ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 12 (451)

УДК 519.853

Я.И. ЗАБОТИН, И.Н. ДАНЬШИН

АЛГОРИТМЫ В МЕТОДЕ ЦЕНТРОВ С НЕПОЛНОЙ МИНИМИЗАЦИЕЙ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ МАКСИМУМА

Реализация классического метода центров [1], [2] предполагает использование двух бесконечных итерационных процессов, т.к. каждая точка x_k, $k = 1, 2, \dots$, основной итерационной последовательности отыскивается в результате бесконечного процесса безусловной минимизации некоторой вспомогательной функции максимума. Видимо, именно это обстоятельство сдерживает использование метода центров при решении задач математического программирования. При параметризации метода центров [3] было показано, что принципиально возможно указать такие значения управляющих параметров, при которых уже точка x_1 является приближенным с заданной точностью, а при определенных условиях и точным решением исходной задачи математического программирования. В методах с адаптацией параметра [4]–[6] это обстоятельство использовалось при построении реализуемых алгоритмов. Иной подход нахождения приближенного решения с заданной по функционалу точностью предложен в алгоритмах с двусторонним приближением [7]–[9].

В данной статье предлагаются общие подходы обеспечения сходимости метода центров и отыскания приближенного с заданной точностью решения при неполной минимизации вспомогательной функции максимума. Приводятся общие схемы и реализуемые алгоритмы нахождения решения с заданной точностью за конечное число шагов. Бесконечный процесс безусловной минимизации сохраняется лишь в качестве критерия достижения ε-решения. Отметим, что в [10] предлагается алгоритм с неполной минимизацией вспомогательной функции максимума, но только при использовании метода отыскания минимакса из [11].

Пусть всюду в дальнейшем функции $f(x)$, $f_i(x)$, $i \in H = \{1, 2, \dots, m\}$, определены и непрерывны в R_n, $D = \{x : x \in R_n,\ f_i(x) \le 0,\ i \in H\} = \{x : x \in R_n,\ g(x) \le 0\}$, где $g(x) = \max\{f_i(x),\ i \in H\}$, множество $D' = \{x : x \in R_n,\ g(x) < 0\}$ не пусто и его замыкание $\overline{D'}$ совпадает с D, $f^* = \inf\{f(x), x \in D\}$, через x^* обозначается какая-либо точка из $D^* = \{x : x \in D,\ f(x) = f^*\}$, $\varepsilon \ge 0$. Требуется найти

$$\inf\{f(x), x \in D\}. \tag{1}$$

При использовании символа inf считается, что точная нижняя грань функции на указанном множестве достигается.

I. В данном разделе полагается $F(x, y, \varepsilon) = \max\{f(x) - f(y) + \varepsilon, g(x)\}$, $D(y, \varepsilon) = \{x : x \in D,\ f(x) - f(y) + \varepsilon < 0\}$.

Определение 1. Точку $y \in D$ будем называть ε-решением задачи (1), если выполняется неравенство $f(y) \le f^* + \varepsilon$.

Лемма 1. *Пусть $y \in D$. Следующие предложения эквивалентны:*
1. *точка y является ε-решением задачи* (1);
2. $\inf\{F(x, y, \varepsilon),\ x \in R_n\} \ge 0$;
3. *множество* $D(y, \varepsilon) = \{\emptyset\}$.

Доказательство. Пусть справедливо первое предложение. Тогда $f(y) \le f^* + \varepsilon$, а т. к. $f(x) \ge f^*$ для всех $x \in D$, то $f(x) - f(y) + \varepsilon \ge 0$. Если же $x \notin D$, то $g(x) > 0$. Таким образом, $F(x, y, \varepsilon) \ge 0$ для всех $x \in R_n$, откуда и следует справедливость второго предложения.

Докажем импликацию $2 \to 3$. Так как $F(x, y, \varepsilon) \ge 0$ для всех $x \in R_n$, а $g(x) < 0$ для $x \in D'$, то $f(x) - f(y) + \varepsilon \ge 0$ для всех $x \in D'$. А так как $f(x)$ непрерывна и $\overline{D'} = D$, то $f(x) - f(y) + \varepsilon \ge 0$ для всех $x \in D$, и предложение 3 справедливо.

Наконец, если справедливо третье предложение, то для всех $x \in D$ выполняется $f(x) \ge f(y) - \varepsilon$. Тогда, в частности, $f^* \ge f(y) - \varepsilon$ и первое предложение имеет место. $\square$

Эта лемма путем минимизации функции $F(x, y, \varepsilon)$ дает возможность убедиться в том, что множество $D(y, \varepsilon)$ пусто и, следовательно, точка y будет ε-решением задачи (1), или же найти точку из $D(y, \varepsilon)$ в противном случае. Причем любая точка z будет принадлежать множеству $D(y, \varepsilon)$, если только $F(z, y, \varepsilon) < 0$.

Далее для минимизации функции $f(x)$ на множестве D предлагается и обосновывается общая схема построения алгоритмов, приводится один из реализуемых алгоритмов, построенный по такой схеме. На основе теоремы сходимости строится алгоритм нахождения решения задачи (1) с заданной точностью.

Схема 1. Выбирается точка $x_0 \in D$, задается точность вычислений $\varepsilon \ge 0$, числа $\varepsilon_0 > 0$ и $\alpha \in (0, 1)$.

Если уже найдены x_k, ε_k $(k \ge 0)$, то итерационная точка x_{k+1} выбирается следующим образом.

1. Строится функция $F(x, x_k, \varepsilon_k)$.
2. Если множество $D(x_k, \varepsilon_k)$ не пусто, то за x_{k+1} принимается любая точка из множества $D(x_k, \varepsilon_k)$, полагается $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k$ и осуществляется переход к п. 5.
3. Если $\varepsilon_k \le \varepsilon$, то вычисления останавливаются, точка x_k является ε_k-решением задачи (1).
4. Выбирается точка $x_{k+1} \in D$, для которой выполняется $f(x_{k+1}) \le f(x_k)$ (в частности, $x_{k+1} = x_k$), полагается $\varepsilon_{k+1} = \alpha \varepsilon_k$.
5. Осуществляется переход к п. 1 при k, замененном на $k + 1$.

Замечание 1. Если $\varepsilon = 0$, то процесс построения точек x_k бесконечен.

Замечание 2. Проверить, что множество $D(x_k, \varepsilon_k)$ пусто и точка x_k является ε_k-решением задачи (1), можно по п. 2 леммы 1, т. е. путем безусловной минимизации функции $F(x, x_k, \varepsilon_k)$. Для функции $F(x, x_k, \varepsilon_k)$ сходящимся методом безусловной минимизации строится последовательность $\{y_i\}$, $i = 0, 1, \ldots$ Если $\inf\{F(x, x_k, \varepsilon_k),\ x \in R_n\} < 0$, то для некоторого $i \ge 0$ будет выполнено неравенство $F(y_i, x_k, \varepsilon_k) < 0$. Тогда будут одновременно выполнены неравенства

$$g(y_i) < 0, \quad f(y_i) - f(x_k) + \varepsilon_k < 0. \tag{2}$$

Первое из неравенств (2) показывает, что $y_i \in D$, а учитывая второе из них, получим включение $y_i \in D(x_k, \varepsilon_k)$. Тогда согласно схеме 1 можно положить $x_{k+1} = y_i$. Если же $\inf\{F(x, x_k, \varepsilon_k), x \in R_n\} \ge 0$, то x_k является ε_k-решением задачи (1).

Сходимость алгоритмов, построенных по схеме 1, обосновывает

Теорема 1. *Для последовательности $\{x_k\}$, построенной по схеме 1 при $\varepsilon = 0$, выполняется предельное соотношение $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_k) = f^*$.*

Доказательство. Так как $f(x_k) \ge f(x_{k+1}) \ge f^*$ для всех $k \ge 0$, то последовательность $\{f(x_k)\}$ убывает и ограничена снизу числом f^*. Значит, последовательность $\{f(x_k)\}$ сходится.

Пусть L — последовательность натуральных чисел. Покажем, что существует такая подпоследовательность L_1 последовательности L, что $D(x_k, \varepsilon_k) = \{\emptyset\}$ для каждого $k \in L_1$. Если допустить, что это не так, то найдется такой номер $k_0 \geq 0$, что $D(x_k, \varepsilon_k) \neq \{\emptyset\}$ для всех $k \geq k_0$. Но тогда согласно п. 2 схемы 1

$$f(x_{k+1}) < f(x_k) - \varepsilon_k, \ \ \varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k \ \text{ для всех } \ k \geq k_0,$$

откуда следует

$$0 < \varepsilon_{k_0} = \varepsilon_k < f(x_k) - f(x_{k+1}) \ \text{ для всех } \ k \geq k_0.$$

Это противоречит сходимости последовательности $\{f(x_k)\}$. Следовательно, указанная подпоследовательность $L_1 \subset L$ существует. Тогда $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$, $k \in L_1$. Кроме того, согласно лемме 1 для $k \in L_1$ точки x_k являются ε_k-решениями задачи (1), т. е.

$$f^* \leq f(x_k) \leq f^* + \varepsilon_k \ \text{ для всех } \ k \in L_1.$$

Таким образом,

$$\lim_{k \to \infty, \ k \in L_1} f(x_k) = f^*,$$

но тогда и вся последовательность $\{f(x_k)\}$ сходится к f^*. $\square$

Ниже предлагаются два возможных алгоритма, построенных по схеме 1.

Алгоритм 1. Выбирается точка $x_0 \in D$, числа $\varepsilon_0 > 0$ и $\alpha \in (0, 1)$.
Если найдены x_k, ε_k $(k \geq 0)$, то переход к x_{k+1} осуществляется следующим образом.

1. Строится функция $F(x, x_k, \varepsilon_k)$.
2. Выбирается метод A_k безусловной минимизации, обеспечивающий нахождение точной нижней грани функции $F(x, x_k, \varepsilon_k)$.
3. По методу A_k последовательно строятся точки минимизирующей последовательности $\{y_i\}$, $i = 0, 1, \ldots$, для функции $F(x, x_k, \varepsilon_k)$.
4. Если для некоторого $i \geq 0$ выполняется неравенство $F(y_i, x_k, \varepsilon_k) < 0$, то полагается $x_{k+1} = y_i$, $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k$. Если $F(y_i, x_k, \varepsilon_k) \geq 0$ для всех $i \geq 0$, то полагается $x_{k+1} = x_k$, $\varepsilon_{k+1} = \alpha\varepsilon_k$.
5. Осуществляется переход к п. 1 при k, замененном на $k + 1$.

Замечание. Обсудим четвертый пункт алгоритма 1. По условиям алгоритма метод A_k позволяет найти $\inf\{F(x, x_k, \varepsilon_k), \ x \in R_n\}$. Если $F(y_i, x_k, \varepsilon_k) \geq 0$ для всех $i \geq 0$, то $\inf\{F(x, x_k, \varepsilon_k), \ x \in R_n\} \geq 0$ и согласно лемме 1 точка x_k является ε_k-решением задачи (1). Если вычислителя эта точность удовлетворяет, то процесс решения задачи (1) заканчивается. Если нет, то ε_k уменьшается, и в точке x_k снова проводится процесс минимизации. Если же, наконец, $\inf\{F(x, x_k, \varepsilon_k), \ x \in R_n\} < 0$, то отыскивается номер $i \geq 0$, для которого $F(y_i, x_k, \varepsilon_k) < 0$ и находится следующая итерационная точка $x_{k+1} = y_i$.

На основании теоремы 1 алгоритм 1 сходится. Тогда, учитывая замечание к алгоритму 1, можно построить алгоритм, позволяющий находить решение задачи (1) с наперед заданной точностью.

Алгоритм 2. Выбирается точка $x_0 \in D$, число $\varepsilon > 0$, с точностью до которого требуется найти приближенное решение задачи (1), и $\alpha \in (0, 1)$.
Если найдена x_k $(k \geq 0)$, то переход к x_{k+1} осуществляется следующим образом.

1. Строится функция $F(x, x_k, \varepsilon)$.
2. Выбирается метод A_k безусловной минимизации, обеспечивающий нахождение точной нижней грани функции $F(x, x_k, \varepsilon)$.
3. По методу A_k последовательно строятся точки минимизирующей последовательности $\{y_i\}$, $i = 0, 1, \ldots$, для функции $F(x, x_k, \varepsilon)$.
4. Если для некоторого $i \geq 0$ выполняется неравенство $F(y_i, x_k, \varepsilon) < 0$, то полагается $x_{k+1} = y_i$ и осуществляется переход к п. 1 при k, замененном на $k + 1$. Если $F(y_i, x_k, \varepsilon) \geq 0$ для всех $i \geq 0$, то процесс окончен и x_k является ε-решением задачи (1).

Замечание. В алгоритме 2 предполагается только один бесконечный процесс безусловной минимизации в п. 4 при обосновании достижения ε-решения.

Следующая схема построения алгоритмов отличается от предыдущей построением последовательности $\{\varepsilon_k\}$.

Схема 2. Выбирается точка $x_0 \in D$, задается точность вычислений $\varepsilon \geq 0$ и число $\alpha \in (0, 1)$, фиксируется убывающая числовая последовательность $\{\varepsilon_k\}$ такая, что

$$\varepsilon_k > 0 \ \ \forall k, \quad \lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0; \quad \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k = +\infty. \tag{3}$$

Если уже найдена x_k ($k \geq 0$), то итерационная точка x_{k+1} выбирается следующим образом.

1. Строится функция $F(x, x_k, \varepsilon_k)$.
2. Если множество $D(x_k, \varepsilon_k)$ не пусто, то за x_{k+1} принимается любая точка из множества $D(x_k, \varepsilon_k)$ и осуществляется переход к п. 5.
3. Если $\varepsilon_k \leq \varepsilon$, то вычисления останавливаются, точка x_k является ε_k-решением задачи (1).
4. Выбирается точка $x_{k+1} \in D$, для которой выполняется $f(x_{k+1}) \leq f(x_k)$ (в частности, $x_{k+1} = x_k$).
5. Осуществляется переход к п. 1 при k, замененном на $k + 1$.

Сходимость алгоритмов, построенных по схеме 2, обосновывает

Теорема 2. *Для последовательности $\{x_k\}$, построенной по схеме 2 при $\varepsilon = 0$, выполняется предельное соотношение $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f^*$.*

Доказательство. Если допустить, что найдется такой номер $k_0 \geq 0$, при котором $D(x_k, \varepsilon_k) \neq \{\emptyset\}$ для всех $k \geq k_0$, то согласно схеме 2

$$f(x_k) - f(x_{k+1}) > \varepsilon_k \ \text{ для всех } \ k \geq k_0. \tag{4}$$

Выберем p — любое целое положительное число и просуммируем неравенства (4) при $k = k_0, \ldots, k_0 + p$. Тогда с учетом выполнения неравенства $f(x_k) \geq f^*$ для всех $k \geq 0$ имеем

$$f(x_{k_0}) - f^* \geq f(x_{k_0}) - f(x_{k_0+p+1}) > \sum_{i=0}^{p} \varepsilon_{k_0+i}.$$

Это неравенство в силу последнего из условий (3) противоречиво для достаточно больших p. Противоречие доказывает, что существует такая подпоследовательность L_1 последовательности натуральных чисел, что $D(x_k, \varepsilon_k) = \{\emptyset\}$ для всех $k \in L_1$ и $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty, k \in L_1$. Кроме того, согласно лемме 1 для $k \in L_1$ точки x_k являются ε_k-решениями задачи (1), т. е. $f^* \leq f(x_k) \leq f^* + \varepsilon_k$ для всех $k \in L_1$. Тогда по тем же причинам, что и в теореме 1, последовательность $\{f(x_k)\}$ сходится к f^*. $\square$

Далее предлагается один из возможных алгоритмов, построенных по схеме 2.

Алгоритм 3. Выбирается точка $x_0 \in D$, число $\alpha \in (0, 1)$, фиксируется убывающая числовая последовательность $\{\varepsilon_k\}$, удовлетворяющая условию (3).

Если найдена x_k ($k \geq 0$), то переход к x_{k+1} осуществляется следующим образом.

1. Строится функция $F(x, x_k, \varepsilon_k)$.
2. Выбирается метод A_k безусловной минимизации, обеспечивающий нахождение точной нижней грани функции $F(x, x_k, \varepsilon_k)$.
3. По методу A_k последовательно строятся точки минимизирующей последовательности $\{y_i\}$, $i = 0, 1, \ldots$, для функции $F(x, x_k, \varepsilon_k)$.
4. Если для некоторого $i \geq 0$ выполняется неравенство $F(y_i, x_k, \varepsilon_k) < 0$, то полагается $x_{k+1} = y_i$. Если $F(y_i, x_k, \varepsilon_k) \geq 0$ для всех $i \geq 0$, то полагается $x_{k+1} = x_k$.

5. Осуществляется переход к п. 1 при k, замененном на $k+1$.

II. В данном разделе полагается $\overline{F}(x,y,\varepsilon) = \max\{f(x) - f(y) - \varepsilon,\ g(x)\}$, $\overline{D}(y,\varepsilon) = \{x : x \in R_n,\ f^* \geq f(x) > f(y) + \varepsilon\}$. Обозначим через M множество функций, определенных в R_n, для которых каждый локальный минимум, если он существует, является абсолютным.

Определение 2. Точку $y \notin D$ будем называть ε-псевдорешением задачи (1), если выполняется неравенство $|f(y) - f^*| \leq \varepsilon$.

Лемма 2. *Пусть точка $y \notin D$ такова, что $f^* \geq f(y)$. Тогда следующие предложения эквивалентны:*
1. *точка y является ε-псевдорешением задачи* (1);
2. $\inf\{\overline{F}(x,y,\varepsilon),\ x \in R_n\} \leq 0$;
3. *множество* $\overline{D}(y,\varepsilon) = \{\emptyset\}$.

Доказательство. Пусть справедливо первое предложение. Тогда $f^* - f(y) \leq \varepsilon$. А так как $g(x^*) \leq 0$ для любой точки $x^* \in D^*$, то $\overline{F}(x^*,y,\varepsilon) \leq 0$, откуда и следует справедливость второго предложения.

Если справедливо предложение 2, а inf по предположению всегда достигается, то существует такая точка $y' \in R_n$, для которой выполняется $\overline{F}(y',y,\varepsilon) \leq 0$. Тогда $g(y') \leq 0$, т. е. $y' \in D$, $f^* \leq f(y') \leq f(y) + \varepsilon$, и импликация $2 \to 3$ доказана.

Наконец, если справедливо предложение 3, то, предположив, что y не является ε-псевдорешением задачи (1), получим неравенство $f^* - f(y) > \varepsilon$. Тогда $f(x^*) > f(y) + \varepsilon$ и $x^* \in \overline{D}(y,\varepsilon)$, что противоречит предложению 3. Таким образом, первое утверждение имеет место. $\square$

Лемма 3. *Пусть $y \in R_n$, $y' = \arg\inf\{\overline{F}(x,y,\varepsilon),\ x \in R_n\}$ и $f(y') \neq f^*$, $g \in M$. Если $\overline{F}(y',y,\varepsilon) > 0$, то справедливы неравенства*

$$f^* > f(y') > f(y) + \varepsilon. \tag{5}$$

Доказательство. Докажем, что

$$f(y') - f(y) - \varepsilon \geq g(y'). \tag{6}$$

Если допустить обратное, то y' будет точкой локального ([7], лемма 2), а т. к. $g \in M$, то и абсолютного минимума функции $g(x)$. В то же время в силу предположения $g(y') = \overline{F}(y',y,\varepsilon) > 0$, тогда как $D \neq \{\emptyset\}$, т. е. существует такая точка x, что $g(x) \leq 0$. Значит, неравенство (6) справедливо, $f(y') - f(y) - \varepsilon = \overline{F}(y',y,\varepsilon) > 0$, и правое из неравенств (5) доказано.

Доказывая левое из неравенств (5), предположим противное. Так как по условию $f(y') \neq f^*$, то по предположению $f^* < f(y')$. Отсюда и в силу (6)

$$\overline{F}(y',y,\varepsilon) > f^* - f(y) - \varepsilon. \tag{7}$$

Так как $g(x^*) \leq 0$, а $\overline{F}(y',y,\varepsilon) > 0$, то из (7) следует

$$\overline{F}(y',y,\varepsilon) > \max\{f^* - f(y) - \varepsilon, g(x^*)\} = \overline{F}(x^*,y,\varepsilon).$$

Это противоречит условиям леммы. $\square$

Ниже предлагается схема построения алгоритмов, которая, в отличии от предыдущих, строит последовательность точек $\{x_k\} : x_k \notin D\ \forall k \geq 0$.

Схема 3. Выбирается точка $x_0 \notin D$, причем $f^* \geq f(x_0)$, задается точность вычислений $\varepsilon \geq 0$, числа $\varepsilon_0 > 0$ и $\alpha \in (0,1)$.

Если уже найдены x_k, ε_k $(k \geq 0)$, то итерационная точка x_{k+1} выбирается следующим образом.

1. Строится функция $\overline{F}(x,x_k,\varepsilon_k)$.

2. Если множество $\overline{D}(x_k, \varepsilon_k)$ не пусто, то за x_{k+1} принимается любая точка из множества $\overline{D}(x_k, \varepsilon_k)$, полагается $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k$ и осуществляется переход к п. 5.
3. Если $\varepsilon_k \leq \varepsilon$, то вычисления останавливаются, точка x_k является ε_k-псевдорешением задачи (1).
4. Выбирается точка $x_{k+1} \notin D$, для которой выполняется $f^* \geq f(x_{k+1}) \geq f(x_k)$ (в частности, $x_{k+1} = x_k$), полагается $\varepsilon_{k+1} = \alpha\varepsilon_k$.
5. Осуществляется переход к п. 1 при k, замененном на $k+1$.

Замечание 1. Проверить, что множество $\overline{D}(x_k, \varepsilon_k)$ пусто и точка x_k является ε_k-псевдорешением задачи (1), можно по п. 2 леммы 2, т. е. методом безусловной минимизации, обеспечивающим нахождение точной нижней грани функции $\overline{F}(x, x_k, \varepsilon_k)$. Этим методом строится последовательность $\{y_i\}$, $i = 0, 1, \ldots$ Если $g \in M$ и $\inf\{\overline{F}(x, x_k, \varepsilon_k),\ x \in R_n\} > 0$, то согласно лемме 3 найдется такой номер $i \geq 0$, что будут выполнены неравенства

$$f^* > f(y_i) > f(x_k) + \varepsilon.$$

Получили включение $y_i \in \overline{D}(x_k, \varepsilon_k)$. Тогда согласно схеме 3 можно положить $x_{k+1} = y_i$. Если для некоторого $i \geq 0$ будет выполнено неравенство $\overline{F}(y_i, x_k, \varepsilon_k) \leq 0$, то $\inf\{\overline{F}(x, y, \varepsilon),\ x \in R_n\} \leq 0$, и точка x_k является ε_k-псевдорешением задачи (1).

Замечание 2. Если $z = \arg\inf\{\max\{f(x), g(x)\},\ x \in R_n\}$ и $z \notin D$, то $f^* \geq f(z)$, ибо в противном случае $\max\{f(z), g(z)\} > \max\{f^*, g(x^*)\}$, что невозможно. Следовательно, в схеме 3 можно положить $x_0 = z$.

Сходимость алгоритмов, построенных по схеме 3, обосновывает

Теорема 3. *Для последовательности $\{x_k\}$, построенной по схеме 3 при $\varepsilon = 0$, выполняется предельное соотношение $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f^*$.*

Доказательство проводится по аналогиии с доказательством теоремы 1. Так как $f(x_k) \leq f(x_{k+1}) \leq f^*$ для всех $k \geq 0$, то последовательность $\{f(x_k)\}$ сходится. Покажем, что существует такая подпоследовательность L_1 последовательности L натуральных чисел, что $\overline{D}(x_k, \varepsilon_k) = \{\emptyset\}$ для каждого $k \in L_1$. Если допустить, что это не так, то найдется такой номер $k_0 \geq 0$, что $\overline{D}(x_k, \varepsilon_k) \neq \{\emptyset\}$ для всех $k \geq k_0$. Но тогда согласно п. 2 схемы 3 выполняются неравенства $0 < \varepsilon_{k_0} = \varepsilon_k < f(x_{k+1}) - f(x_k)$ для всех $k \geq k_0$, что противоречит сходимости последовательности $\{f(x_k)\}$. Следовательно, указанная подпоследовательность $L_1 \subset L$ существует. Тогда $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$, $k \in L_1$. Кроме того, согласно лемме 2 точки x_k для $k \in L_1$ являются ε_k-псевдорешениями задачи (1), т. е. $f^* \geq f(x_k) \geq f^* - \varepsilon_k$ для всех $k \in L_1$. Значит, подпоследовательность $\{f(x_k)\}$, $k \in L_1$, а следовательно, и вся последовательность $\{f(x_k)\}$ сходится к f^*. $\square$

Ниже рассматривается один из вариантов алгоритма, приведенного в [9], и доказывается его принадлежность схеме 3.

Алгоритм 4. Выбирается точка $x_0 \notin D$, причем $f^* \geq f(x_0)$, числа $\varepsilon_0 > 0$, $\alpha \in (0, 1)$. Если найдена x_k $(k \geq 0)$, то переход к x_{k+1} осуществляется следующим образом.

1. Строится функция $\overline{F}(x, x_k, \varepsilon_k)$.
2. Находится $z_{k+1} = \arg\inf\{\overline{F}(x, x_k, \varepsilon_k),\ x \in R_n\}$.
3. Если $z_{k+1} \notin D$, тогда $x_{k+1} = z_{k+1}$ и $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k$. Если $z_{k+1} \in D$, то полагается $x_{k+1} = x_k$ и $\varepsilon_{k+1} = \alpha\varepsilon_k$.
4. Осуществляется переход к п. 1 при k, замененном на $k+1$.

Замечание. Предположим $f(z_{k+1}) \neq f^*$ для всех $k \geq 0$ и $f, g \in M$. Покажем, что алгоритм 4 построен по схеме 3. Если в п. 3 алгоритма $z_{k+1} \notin D$, то $\overline{F}(z_{k+1}, x_k, \varepsilon_k) > 0$ и по лемме 3 выполняются неравенства $f^* > f(x_{k+1}) = f(z_{k+1}) > f(x_k) + \varepsilon_k$, т. е. множество $\overline{D}(x_k, \varepsilon_k)$ не пусто и $x_{k+1} \in \overline{D}(x_k, \varepsilon_k)$. Если же $z_{k+1} \in D$, то $\overline{F}(z_{k+1}, x_k, \varepsilon_k) \leq 0$, ибо в противном случае имеем $\overline{F}(z_{k+1}, x_k, \varepsilon_k) = f(z_{k+1}) - f(x_k) - \varepsilon_k > 0 \geq g(z_{k+1})$ и z_{k+1} являлась бы точкой локального, а т. к.

$f \in M$, то и абсолютного минимума функции $f(x)$, что противоречит условию $f(z_{k+1}) \neq f^*$ для всех $k \geq 0$. Следовательно, $\inf\{\overline{F}(x, x_k, \varepsilon_k),\ x \in R_n\} \leq 0$ и по лемме 2 множество $\overline{D}(x_k, \varepsilon_k)$ пусто. Таким образом, алгоритм 4 построен по схеме 3 при $\varepsilon = 0$.

На основании теоремы 3 алгоритм 4 сходится. Тогда, учитывая замечание к алгоритму 4, можно построить алгоритм, позволяющий находить псевдорешение задачи (1) с наперед заданной точностью.

Алгоритм 5. Выбирается точка $x_0 \notin D$, причем $f^* \geq f(x_0)$, число $\varepsilon > 0$, с точностью до которого требуется найти псевдорешение задачи (1), и $\alpha \in (0, 1)$.

Если найдена $x_k (k \geq 0)$, то переход к x_{k+1} осуществляется следующим образом.

1. Строится функция $\overline{F}(x, x_k, \varepsilon)$.
2. Находится $z_{k+1} = \arg\inf\{\overline{F}(x, x_k, \varepsilon),\ x \in R_n\}$.
3. Если $z_{k+1} \notin D$, тогда $x_{k+1} = z_{k+1}$. Если $z_{k+1} \in D$, то процесс окончен и x_k является ε-псевдорешением задачи (1).
4. Осуществляется переход к п. 1 при k, замененном на $k+1$.

Замечание. Если $z_{k+1} \in D$, то $z_k \notin D$ согласно алгоритму 5. Тогда в соответствии с замечанием к алгоритму 4 имеем $x_k \in \overline{D}(x_{k-1}, \varepsilon)$ и $\overline{F}(z_{k+1}, x_k, \varepsilon) \leq 0$. Следовательно, справедливо неравенство $f(z_{k+1}) - f^* - \varepsilon \leq f(z_{k+1}) - f(x_k) - \varepsilon \leq 0$, т. е. точка z_{k+1} является ε-решением задачи (1).

Литература

1. Bui Trong Lieu, Huard P. *La methode des centres dans un espace topologique* // Numer. Math. – 1966. – Bd. 8. – S. 56–67.
2. Huard P. *Resolution of mathematical programming with nonlinear constraints by the method of centres* // Non. progr. – 1967. – P. 207–219.
3. Заботин Я.И. *Минимаксный метод решения задачи математического программирования* // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 6. – С. 36–43.
4. Заботин Я.И., Князев Е.А. *Алгоритмы с адаптацией в параметризованном методе центров* // Исследов. по прикл. матем. – Казань, 1987. – № 14. – С. 9–15.
5. Заботин И.Я., Князев Е.А. *Вариант параметризованного метода центров* // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 12. – С. 26–32.
6. Князев Е.А. *Алгоритмы с адаптацией в методе центров*: Дис. ... канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1987. – 134 с.
7. Заботин Я.И., Даньшин И.Н. *Алгоритмы с комбинированием, параметризацией и двусторонним приближением в методе центров* // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 12. – С. 40–48.
8. Заботин Я.И., Даньшин И.Н. *Алгоритмы с двусторонним приближением в методе центров* // Тез. докл. XI Всероссийск. конф. "Математическое программирование и приложения", 22–26 февраля 1999 г. – Екатеринбург, 1999. – С. 111–112.
9. Даньшин И.Н. *Конечные алгоритмы в методе центров.* – Казанск. ун-т. – Казань, 1999. – 19 с. – Деп. в ВИНИТИ 22.07.99, № 2378-В99.
10. Крейнин М.И. *Релаксационные алгоритмы минимизации недифференцируемых функций* // Дис. ... канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1981. – 140 с.
11. Заботин Я.И., Крейнин М.И. *К сходимости методов отыскания минимакса* // Изв. вузов. Математика. – 1977. – № 10. – С. 56–64.

Казанский государственный университет

Поступила 22.09.1999