ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 12 (451)

УДК 519.63

И.В. КОННОВ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ D-ИНТЕРВАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ СМЕШАННЫХ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

1. Введение

Пусть U — непустое, замкнутое и выпуклое множество в n-мерном евклидовом пространстве R^n, $G : R^n \to R^n$ — непрерывно дифференцируемое отображение, $f : R^n \to R$ — выпуклая и непрерывная функция. Смешанное вариационное неравенство определяется как задача нахождения точки $u^* \in U$ такой, что

$$\langle G(u^*), u - u^* \rangle + f(u) - f(u^*) \geq 0 \quad \forall u \in U. \tag{1}$$

В общем виде задача (1) исследовалась в [1] и в дальнейшем изучалась многими авторами (напр., [2]). Она имеет большое число приложений в математической физике, а в случае $f \equiv 0$ сводится к обычному вариационному неравенству. Одним из наиболее распространенных подходов к решению вариационного неравенства является преобразование его к задаче оптимизации в отношении некоторой искусственной оценочной (или, иначе, интервальной) функции. Подобные оценочные функции были предложены в [3], [4]. Они позволяют преобразовать вариационное неравенство к задаче дифференцируемой оптимизации с ограничениями. Недавно в работе [5] была введена новая оценочная функция для обычного вариационного неравенства, которая позволяет свести его к задаче минимизации дифференцируемой функции без ограничений. В работе [6], где был предложен соответствующий алгоритм решения возникающей вспомогательной задачи, такие функции были названы D-интервальными (D-gap functions).

Для более общих смешанных вариационных неравенств различные варианты оценочных функций на основе функций из [3], [4] предлагались в работе [7], однако при этом исходная задача преобразуется к задаче оптимизации с ограничениями, причем с недифференцируемой, вообще говоря, целевой функцией. В данной работе вводится класс D-интервальных функций для смешанного вариационного неравенства (1), на основе которого задача (1) сводится к задаче минимизации оценочной функции без ограничений. Показывается, что эта функция будет дифференцируемой, что позволяет применять для решения быстро сходящиеся алгоритмы.

2. Интервальные функции

Вначале рассмотрим функцию

$$\varphi_\alpha(u) = \max_{v \in U} \Phi_\alpha(u, v), \tag{2}$$

где

$$\Phi_\alpha(u, v) = \langle G(u), u - v \rangle - 0.5\alpha \|u - v\|^2 + f(u) - f(v), \quad \alpha > 0. \tag{3}$$

Функция $\Phi_\alpha(u, \cdot)$ сильно вогнута, следовательно, существует единственное решение задачи (2), т. е. элемент $v_\alpha(u) \in U$ такой, что $\Phi_\alpha(u, v_\alpha(u)) = \varphi_\alpha(u)$. Заметим, что существуют и более общие

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 98-01-00200.

интервальные функции, например, в [7]. Для простоты ограничимся данной функцией $\varphi_\alpha(u)$, которую можно считать некоторым обобщением интервальной функции из [4] для смешанных вариационных неравенств.

Из определения функции φ_α следует, что

(i) $\varphi_\alpha(u) \geq 0 \ \forall u \in U$.

Далее, необходимое и достаточное условие оптимальности в задаче (2) может быть записано следующим образом. Если дана точка $z \in U$, то $z = v_\alpha(u)$ тогда и только тогда, когда

$$\exists g \in \partial f(z), \quad \langle G(u) + \alpha(z-u), v-z\rangle + \langle g, v-z\rangle \geq 0 \quad \forall v \in U, \tag{4}$$

где $\partial f(z)$ является субдифференциалом для функции f в точке z. В свою очередь, вариационное неравенство (4) эквивалентно

$$\langle G(u) + \alpha(z-u), v-z\rangle + f(v) - f(z) \geq 0 \quad \forall v \in U. \tag{5}$$

Действительно, задача (5) может рассматриваться как задача выпуклой оптимизации

$$\min_{v \in U} \langle G(u) + \alpha(z-u), v\rangle + f(v),$$

для которой вариационное неравенство (4) представляет условие оптимальности.

Этот результат позволяет получить ряд основных свойств функции φ_α.

(ii) *Пусть $u \in U$. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

a) $\varphi_\alpha(u) = 0$;
b) $u = v_\alpha(u)$;
c) *точка u является решением задачи* (1).

Действительно, используя соотношение (5) с $z = v_\alpha(u)$, $v = u$, имеем

$$\varphi_\alpha(u) = \Phi_\alpha(u, v_\alpha(u)) \geq 0.5\alpha\|u - v_\alpha(u)\|^2,$$

т. е. из $\varphi_\alpha(u) = 0$ следует $u = v_\alpha(u)$, следовательно, $a) \Longrightarrow b)$. Обратное соотношение $b) \Longrightarrow a)$ и соотношение $b) \Longrightarrow c)$, очевидно, справедливы. Пусть теперь точка u является решением задачи (1), но $u \neq v_\alpha(u)$. Тогда из (5) при $v = u$ имеем

$$\langle G(u), v_\alpha(u) - u\rangle + f(v_\alpha(u)) - f(u) \leq -\alpha\|v_\alpha(u) - u\|^2 < 0,$$

т. е. получили противоречие. Поэтому справедливо и соотношение $c) \Longrightarrow b)$, что и требовалось. Таким образом, функция φ_α является оценочной (или, иначе, интервальной) для задачи (1).Однако эта функция, вообще говоря, недифференцируема из-за недифференцируемости функции f. В то же время нетрудно показать, что

(iii) *отображение $u \mapsto v_\alpha(u)$ непрерывно.*

Для доказательства зафиксируем произвольно точки $u', u'' \in R^n$ и обозначим через L константу Липшица отображения G на произвольном выпуклом ограниченном множестве V, содержащем точки u' и u''. Складывая соотношение (5) при $u = u'$, $z = v_\alpha(u')$, $v = v_\alpha(u'')$ и соотношение (5) при $u = u''$, $z = v_\alpha(u'')$, $v = v_\alpha(u')$, имеем

$$\langle G(u') - G(u'') - \alpha(u' - u''), v_\alpha(u'') - v_\alpha(u')\rangle \geq \alpha\|v_\alpha(u'') - v_\alpha(u')\|^2.$$

Отсюда следует

$$\|v_\alpha(u'') - v_\alpha(u')\|^2 \leq (1 + L/\alpha)\|u'' - u'\| \, \|v_\alpha(u'') - v_\alpha(u')\|,$$

т. е. отображение v_α непрерывно, что и требовалось.

Теперь рассмотрим функцию

$$\psi_{\alpha\beta}(u) = \varphi_\alpha(u) - \varphi_\beta(u), \tag{6}$$

где $0 < \alpha < \beta$. В случае $f \equiv 0$ такая функция рассматривалась в [5], [6].

Для того чтобы получить основные свойства функции $\psi_{\alpha\beta}$, вначале установим вспомогательное

Предложение 1. *Для любого $u \in R^n$ выполняется*

$$\|u - v_\beta(u)\|^2 \le 2\psi_{\alpha\beta}(u)/(\beta - \alpha) \le \|u - v_\alpha(u)\|^2. \tag{7}$$

Доказательство. По определению

$$\psi_{\alpha\beta}(u) = \Phi_\alpha(u, v_\alpha(u)) - \Phi_\beta(u, v_\beta(u)) \ge \Phi_\alpha(u, v_\beta(u)) - \Phi_\beta(u, v_\beta(u)) = (\beta - \alpha)\|u - v_\beta(u)\|^2/2,$$

т. е. левое неравенство в (7) справедливо. Подобным образом показываем справедливость и правого неравенства в (7). □

Из предложения 1 следует, что функция $\psi_{\alpha\beta}$ имеет свойства, подобные (i) и (ii), но не на множестве U, а на всем пространстве R^n.

Предложение 2. *a) $\psi_{\alpha\beta}(u) \ge 0$ для всех $u \in R^n$;*
b) $\psi_{\alpha\beta}(u) = 0$ тогда и только тогда, когда точка u является решением задачи (1).

Теорема 1. *Функция $\psi_{\alpha\beta}$ дифференцируема, при этом*

$$\nabla\psi_{\alpha\beta}(u) = \nabla G(u)[v_\beta(u) - v_\alpha(u)] + \beta(u - v_\beta(u)) - \alpha(u - v_\alpha(u)). \tag{8}$$

Доказательство. Выберем произвольно вектор $d \in R^n$. Учитывая свойство (iii) и соотношения (2), (3), получаем, что в данных условиях можно применить теорему 3.4 из ([8], гл. I) о дифференцировании функции максимума, откуда с учетом предложения 3.1 и следствия 3.3 из ([8], гл. I) следует, что функция φ_α дифференцируема по направлениям в любой точке $u \in R^n$ и

$$\varphi'_\alpha(u, d) = \langle \nabla G(u)(u - v_\alpha(u)) - \alpha(u - v_\alpha(u)) + G(u), d\rangle + f'(u, d).$$

Теперь из соотношения (6) следует, что функция $\psi_{\alpha\beta}$ также дифференцируема по направлениям в любой точке $u \in R^n$, причем

$$\begin{aligned}\psi'_{\alpha\beta}(u, d) = \varphi'_\alpha(u, d) - \varphi'_\beta(u, d) = \langle \nabla G(u)(u - v_\alpha(u)) - \alpha(u - v_\alpha(u)), d\rangle + f'(u, d) -\\ - (\langle \nabla G(u)(u - v_\beta(u)) - \beta(u - v_\beta(u)), d\rangle + f'(u, d)) =\\ = \langle \nabla G(u)[v_\beta(u) - v_\alpha(u)] + \beta(u - v_\beta(u)) - \alpha(u - v_\alpha(u)), d\rangle = \langle \nabla\psi_{\alpha\beta}(u), d\rangle.\end{aligned}$$

Следовательно, функция $\psi_{\alpha\beta}$ дифференцируема по Гато в точке u. Но градиент $\nabla\psi_{\alpha\beta}(u)$ в (8) непрерывен вследствие свойства (iii), поэтому функция $\psi_{\alpha\beta}$ дифференцируема по Фреше также. □

Таким образом, задача (1) может быть сведена к задаче минимизации дифференцируемой функции $\psi_{\alpha\beta}$, т. е. она эквивалентна задаче дифференцируемой оптимизации без ограничений.

Следует заметить, что из теоремы 1 вытекает непрерывность градиента функции $\psi_{\alpha\beta}$. Отметим также, что все результаты данного раздела остаются справедливыми при замене пространства R^n на гильбертово пространство H.

3. Метод решения смешанного вариационного неравенства на основе D-интервальной функции

Благодаря полученным в предыдущем разделе результатам, можно построить метод минимизации функции $\psi_{\alpha\beta}$, который будет находить решение задачи (1).

В качестве примера построим подобный метод на основе метода из [6] решения обычного вариационного неравенства. А именно, обозначим

$$r(u) = v_\alpha(u) - v_\beta(u), \quad s(u) = \alpha(u - v_\alpha(u)) - \beta(u - v_\beta(u))$$

и построим последовательность $\{u^k\}$ по следующему алгоритму.

Шаг 0. Выберем точку $u^0 \in R^n$, числа $\mu > 0$, $\theta \in (0, 1)$, $\gamma > 0$. Положим $k = 0$.

Шаг 1. Если $\psi_{\alpha\beta}(u^k) = 0$, останов. Иначе определить $d^k = r(u^k) + \mu s(u^k)$.

Шаг 2. Определить m как наименьшее неотрицательное целое число такое, что

$$\psi_{\alpha\beta}(u^k + \theta^m d^k) \leq \psi_{\alpha\beta}(u^k) - \theta^m \gamma (\|r(u^k)\| + \mu \|s(u^k)\|)^2.$$

Шаг 3. Положить $\lambda_k = \theta^m$, $u^{k+1} = u^k + \lambda_k d^k$, $k = k+1$ и перейти к шагу 1.

Чтобы обосновать сходимость данного алгоритма, потребуется вначале установить несколько вспомогательных свойств.

Предложение 3. a) *$\langle r(u), s(u)\rangle \geq 0$ для всех $u \in R^n$.*

b) *Если $\nabla \psi_{\alpha\beta}(u) = 0$ и якобиан $\nabla G(u)$ положительно определен, то точка u является решением задачи* (1).

c) *Предположим, что отображение G сильно монотонно с константой κ и что G удовлетворяет условию Липшица либо множество U компактно. Тогда*

i) *существует такая константа $\widetilde{\gamma} > 0$, что*

$$\|u - u^*\| \leq \widetilde{\gamma} \|u - v_\beta(u)\| \quad \forall u \in R^n; \tag{9}$$

ii) *существует константа $\widetilde{\mu} > 0$ такая, что для любого $u \in \Psi(u^0) = \{v \in R^n \mid \psi_{\alpha\beta}(u) \leq \psi_{\alpha\beta}(u^0)\}$ и для любого $\mu \in (0, \widetilde{\mu})$ выполняется*

$$\langle \nabla \psi_{\alpha\beta}(u), r(u) + \mu s(u)\rangle \leq -(\kappa/2)(\|r(u)\| + \mu\|s(u)\|)^2. \tag{10}$$

Доказательство. Вначале отметим, что сложение соотношения (5) при $z = v_\alpha(u)$, $v = v_\beta(u)$ и соотношения (5) при $z = v_\beta(u)$, $v = v_\alpha(u)$ дает

$$0 \leq \langle \alpha(v_\alpha(u) - u) - \beta(v_\beta(u) - u), v_\beta(u) - v_\alpha(u)\rangle = \langle r(u), s(u)\rangle,$$

т. е. утверждение a) справедливо. Справедливость утверждения b) показывается аналогично обоснованию теоремы 3.3 из [6]. В случае c) пусть G удовлетворяет условию Липшица с константой L. Складывая соотношение (1) при $u = v_\beta(u)$ и соотношение (5) при $v = u^*$, $z = v_\beta(u)$, имеем

$$\langle G(u) - G(u^*) - \beta(v_\beta(u) - u), u^* - v_\beta(u)\rangle \geq 0.$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned}\kappa\|u - u^*\|^2 &\leq \langle G(u) - G(u^*), u - u^*\rangle \leq \\ &\leq \beta\langle v_\beta(u) - u, u^* - v_\beta(u)\rangle + \langle G(u) - G(u^*), u - v_\beta(u)\rangle \leq (\beta + L)\|u - u^*\|\,\|u - v_\beta(u)\|,\end{aligned}$$

т. е. соотношение (9) выполняется с $\widetilde{\gamma} = (\beta + L)/\kappa$. Оставшаяся часть доказательства проводится аналогично обоснованию лемм 4.1 и 5.1 в [6]. □

Заметим, что из соотношения (10) и теоремы 1 следует, что процедура линейного поиска на шаге 2 алгоритма всегда конечна, если $\gamma < \kappa/2$. Далее, объединяя (7) и (9), получаем оценку погрешности

$$\|u - u^*\| \leq \widetilde{\gamma}(2\psi_{\alpha\beta}(u)/(\beta - \alpha))^{1/2} \quad \forall u \in R^n,$$

следовательно, множество $\Psi(u^0)$ компактно.

Согласно полученным свойствам будет справедливым следующее утверждение, которое можно рассматривать как аналог теоремы 5.1 в [6].

Теорема 2. *Предположим, что отображение G сильно монотонно с константой κ, а также G удовлетворяет условию Липшица либо множество U компактно. Если $\gamma < \kappa/2$ и $0 < \mu < \widetilde{\mu}$, то последовательность $\{u^k\}$ сходится к единственному решению задачи* (1).

Отметим, что утверждение данной теоремы остается справедливым, если заменим слагаемое $0.5\alpha\|u - v\|^2$ в соотношении (3) на $\tau_\alpha(u - v)$, где $\tau_\alpha(0) = 0$, $\tau_\alpha : R^n \to R$ — неотрицательная непрерывно дифференцируемая и сильно выпуклая функция.

Литература

1. Browder F.E. *On the unification of the calculus of variations and the theory of monotone nonlinear operators in Banach spaces* // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1966. – V. 56. – № 2. – P. 419–425.
2. Байокки К., Капело А. *Вариационные и квазивариационные неравенства. Приложения к задачам со свободной границей.* – М.: Наука, 1988. – 448 с.
3. Auchmuty F.E. *Variational principles for variational inequalities* // Numer. Funct. Anal. and Optim. – 1989. – V. 10. – № 9–10. – P. 863–874.
4. Fukushima M. *Equivalent differentiable optimization problems and descent methods for asymmetric variational inequality problems* // Math. Programming. – 1992. – V. 53. – № 1. – P. 99–110.
5. Peng J.-M. *Equivalence of variational inequality problems to unconstrained minimization* // Math. Programming. – 1997. – V. 78. – № 3. – P. 347–355.
6. Yamashita N., Taji K., Fukushima M. *Unconstrained optimization formulations of variational inequality problems* // J. Optim. Theory and Appl. – 1997. – V. 92. – № 3. – P. 439–456.
7. Patriksson M. *Merit functions and descent algorithms for a class of variational inequality problems* // Optimization. – 1997. – V. 41. – № 1. – P. 37–55.
8. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. *Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление.* – М.: Наука, 1990. – 432 с.

Казанский государственный университет

Поступила 15.01.1999