чем фильтрующаяся. Жидкости не смешиваются. В этом случае область фильтрации имеет свободную границу, состоящую из двух частей: депрессионной поверхности, отделяющей насыщенную часть грунта от сухой, и поверхности раздела движущейся жидкости и покоящейся соленой воды.

Впервые вариационная формулировка и исследование простейшей задачи фильтрации жидкости через плотину даны в работе [1], где для этой цели введено преобразование искомой функции (преобразование Байокки). Позднее метод [1] был обобщен и применен к ряду других задач [2], [3], в которых, как правило, исходные геометрические параметры позволяли получить значение расхода фильтрующейся воды. Обзоры работ по решению задачи о плотине с использованием преобразования Байокки содержатся в [4]–[6].

Общая линейная стационарная задача фильтрации воды в плотине произвольной формы на непроницаемом основании была решена независимо в [7] и [8]. В этих работах предложена вариационная формулировка в терминах функции давления и характеристической функции искомой области фильтрации, доказаны теоремы существования обобщенных решений. Вопрос единственности решения изучен в [9]. Подробный анализ поведения свободной границы проведен в [10]. Основные результаты в этой области изложены в монографии [11].

В [12] результаты [7], [8] обобщены на случай одной задачи фильтрации жидкости через плотину со слабо проницаемым основанием. Наконец, в [13] исследована задача совместной фильтрации через плотину на непроницаемом основании двух несмешивающихся жидкостей.

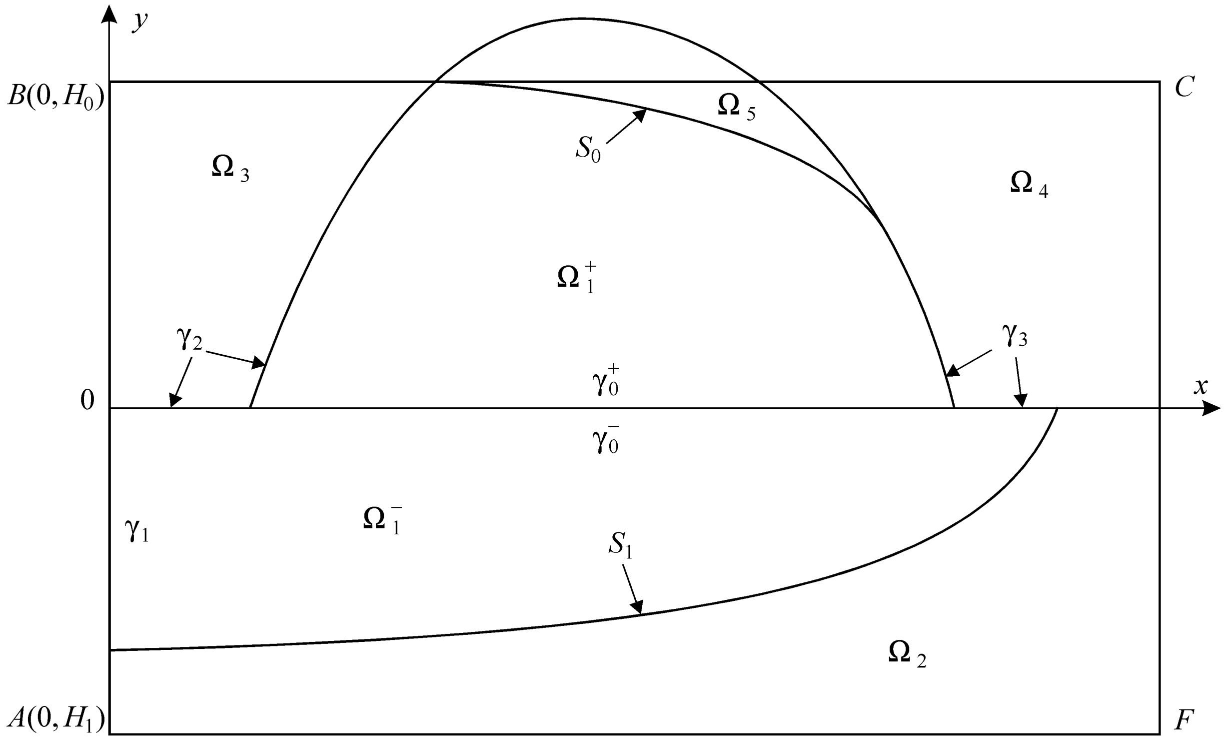
Первой работой, посвященной сеточному методу решения общей стационарной задачи фильтрации жидкости в плотине произвольной формы на непроницаемом основании, была работа [14]. В [15]–[17] были получены более общие результаты о сходимости сеточных схем и построены более эффективные итерационные методы их численной реализации.

В нашей работе рассматривается новая задача линейной стационарной фильтрации — фильтрация пресной воды через плотину и в обход плотины (в трехмерном случае) с учетом эффекта вытеснения соленой воды, заполняющей пористую среду. Эта задача формулируется в виде вариационного неравенства, частным случаем которого является неравенство, изученное в [7], [8]. Устанавливаются существование и единственность решения поставленной задачи. В этой части работы полученные результаты являются прямым обобщением известных результатов (см. [11]). Далее строится сеточная схема на основе применения квадратур к схеме метода конечных элементов. Доказывается ее разрешимость и сходимость приближенных решений к точному. Методы исследования отличаются от методов цитированных работ. Наконец, обосновывается сходимость различных итерационных алгоритмов, включая методы типа Гаусса–Зейделя и их блочные варианты. При исследовании сходимости итерационных процедур существенно используются и обобщаются результаты из [18].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальный исследований (грант 98-01-00200).

1. Исходная задача и ее вариационная формулировка

Пусть D — открытый параллелепипед в R^n, который включает в себя априори неизвестную область фильтрации $\Omega_1 = \mathrm{int}(\overline{\Omega_1^+ \cup \Omega_1^-})$, где $\Omega_1^+ = \{x \in \Omega_1 \mid x_n > 0\}$, $\Omega_1^- = \{x \in \Omega_1 \mid x_n < 0\}$ — непустые множества. Введем следующие обозначения для подобластей области D (см. рис. для двумерного случая):



Ω_2 — область, занятая покоящейся соленой водой плотности $\rho > 1$;
Ω_3 соответствует верхнему бьефу, плотность пресной воды считается равной 1;
Ω_4 соответствует нижнему бьефу, занятому атмосферным воздухом с давлением $p = 0$;
Ω_5 — сухая часть грунта с $p = 0$;
$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_5$;
Ω^+, Ω^- определены подобно Ω_1^+ и Ω_1^-.

Далее через $S_0 = \overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_5$ обозначим депрессионную поверхность, а через $S_1 = \overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2$ — границу раздела пресной и соленой вод; $H_0 = \sup\{x_n \mid x \in D\}$ — напор воды в верхнем бьефе, $H_1 = \inf\{x_n \mid x \in D\}$. Граница ∂D области D состоит из $\Gamma_2 = \overline{D} \cap \{x_n = H_0 \bigvee x_n = H_1\}$ и $\Gamma_1 = \partial D \setminus \Gamma_2$. В свою очередь, $\partial\Omega_1 = S_0 \cup S_1 \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, где $\gamma_1 = \Gamma_1 \cap \overline{\Omega}_1$, $\gamma_2 = \overline{\Omega}_3 \cap \overline{\Omega}_1$ и $\gamma_3 = \overline{\Omega}_4 \cap \overline{\Omega}_1$. Наконец, пусть $\gamma_0 = \Omega_1 \cap \{x_n = 0\}$ и под $u|_{\gamma_0^+}$ $(u|_{\gamma_0^-})$ понимается след кусочно-непрерывной функции u на γ_0 со стороны Ω_1^+ (Ω_1^-).

Считаем, что фильтрация следует закону Дарси

$$\mathbf{v} = -k\nabla(p + x_n) \tag{1}$$

с кусочно-постоянным коэффициентом фильтрации $k(x) = \{k_1 \text{ при } x_n > 0;\ k_2 \text{ при } x_n < 0\}$, $k_i > 0$. Тогда в точках $\Omega_1 \cup \partial\Omega_1$ выполняются следующие соотношения:

$$\begin{gathered}\operatorname{div}\mathbf{v} = 0,\ \ x \in \Omega_1^+ \cup \Omega_1^-;\ \ p|_{\gamma_0^+} = p|_{\gamma_0^-};\ \ \mathbf{vn}|_{\gamma_0^+} + \mathbf{vn}|_{\gamma_0^-} = 0;\ \ \mathbf{vn} = 0 \text{ на } \gamma_1;\\ p = H_0 - x_n \text{ на } \gamma_2;\ \ p = 0,\ \ \mathbf{vn} \geq 0 \text{ на } \gamma_3;\ \ p = p_d,\ \ \mathbf{vn} = 0 \text{ на } S_0 \cap S_1.\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $p_d = \{0 \text{ при } x_n \geq 0;\ -\rho x_n \text{ при } x_n < 0\}$ — заданная функция, соответствующая гидростатическому распределению давления в покоящейся соленой воде при $x_n < 0$ и атмосферному давлению при $x_n \geq 0$, $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к соответствующей подобласти Ω_1.

Лемма 1. *Пусть p — решение задачи* (1), (2) *и $z = p - p_d$, $g = \{k_1$ при $x_n > 0$; $k_2(1-\rho)$ при $x_n < 0\}$. Тогда $p > p_d$ в Ω_1, и справедливо неравенство*

$$\int_{\Omega_1} k\nabla z\nabla\eta\, d\Omega + \int_{\Omega_1} g\eta_{x_n} d\Omega \leq 0 \tag{3}$$

для любой гладкой функции η такой, что $\eta = 0$ на γ_2 и $\eta \geq 0$ на γ_3.

Доказательство. Введем функцию пьезометрического напора $\phi = p + x_n$. В силу (1), (2) она является решением задачи

$$\int_{\Omega_1} k\nabla\phi\nabla\eta\, dx = 0 \quad \forall\eta \in C^1(\overline{\Omega}_1) : \eta(x) = 0 \text{ для } x \in \gamma_2 \cup \gamma_3;$$
$$\phi(x) = H_0 \text{ при } x \in \gamma_2, \quad \phi(x) = x_n \geq 0 \text{ при } x \in \gamma_3.$$

Нетрудно видеть, что $\phi(x)$ неотрицательна для всех $x \in \Omega_1$, в частности, $p = \phi \geq 0$ на γ_0. Пользуясь теперь строгим принципом максимума [19] для функции $p - p_d$ в каждой из подобластей Ω_1^+ и Ω_1^-, получаем

$$p(x) > p_d(x) \quad \forall x \in \Omega_1^+ \cup \Omega_1^-.$$

Отсюда следует, что $\phi = p + x_n > 0$ в точках $\Omega_1^+ \cup \Omega_1^-$. Допустим, что $p = p_d$ в некоторой точке $x \in \gamma_0$. Тогда по лемме о нормальной производной [19] в этой точке имеем неравенства

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\gamma_0^+} < 0, \quad \left.\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\gamma_0^-} < 0,$$

что противоречит условию непрерывности нормальной составляющей вектора скорости $\mathbf{vn}$ при переходе через γ_0. Итак, $p(x) > p_d(x)$ $\forall x \in \Omega_1$.

Неравенство (3) легко доказать прямыми вычислениями. □

Исходя из неравенства (3), можно определить обобщенное решение задачи (1), (2). С этой целью введем следующие выпуклые замкнутые множества в пространстве $H^1(D)$:

$$K_0 = \{u \in H^1(D) \mid u \geq 0 \text{ в } D \setminus \overline{\Omega}_4;\ u = 0 \text{ в } \overline{\Omega}_4\};$$
$$K_1 = \{u \in H^1(D) \mid u = H_0 - x_n \text{ в } \overline{\Omega}_3;\ u = 0 \text{ на } \Gamma_2\}; \quad K = K_0 \cap K_1;$$
$$M = \{u \in H^1(D) \mid u \geq 0 \text{ в } \overline{\Omega}_4;\ u = 0 \text{ в } \Omega_3;\ u = 0 \text{ на } \Gamma_2\}.$$

Лемма 2. *Если решение z задачи*

$$\int_D (k\nabla z\nabla\eta + H(z)g\eta_{x_n})dx \leq 0 \qquad \forall\eta \in M, z \in K \tag{4}$$

достаточно гладкое и $\Omega_1^+ = \{x \in \Omega \mid z(x) > 0\} \cap \{x_n > 0\}$; $\Omega_1^- = \{x \in \Omega \mid z(x) > 0\} \cap \{x_n < 0\}$, то функция $p = z + p_d$ удовлетворяет соотношениям (1), (2).

Мы опускаем вполне традиционное доказательство этого утверждения.

При исследовании существования обобщенного решения еще ослабим формулировку (4) (ср. с [7], [8]). Будем искать пару $(z, \chi) \in K \times L_\infty$, удовлетворяющую соотношениям

$$\int_D (k\nabla z\nabla\eta + \chi g\eta_{x_n})dx \leq 0 \quad \forall\eta \in M, \qquad \chi(x) \in H(z(x)) \text{ почти всюду в } D, \tag{5}$$

где $H(t) = \{1$ при $t > 0$; $[0,1]$ при $t = 0$; 0 при $t < 0\}$ — максимально монотонный график функции Хевисайда.

Теорема 1. *Существует по крайней мере одно решение задачи* (5).

Доказательство является прямым обобщением соответствующего результата из ([11], гл. 5), где рассмотрен случай $g(x) = 1$.

2. Регулярность решения и свободной границы. Единственность решения

При исследовании гладкости решения z, свободной границы $S_0 \cup S_1$ и единственности z будем использовать результаты и методы работ ([9], [11], гл. 5). Отметим, что большинство результатов о регулярности в этих работах получено на основе локального анализа решений. Это позволяет применить их при изучении нашей задачи, "расщепляя" ее на задачи в подобластях Ω^+ и Ω^-. В связи со сказанным не будем приводить доказательств формулируемых утверждений, указывая лишь схему получения основных результатов о регулярности и единственности решения.

Лемма 3. *Пусть* (z, χ) *— решение задачи* (5). *Тогда справедливы следующие соотношения* (*понимаемые в смысле распределений*) :

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} z) + (\chi g)_{x_n} = 0 \text{ в } \Omega; \tag{6}$$

$$g\chi_{x_n} \geq 0 \text{ в } \Omega^+ \cup \Omega^-. \tag{7}$$

Из (6) и теории регулярности решений эллиптических уравнений следует, что $z \in W^1_{2,\mathrm{loc}}(\Omega^+ \cup \Omega^-)$ для $s \geq 1$. В силу (7) функция $\chi(x)$ монотонна по x_n в Ω^+ и Ω^-. Применяя эти результаты и строгий принцип максимума, устанавливаем, что область фильтрации Ω_1 может быть представлена в виде

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega \mid \psi(x') < x_n < \phi(x')\},$$

где $x' = (x_1, .., x_{n-1})$; $\phi(x') = \max\{0;\ \sup\{x_n \mid z(x) > 0\}\}$; $\psi(x') = \min\{0;\ \inf\{x_n \mid z(x) > 0\}\}$.

Теорема 2. *Если* $0 < \phi(x'_0) < H_0$, *то функция* $\phi(x')$ *непрерывна в некоторой окрестности* $|x' - x'_0| < \delta$ *точки* x'_0 *и* $\chi(x') = 0$ *при* $x_n > \phi(x')$, $|x' - x'_0| < \delta$.

Если $0 > \psi(x'_1) > H_1$, *то функция* $\psi(x')$ *непрерывна в некоторой окрестности* $|x' - x'_1| < \delta_1$ *точки* x'_1 *и* $\chi(x') = 0$ *при* $x_n < \psi(x')$, $|x' - x'_1| < \delta_1$.

Доказательство первого утверждения проводится аналогично ([11], гл. 5). При изучении непрерывности $\psi(x')$ в $\Omega^- = D^-$ задача в D^- с помощью преобразования координат $x_i = x_i(1 - \rho)$ сводится к задаче, подобной первой.

Следствием теоремы 2 является равенство $\chi(x) = I_{\{z>0\}}$ почти всюду в Ω, где $I_{\{z>0\}}$ — характеристическая функция области фильтрации Ω_1. Отсюда, в частности, вытекает, что решение задачи (5) совпадает с решением задачи (4).

Пусть z_1, z_2 — два решения задачи (4). Обозначим соответствующие им свободные границы через $S_0^i = \{x_n = \phi_i(x')\}$, $S_1^i = \{x_n = \psi_i(x')\}$, $i = 1, 2$. Положим $\Omega_1^i = \{x \in \Omega \mid z_i(x) > 0\}$, $z_0(x) = \min(z_1(x), z_2(x))$, $\phi_0(x') = \min(\phi_1(x'), \phi_2(x'))$, $\psi_0(x') = \max(\psi_1(x'), \psi_2(x'))$, $\Omega_1^0 = \Omega_1^1 \cap \Omega_1^2$. Используя свойство непрерывности функций $\phi_i(x')$, $\psi_i(x')$, устанавливаем следующий результат.

Лемма 4. *Справедливо равенство* $(i = 1, 2)$

$$\int_\Omega (k\nabla(z_i - z_0)\nabla\eta + g(H(z_i) - H(z_0))\eta_{x_n})dx = 0 \quad \forall \eta \in H^1(\Omega). \tag{8}$$

Решение z задачи (4) называется γ_2-связным, если связно множество $\{x \in \Omega \mid z(x) > 0\} \cup \gamma_2$.

Лемма 5. *Задача* (4) *имеет единственное* γ_2*-связное решение.*

При доказательстве используем равенство (8) и, действуя по аналогии с [11], доказываем вначале единственность сужения z на Ω^+. Далее преобразуем задачу в Ω^-, как в теореме 2, и используем те же приемы, что и для задачи в Ω^+, учитывая при этом установленную единственность $z(x', 0)$ на γ_0.

Лемма 6. *Пусть* z *— решение задачи* (4) *и* G *— связная компонента множества* Ω_1, *для которой* $\overline{G} \cap \gamma_2 = \emptyset$. *Тогда* $z = (c_1 - g/kx_n)^+$ *в* G *с постоянной* $c_1 = \sup\{x_n | x \in G\}$.

Таким образом, если допустить существование таких компонент, т. е. существование $c_1 \neq 0$, то $z(x) > 0$ в точках $x \in \partial G$ с $0 < x_n < c_1$. С другой стороны, в силу непрерывности $z(x)$ в $\Omega \ni G$, должно быть $z = 0$ на ∂G. Итак, любое решение z задачи (4) должно быть γ_2-связным. Отсюда и из леммы 6 вытекает

Теорема 3. *Задача* (4) *имеет единственное решение.*

3. Сеточная схема: существование решения и методы численной реализации

Разобьем $\overline{D}$ плоскостями, параллельными координатным, на совокупность τ_h параллелепипедов. Считаем, что плоскость $x_n = 0$ — одна из таких плоскостей, а индекс h соответствует максимальному из диаметров $\delta \in \tau_h$. Пусть Q_1 — пространство полиномов вида $\sum\limits_{\alpha_i=0}^{1} a_\alpha x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ и $V_h = \{u_h \in C(\overline{D}) \mid u_h \in Q_1$ на каждом $\delta \in \tau_h\}$. Будем обозначать через Ω_{3h} (Ω_{4h}) совокупность $\delta \in \tau_h$, входящих в Ω_3 (Ω_4). Определим далее следующие аппроксимации подмножеств K_0, K_1, M:

$$K_{0h} = \{u_h \in V_h \mid u_h(x) \geq 0 \text{ в } D \setminus \overline{\Omega}_{4h};\ \ u_h(x) = 0 \text{ в } \overline{\Omega}_{4h}\};$$
$$K_{1h} = \{u_h \in V_h \mid u_h(x) = H_0 - x_n \text{ в } \overline{\Omega}_{3h};\ \ u_h(x) = 0 \text{ на } \Gamma_2\};\quad K_h = K_{0h} \cap K_{1h},$$
$$M_h = \{u_h \in V_h \mid u_h(x) \geq 0 \text{ в } \overline{\Omega}_{4h};\ \ u_h(x) = 0 \text{ в } \overline{\Omega}_{3h} \cup \Gamma_2\}.$$

На каждом $\delta \in \tau_h$, $\overline{\delta} = \prod\limits_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$, зададим квадратуры. С этой целью множество вершин $\overline{\delta}$ разобьем на две группы: $\omega_+(\delta)$ — вершины в плоскости $x_n = b_n$ и $\omega_-(\delta)$ — вершины в плоскости $x_n = a_n$ и определим

$$S_\delta^+(v) = 2^{-(n-1)} \operatorname{mes}\delta \sum_{x \in \omega_+(\delta)} v(x);\quad S_\delta^-(v) = 2^{-(n-1)} \operatorname{mes}\delta \sum_{x \in \omega_-(\delta)} v(x);$$
$$S_\delta(v) = 2^{-1}(S_\delta^+(v) + S_\delta^-(v))$$

для любой $v \in C(\overline{\delta})$. Через S^+, S^- и S обозначим соответствующие составные квадратуры на всей области $\overline{D}$. Функцию $g(x)$ доопределим нулем при $x_n = 0$, кроме того, положим $k_0(x) = (\operatorname{mes}\delta)^{-1} \int\limits_\delta k(x)dx$. Решением сеточной схемы для задачи (5) назовем пару функций $(z_h, \chi_h) \in K_h \times V_h$ таких, что

$$S(k_0 \nabla z_h \nabla \eta_h) + S^+\left(g^+ \chi_h \frac{\partial \eta_h}{\partial x_n}\right) - S^-\left(g^- \chi_h \frac{\partial \eta_h}{\partial x_n}\right) \leq 0 \quad \forall \eta_h \in M_h,$$
$$\chi_h(x) \in H(z_h(x)) \quad \forall x \in \overline{D}, \tag{9}$$

где $g^+ = 0.5(|g| + g)$, $g^- = 0.5(|g| - g)$. В дальнейшем будем использовать также "поточечную" запись сеточной схемы (9). Для ее определения введем вначале сеточные множества

$$\overline{\omega} \text{ — множество вершин элементов } \delta \in \tau_h;$$
$$\partial\omega = \Gamma \cap \overline{\omega};\quad \partial_2\omega = \overline{\Gamma_2} \cap \overline{\omega};\quad \partial_1\omega = \partial\omega \setminus \partial_2\omega;$$
$$\partial_0\omega = \overline{\omega} \cap \{x_n = 0\};\quad \omega_0 = \overline{\omega} \setminus \partial_0\omega;\quad \omega_k = \overline{\Omega}_{kh} \cap \overline{\omega},\ \ k = 3, 4.$$

Для сеточной функции $v_h \in V_h$ обозначим через v вектор ее узловых параметров, т. е. вектор значений v_h в узлах $\overline{\omega}$. Будем писать $v \Leftrightarrow v_h$. Через K (K_0, K_1) обозначим выпуклое замкнутое множество векторов v таких, что $v \Leftrightarrow v_h$, $v_h \in K_h$ ($v_h \in K_{0h}$, $v_h \in K_{1h}$). Используем для векторов узловых параметров и их подмножеств те же обозначения, что и в пп. 1, 2 для функций непрерывного аргумента и их подмножеств в соболевских пространствах. Это не должно привести к недоразумению, поскольку в данном пункте речь идет лишь о конечномерных векторах и сеточных функциях.

Сеточная схема (9) эквивалентна следующей системе соотношений :

$$
\begin{gathered}
(Az + B\chi)_i = 0 \quad \forall i \in (\overline{\omega} \setminus \omega_4) \cup \partial\omega, \\
(Az + B\chi)_i \le 0 \quad \forall i \in \omega_4 \setminus \partial\omega; \quad z \in K; \chi_i \in H(z_i) \quad \forall i \in \omega_0,
\end{gathered} \tag{10}
$$

где A есть M-матрица, $B = (b_{ij})$; $b_{ii} > 0$ для $i \in \omega_0$; $b_{ii} = 0$ для $i \in \partial_0\omega$, $b_{ij} \le 0$ для $i \ne j$.

Введем множества $K_2 = \{v_i \le 0 \ \forall i \in \omega_4\}$ и $F = K_1 \cap K_2$. Пусть $C_1 = \partial I_F$ — субдифференциал индикаторной функции I_F множества F. Тогда C_1 — диагональный максимально монотонный оператор [17].

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$
Az + B\chi + C_1 z \ni 0; \quad \chi_i \in H(z_i) \quad \forall i \in \omega_0. \tag{11}
$$

Связь между задачами (10) и (11) устанавливает

Лемма 7. *Если (z, χ) — решение задачи (11), для которого $z \gg 0$ (т. е. $z_i \ge 0 \ \forall i$), то (z, χ) — решение задачи (10).*

Пусть $A = A_0 - A_1$, $B = B_0 - B_1$, где $A_i \gg 0$, $B_i \gg 0$ и A_0, B_0 — диагональные подматрицы матриц A, B. Из [18] следуют однозначная разрешимость уравнения

$$
A_0 z + B_0 H(z) + C_1 z \ni A_1 \widetilde{z} + B_1 \widetilde{\chi} \tag{12}
$$

для любых $\widetilde{z}$, $\widetilde{\chi}$ и неравенство

$$
z_1 - z_2 \ll A_0^{-1}[A_1(\widetilde{z}_1 - \widetilde{z}_2) + B_1(\widetilde{\chi}_1 - \widetilde{\chi}_2)]^+ \tag{13}
$$

для решений z_i уравнения (12) , соответствующих $(\widetilde{z}_i, \widetilde{\chi}_i)$.

По решению z уравнения (12) построим вектор $\chi = \chi(z)$, для которого

$$
\chi_i = \begin{cases} 1 & \text{при } i \in (\omega_3 \setminus \partial_2\omega) \cup \partial_0\omega; \\ \Pr_{[0,1]}[B_0^{-1}(A_1\widetilde{z} + B_1\widetilde{\chi} - A_0 z)]_i & \text{при остальных } i, \end{cases} \tag{14}
$$

где $\Pr_{[0,1]}x$ — проекция числа x на отрезок $[0, 1]$.

Определим оператор G, который ставит в соответствие паре векторов $(\widetilde{z}, \widetilde{\chi})$ пару (z, χ), где z — решение уравнения (12), а χ задано по формулам (14). Из (13), (14) следует

Лемма 8. *Оператор G непрерывный и монотонный, т. е.*

$$
(z_1, \chi_1) \ll (z_2, \chi_2) \Rightarrow G(z_1, \chi_1) \ll G(z_2, \chi_2).
$$

Кроме того, $G(0, 0) \gg 0$.

Лемма 9. *Пусть $\widetilde{\chi}_h^0 \equiv 1$, $\widetilde{z}_h^0 = \{\widetilde{H}_0 - x_n$ при $x_n \ge 0$, $\widetilde{H}_0 + (\rho - 1)x_n$ при $x_n < 0\}$ с $\widetilde{H}_0 \ge H_0$ таким, что $\widetilde{z}_h^0(x) \ge 0$. Тогда вектор $(\widetilde{z}^0, \widetilde{\chi}^0) \Leftrightarrow (\widetilde{z}_h^0, \widetilde{\chi}_h^0)$ удовлетворяет неравенству $G(\widetilde{z}^0, \widetilde{\chi}^0) \ll (\widetilde{z}^0, \widetilde{\chi}^0)$.*

Используя леммы 8, 9 и результат о существовании неподвижных точек у монотонного оператора из [21], получаем следующее утверждение.

Теорема 4. *Существует по крайней мере одна неподвижная точка оператора G на конусе неотрицательных векторов (z, χ). Эта точка является решением сеточной задачи (10). Итерации*

$$
(z^{k+1}, \chi^{k+1}) = G(z^k, \chi^k), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{15}
$$

сходятся к неподвижной точке G, если $(z^0, \chi^0) = (\widetilde{z}_0, \widetilde{\chi}_0)$ или $(z^0, \chi^0) = (\widetilde{z}^0, \widetilde{\chi}^0)$.

Используя определение оператора G, запишем итерационный процесс (15) в виде

$$A_0 z^{k+1} + B_0 H(z^{k+1}) + C_1 z^{k+1} \ni A_1 z^k + B_1 \chi^k, \quad \chi^{k+1} = \chi(z^{k+1}), \tag{16}$$

что соответствует методу Якоби для уравнения, содержащего максимально монотонный оператор. Следуя [18], можно доказать сходимость и других вариантов релаксационных методов. Именно, справедлива

Лемма 10. *Пусть* $A = A_0 - A_1$, *где* A_0 — M*-матрица и* $A_1 \gg 0$. *Тогда итерационный метод* (16) *сходится, начиная с* $(z^0, \chi^0) = (\tilde{z}_0, \tilde{\chi}^0)$ *или* $(z^0, \chi^0) = (\tilde{z}^0, \tilde{\chi}^0)$. *В частности, можно взять в качестве* A_0 *треугольную подматрицу* A (*метод Гаусса–Зейделя*) *или блочно-треугольную подматрицу* A (*блочный метод Гаусса–Зейделя*).

4. Сходимость сеточной схемы

Лемма 11. *Пусть* (z_h, χ_h) — *решение сеточной схемы* (9), *тогда*

$$\|z_h\|_1 \le c. \tag{17}$$

Через $\|\cdot\|_k$ здесь и далее обозначается норма пространства $H^k(D)$, а через c — постоянная, не зависящая от h.

Доказательство. Пусть $\theta(x) \in H^1(D) \cap C(\overline{D})$ такова, что $\theta = H_0 - x_n$ в Ω_3, $\theta = 0$ в $\Omega_4 \cup \Gamma_2$. Поскольку $\overline{\Omega_3} \cap \overline{\Omega_4} = \emptyset$, а граница области Ω_3 кусочно-гладкая, то такая функция существует. Пусть теперь θ_h — ее V_h-интерполянт. Тогда

$$\|\theta_h\|_1 \le c, \quad \|\theta\|_1 \le c. \tag{18}$$

По построению имеем $\Omega_{3h} \subset \Omega_3$ и $\Omega_{4h} \subset \Omega_4$, поэтому $\theta_h = H_0 - x_n$ в Ω_{3h}, $\theta_h = 0$ в Ω_{4h}. Отсюда, в частности, следует, что для $z_h \in K_h$ функция $\eta_h = z_h - \theta_h$ входит в M_h. Выбирая в (9) такую функцию η_h, получим

$$\begin{aligned} S(k_0|\nabla z_h|^2) \le S^{1/2}(k_0|\nabla z_h|^2) S^{1/2}(k_0|\nabla\theta_h|^2) + cS^+(|\partial(z_h - \theta_h)/\partial x_n|) + \\ + cS^-(|\partial(z_h - \theta_h)/\partial x_n|) \le S^{1/2}(k_0|\nabla z_h|^2) S^{1/2}(k_0|\nabla\theta_h|^2) + cS^{1/2}(|\nabla z_h|^2) + cS^{1/2}(|\nabla\theta_h|^2). \end{aligned} \tag{19}$$

При доказательстве (19) использованы положительность коэффициентов квадратур и неравенства типа $S^+(z_h) \le 2S(z_h)\ \forall z_h \ge 0$. Используя в очередной раз положительность коэффициентов квадратуры S и ее точность на полиномах $Q_1(\overline{\delta})$, приходим к неравенствам

$$S(k_0|\nabla z_h|^2) \ge c\int_D k_0|\nabla z_h|^2 dx \ge \alpha \int_D |\nabla z_h|^2 dx, \alpha > 0, \tag{20}$$

$$S(|\nabla z_h|^2) \le \beta \int_D |\nabla z_h|^2 dx \quad \forall z_h \in V_h. \tag{21}$$

В силу (20), (21), (18) из (19) следует оценка

$$\int_D |\nabla z_h|^2 dx \le c_1 \Big(\int_D |\nabla z_h|^2 dx \Big)^{1/2} + c_2$$

и тем самым $\|z_h\|_{1,2,D} \le c$. □

Из (17) и неравенств $0 \le \chi_h(x) \le 1, x \in D$, следует существование такой подпоследовательности $\{(z_{h_k}, \chi_{h_k})\} = \{(z_k, \chi_k)\}$, что

$$\begin{aligned} &z_k \longrightarrow z \ \text{ слабо в } W_2^1(D) \text{ и сильно в } L_2(D), \\ &\chi_k \longrightarrow \chi \ \ ^*\text{-слабо в } L_\infty(D) \text{ и сильно в } L_2(D). \end{aligned} \tag{22}$$

Лемма 12. *Если* (z, χ) — *предельные функции в* (22), *то* $z \in K$, $\chi(x) \in H(z(x))$ *при почти всех* $x \in D$.

Доказательство. Из условия $z_k(x) \geq 0$ в D и (22) легко следует, что $z(x) \geq 0$ в D. Далее, $\mathrm{mes}(\Omega_3 \setminus \Omega_{3h}) \longrightarrow 0$ при $h_k \longrightarrow 0$, поэтому

$$\int_{\Omega_3} |z - (H_0 - x_n)|dx = \int_{\Omega_3 \setminus \Omega_{3h_k}} |z - (H_0 - x_n)|dx + \int_{\Omega_{3h_k}} |z - z_k|dx \longrightarrow 0, \quad h_k \longrightarrow 0.$$

Отсюда следует, что $z = H_0 - x_n$ почти всюду в Ω_3. Аналогично устанавливается равенство $z = 0$ в Ω_4. Итак, $z \in K$.

Пусть теперь $\phi(u) = \int\limits_D u^+(x)dx$ — функционал на $L_2(D)$. Известно [20], что $\chi \in L_2(D)$ принадлежит $\partial\phi(u)$ тогда и только тогда, когда $\chi(x) \in \partial u^+(x) \equiv H(u(x))$ при почти всех $x \in D$. Поскольку $\chi_k(x) \in H(z_k(x))$ $\forall x \in D$, то $\chi_k \in \partial\phi(z_k)$. Из (22) и сильно-слабой замкнутости максимально монотонного оператора $\partial\phi : L_2(D) \longrightarrow L_2(D)$ ([20]) вытекает, что $\chi \in \partial\phi(u)$, т. е. $\chi(x) \in H(z(x))$ при почти всех $x \in D$. $\square$

Теорема 5. *Пусть* (z_h, χ_h) *— решение сеточной схемы* (19), (z, χ) *— единственное решение задачи* (14). *Тогда при* $h \to 0$ *имеем* $z_h \to z$ *слабо в* $H^1(D)$, $\chi_h \to \chi$ **-слабо в* $L_\infty(D)$.

Доказательство. В силу лемм 11, 12 остается установить, что пара (z, χ) из (22) удовлетворяет неравенству (5).

Для произвольного $\delta \in \tau_h$ и произвольной функции $v(x) \in C(\overline{\delta})$ обозначим через $\pi_i v(x)$ функцию, постоянную на $\overline{\delta}$ и равную $v(a_i)$, где a_i, $i = 1, \dots, 4$, — совокупность вершин δ. Положим далее

$$\pi v(x) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} \pi_i v(x); \quad \pi^+ v(x) = \frac{1}{4}\sum{}' \pi_i v(x),$$
$$\pi^- v(x) = \frac{1}{4}\sum{}'' \pi_i v(x); \quad x \in \delta,$$

где в $\sum{}'$ суммирование распространяется на вершины, принадлежащие верхней по x_n грани $\overline{\delta}$, в $\sum{}''$ — на вершины нижней по x_n грани $\overline{\delta}$. При таких обозначениях, как нетрудно видеть,

$$S(k_0 \nabla z_h \nabla v_h) = \int_D k_0 \pi(\nabla z_h)\pi(\nabla v_h)dx,$$
$$S^\pm\left(g^\pm \gamma_h \frac{\partial v_h}{\partial x_n}\right) = \int_D g^\pm \pi^\pm(\gamma_h)\pi^\pm\left(\frac{\partial v_h}{\partial x_n}\right)dx.$$

Для любой $\eta \in M$ построим такую последовательность $\eta_h \in M_h$, что

$$\|\eta_h - \eta\|_1 \longrightarrow 0; \quad \left\|\pi\left(\frac{\partial \eta_h}{\partial x_i} - \frac{\partial \eta}{\partial x_i}\right)\right\|_0 \longrightarrow 0, \quad i = 1, \dots, n;$$
$$\left\|\pi^\pm\left(\frac{\partial \eta_h}{\partial x_n} - \frac{\partial \eta}{\partial x_n}\right)\right\|_0 \longrightarrow 0$$

при $h \to 0$. Далее, из леммы 11 легко вывести ограниченность $\pi(\nabla z_h)$ в $(L_2(D))^2$. Таким образом, можно считать, что наряду с (22) справедливы предельные соотношения

$$\begin{aligned} &\pi(\nabla z_k) \longrightarrow \overline{q} \ \text{ слабо в } (H^1(D))^2; \\ &\pi^\pm(\chi_k) \longrightarrow \overline{l}^\pm \ \ ^*\text{-слабо в } L_\infty(D). \end{aligned} \tag{23}$$

Кроме того, $\|z_h - \pi z_h\|_0 \leq ch$, $\|z_h\|_1 \to 0$ при $h \to 0$, поэтому

$$\pi z_h \to z \text{ сильно в } L_2(D). \tag{24}$$

Докажем, что $\overline{q} = \nabla z$. С этой целью воспользуемся равенством

$$\int_D \pi\left(\frac{\partial z_k}{\partial x_i}\right)\phi\,dx = -\int_D \pi z_k \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx, \tag{25}$$

справедливым $\forall \phi \in C_0^\infty(D)$, $i = 1, \ldots, n$. Переходя в (25) к пределу при $h_k \to 0$ и пользуясь предельными соотношениями (23), (24), получим

$$\int_D q_i \phi\,dx = -\int_D z\frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx \quad \forall \phi \in C_0^\infty(D),$$

откуда $q_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$, $i = \overline{1,n}$. Итак, установлено, что $\pi(\nabla z_k) \to \nabla z$ слабо в $L_2(D)$ и $\pi z_k \to z$ сильно в $L_2(D)$. Используя эти предельные соотношения и равенства (22), из (9) при $h_k \to 0$ получим

$$\int_D k\nabla z \nabla \eta\,dx + \int_D gl\frac{\partial \eta}{\partial x_n} dx \le 0 \quad \forall \eta \in M,$$

где $l = \{l^+ \text{ в } D^+;\ l^- \text{ в } D^-\}$ удовлетворяет неравенствам $0 \le l(x) \le 1$ почти всюду в D. Кроме того, подобно доказательству леммы 12 из соотношений $\pi^+\chi_h(x) \in H(\pi^+ z_h(x))$, $\pi\chi_h(x) \in H(\pi z_h(x))$ легко вывести, что $l(x) \in H(z(x))$ для почти всех $x \in D$.

Итак, пара (z, l) является решением задачи (5). Но это решение единственно, причем из включения $l(x) \in H(z(x))$ следует, что $l(x) = I_{\{z>0\}}(x)$ почти всюду в Ω, где $I_{\{z>0\}}$ — характеристическая функция множества $\{x \in \Omega \mid z(x) > 0\}$. Отсюда следует, что предельная функция $\chi(x)$ из соотношений (22) почти всюду совпадает с $l(x)$, так что пара (z, χ) есть решение (5). В силу единственности (z, χ) и вся последовательность $\{(z_h, \chi_h)\}$ сходится к (z, χ). □

Литература

1. Baiocchi C. *Su un problema a frontiera libera conesso a questioni di idraulica* // Ann. mat. pura ed appl. – 1972. – V. 92. – P. 107–127.
2. Baiocchi C., Comincioli V., Magenes E., Pozzi G.A. *Free boundary problems in the theory of fluid flow through porous media: existence and uniqueness theorems* // Ann. mat. pura ed appl. – 1973. – V. 97. – № 4. – P. 1–82.
3. Baiocchi C., Comincioli V., Guerry L., Volpi G. *Free boundary problems in the theory of fluid flow through porous media: a numerical approach* // Calcolo. – 1973. – V.10. – № 1. – P. 1–86.
4. Bruch J.C. *A survey of free boundary value problems in the theory of fluid flow through porous media: variational inequality approach.* Part 1 // Adv. Water Resourc. – 1980. – V. 3. – P. 65-80.
5. Bruch J.C. *A survey of free boundary value problems in the theory of fluid flow through porous media: variational inequality approach.* Part 2 // Adv. Water Resourc. – 1980. – V. 3. – P. 115–124.
6. Bruch J.C. *Three-dimensional free and moving boundary seepage problems solved using an integral transformation in a fixed domain method* // Proc. of Conf. Solving Ground Water Problems with Models, Feb. 10–12, 1987, Denver, Colo. – V. 1. – P. 575–588.
7. Alt H.W. *Strömungen durch in homogene poröse Medien mit freiem Rand* // J. reine und angew. Math. – 1979. – Bd. 305. – S. 89–115.
8. Brezis H., Kinderlehrer D., Stampacchia G. *Sur une nouvelle formulation du problème de l'écoulement à traverse une digue* // Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, 1978. – V. 287. – P. 711–714.
9. Carillo-Menendes J., Chipot M. *Sur l'unicité de la solution du problème de l'écoulement à travers une digue* // Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, 1981. – V. 292. – P. 191–194.
10. Alt H.W., Gilardi G. *The behavior of the free boundary for the dam problem* // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. – 1981. – V. 9. – P. 571–626.
11. Фридман А. *Вариационные принципы и задачи со свободными границами.* – М.: Наука, 1990. – 536 с.
12. Friedman A., Huang Sh., Young J. *Bang-bang optimal control for the dam problem* // Appl. Math. Optim. – 1987. – V. 15. – № 1. – P. 65–85.

13. Alt H.W., Cafarelli L.A., Friedman A. *The dam problem with two fluids* // Commun. Pure Appl. Math. – 1984. – V. 37. – № 5. – P. 601–645.
14. Alt H.W. *Numerical solution of steady-state porous flow free boundary problems* // Numer. Math. – 1980. – V.36. – № 1. – P. 73–98.
15. Pietra P. *An up-wind finite element method for a filtration problem* // RAIRO, Anal. Numer. – 1982. – V. 16. – № 4. – P. 463–481.
16. Marini L.D., Pietra P. *Fixed-point algorithms for stationary flow in porous media* // Comput. Math. Appl. Mech. Engr. – 1986. – V. 56. – P. 17–45.
17. Bolrath C. *Two multi-level algorithms for the dam problem* // Preprint № 45. Math. Institut Ruhr. – Bochum, 1985.
18. Лапин А.В. *Методы релаксации для некоторых классов вариационных неравенств в* R^n // Числен. анализ и матем. моделирование. – М., 1989. – С. 127–143.
19. Ландис Е.М. *Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов.* – М.: Наука, 1971. – 287 с.
20. Barbu V. *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces* // Intern. Publ. – 1976.
21. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П. и др. *Приближенное решение операторных уравнений.* – М: Наука, 1969. – 455 с.

Казанский государственный университет

Поступила 23.10.1997