Известия вузов. Математика *http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/*
2017, № 10, с. 26–37 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

А.С. БАЛАНДИН, Т.Л. САБАТУЛИНА

РАЗРЕШИМОСТЬ АВТОНОМНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ НА ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ПОЛУОСИ

Аннотация. Рассматривается линейное автономное однородное функционально-дифференциальное уравнение на отрицательной полуоси. Доказано, что если решения принадлежат специальному пространству функций с интегральными ограничениями, то пространство решений конечномерно, а его базис образуют решения вида $(t^m \exp(pt))$, порожденные корнями характеристического уравнения. Это пространство отличается от ранее использовавшихся тем, что поточечная оценка на решение заменяется интегральной. Приведены примеры дифференциальных уравнений с последействием, для которых дано эффективное описание пространства решений.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение, последействие, разрешимость на оси, пространства функций с экспоненциальным весом.

УДК: 517.929

Введение

Задача о восстановлении процесса с последействием по его конечной картине естественным образом приводит к необходимости изучать дифференциальные уравнения с запаздыванием на отрицательной полуоси ([1], § 2.5; [2], [3]). К той же задаче соответствующей заменой независимой переменной приводят исследования дифференциальных уравнений с опережением на положительной полуоси ([4], § 6; [5], § 5.6) и краевых задач для сингулярных функционально-дифференциальных уравнений с коэффициентами, имеющими на конечном отрезке несуммируемые особенности [6].

Задача разрешимости дифференциального уравнения с последействием на отрицательной полуоси отличается от аналогичной задачи на положительной полуоси. Это видно уже на примере самого простого уравнения

$$\dot{x}(t) + ax(t-1) = 0. \tag{1}$$

Его однозначная разрешимость при $t \geqslant 0$ очевидна: достаточно задать на отрезке $[-1, 0]$ непрерывную начальную функцию, чтобы методом шагов ([7], гл. I, § 2) получить непрерывное решение на положительной полуоси. Однако аналогичное построение решения на отрицательной полуоси осуществимо далеко не всегда: выбрав в качестве “начальной” функции при $t \geqslant 0$ любой многочлен степени n, обнаружим, что решение уравнения (1) разрывно в точке $t = -n$. Условия на начальную функцию, обеспечивающие непрерывное продолжение на отрицательную полуось, формально известны ([5], с. 160) — это бесконечная дифференцируемость и счетный набор граничных условий (например, для уравнения (1) должно

Поступила 17.05.2016

Благодарности. Работа выполнена в рамках госзадания Министерства образования и науки Российской Федерации (задание № 2014/152, проект № 1890).

быть $x^{(n)}(0) = -ax^{(n-1)}(-1)$ при всех натуральных n). Но конструктивного описания класса функций, для которых эти условия выполнены, нет даже в случаях простейших уравнений.

Большинство авторов, занимавшихся проблемой разрешимости уравнений с последействием на отрицательной полуоси, искали решения в некотором заранее заданном пространстве. Плодотворной оказалась идея ограничить скорость роста решений при $t \to -\infty$ некоторой заданной функцией. В работах ([8], [9], с. 325) это был класс функций, растущих на бесконечности не быстрее степенной, в работах ([4], с. 56; [9], с. 325; [10]–[14]) решения имели подэкспоненциальный рост. При таких ограничениях множество решений функционально-дифференциальных уравнений допускало простое описание.

В данной работе также реализуется подход к исследованию уравнений с последействием на отрицательной полуоси, основанный на априорном выборе пространств решений, ограничивающих скорость их роста на отрицательной полуоси. Но, в отличие от перечисленных выше работ, поточечная экспоненциальная оценка решения заменяется интегральными ограничениями с экспоненциальным весом. В таких пространствах решений также удалось найти эффективные условия разрешимости.

1. Постановка задачи

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — множества натуральных, вещественных, комплексных чисел соответственно, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$. Через D_{loc} обозначим пространство абсолютно непрерывных функций на каждом конечном интервале из $\mathbb{R}_-$. Договоримся считать, что если в какой-либо сумме множество индексов суммирования пусто, то сумма равна нулю.

Рассмотрим линейное автономное однородное дифференциальное уравнение с ограниченным последействием

$$x^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^\omega x^{(j)}(t-s)\, dr_j(s) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_-, \tag{2}$$

где $\omega \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$, при всех $j = \overline{0, n-1}$ функции $r_j : [0, \omega] \to \mathbb{C}$ имеют ограниченную вариацию, $r_j(0) = 0$. Интегралы понимаются в смысле Римана–Стилтьеса ([15], с. 362). Обозначим $\rho = \sum\limits_{j=0}^{n-1} \int\limits_0^\omega |dr_j(s)|$.

Назовем решением уравнения (2) функцию, $(n-1)$-я производная которой принадлежит классу D_{loc}.

Наряду с (2) рассмотрим то же самое уравнение, но на положительной полуоси:

$$x^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^\omega x^{(j)}(t-s)\, dr_j(s) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{3}$$

Доопределим функцию x суммируемой на отрезке $[-\omega, 0]$ начальной функцией. Тогда в перечисленных выше предположениях относительно функций r_j решение уравнения (3) существует и единственно ([4], с. 19–23, теорема 1).

Хорошо известно ([4], с. 23–24; [5], с. 93; [16], с. 98), что все решения уравнения (3) при всех $t \in \mathbb{R}_+$ подчиняются оценке $|x(t)| \leqslant e^{\rho t}$, т. е. не могут расти быстрее экспоненты с заданным показателем ρ. При изучении уравнений вида (3) эта оценка оказывается очень полезной. Она обеспечивает ограниченность решения на любом конечном отрезке, дает оценку генерального показателя и позволяет применять преобразование Лапласа. Однако для решений уравнения (2) аналогичная оценка не выполняется, что показывает

Пример 1. Рассмотрим функцию $x(t) = \frac{1}{1-t^2} e^{\frac{t^2}{t^2-1}}$, $t \in [-1, 1]$. Легко видеть, что x бесконечно дифференцируема на отрезке $[-1, 1]$, причем $x^{(m)}(1-0) = x^{(m)}(-1+0) = 0$, $m \in \mathbb{N}_0$. Продолжим функцию x на всю отрицательную полуось по правилу: $x(t) = \frac{d}{dt} x(t+2)$. Согласно построению для функции x при $t \leqslant 1$ справедливо равенство $\dot{x}(t) = x(t-2)$.

С другой стороны, из ([17], с. 1051–1052) следует, что на том же отрезке $[-1, 1]$ функция x является суммой ряда

$$x(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{L}_m(1) t^{2m}, \tag{4}$$

где $\mathcal{L}_m(t) = \sum\limits_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k \frac{t^k}{k!}$ — многочлены Лагерра. Из представления (4) следует $x^{(2m+1)}(0) = 0$, $x^{(2m)}(0) = \mathcal{L}_m(1)(2m)!$. Пользуясь асимптотикой многочленов Лагерра ([17], с. 1053), получаем

$$\mathcal{L}_m(1) = \sqrt{e/\pi} m^{-1/4} \cos\big(2\sqrt{m} - \pi/4\big) + O\big(m^{-3/4}\big).$$

Заметим, что $x(-2m) = x^{(2m)}(0)$. Легко видеть, что при любом $\alpha \geqslant 0$ справедливо предельное соотношение $\varlimsup\limits_{t \to -\infty} x(t) e^{\alpha t} = +\infty$.

Таким образом, построен пример уравнения вида (2), имеющего решение, которое при $t \to -\infty$ растет быстрее любой экспоненты.

Еще более сильный пример приведен в работе [11], где показано, что решение уравнения (1) может возрастать при $t \to -\infty$ быстрее *любой наперед заданной функции*. К сожалению, пример из [11] не конструктивен: решение уравнения (1) задается в виде суммы ряда с неявно определяемыми коэффициентами. На основе этого ряда невозможно составить представление ни о виде решения, ни о его свойствах даже на конечном отрезке — в отличие от более наглядного примера 1.

Итак, если мы хотим рассматривать решения уравнения (2) с определенной скоростью роста на отрицательной полуоси, придется задавать ее выбором пространства решений. Основным пространством, в котором исследуется разрешимость уравнения (2), в этой работе будет пространство с интегральной оценкой решения на отрицательной полуоси.

Пусть α — вещественное число. Рассмотрим функциональное пространство

$$L^\alpha = \left\{ x : x^{(n-1)} \in D_{\mathrm{loc}},\ \int_{-\infty}^{0} \big| x^{(j)}(t) \big| e^{-\alpha t}\, dt < \infty,\quad j = \overline{0, n-1} \right\}.$$

Поставим задачу: *найти условия разрешимости и описать пространство решений уравнения* (2) *в пространствах* L^α.

Подчеркнем, что при определенных значениях α все пространства функций, используемые в ([4], с. 56; [8], [9], с. 325; [10]–[14]), входят в L^α как подмножества.

2. Характеристическая функция и ее свойства

При исследовании уравнения (3) и в особенности задач устойчивости важную роль играет функция комплексного переменного

$$g(p) = p^n + \sum_{j=0}^{n-1} p^j \int_0^\omega e^{-p\xi}\, dr_j(\xi), \quad p \in \mathbb{C}.$$

Функцию g называют *характеристической функцией* уравнения (3). Ниже будет показано, что при исследовании уравнения (2) эта функция играет не меньшую роль.

Отметим ряд свойств решения уравнения (3) и его характеристической функции, установленных в работах [5], [18].

Предложение 1. *Функция g является аналитической во всей комплексной плоскости, имеет счетное множество нулей, причем в любой полуплоскости $\operatorname{Re} p \geqslant \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, количество нулей функции g конечно.*

Пусть $\{p_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ — множество всех нулей функции g, занумерованных так, чтобы $\operatorname{Re} p_1 \geqslant \operatorname{Re} p_2 \geqslant \cdots \geqslant \operatorname{Re} p_m \geqslant \cdots$. Порядок нумерации корней с одинаковой вещественной частью произвольный. Через ν_m обозначим кратность корня p_m.

Стандартной заменой переменных уравнение (3) можно записать в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка. Используя результаты работ [5], [18], в которых было найдено представление решения такой системы уравнений, получаем

Предложение 2. *Пусть x — решение уравнения (3). Тогда все функции $x^{(j)}$, $j = \overline{0, n-1}$, при любом $\lambda \in \mathbb{R}$ представимы в виде*

$$x^{(j)}(t) = \sum_{\operatorname{Re} p_m \geqslant \lambda} \frac{d^j}{dt^j}\left(b_m(t)e^{p_m t}\right) + z_j(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{5}$$

где сумма берется по всем нулям p_m функции g, для которых $\operatorname{Re} p_m \geqslant \lambda$, b_m — полином степени $\nu_m - 1$ с произвольными комплексными коэффициентами, причем

$$\lim_{t\to+\infty} |z_j(t)|e^{-\lambda t} = 0.$$

3. Вспомогательные утверждения

Если известно решение уравнения (2), то, рассматривая его на множестве $[-\omega, 0]$ как начальную функцию для уравнения (3), можно достроить его решение на $\mathbb{R}_+$, т. е. найти решение уравнения

$$x^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^\omega x^{(j)}(t-s)\, dr_j(s) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

С другой стороны, если известно решение уравнения (6), то известно решение уравнения (2). Таким образом, задачи построения решения на $\mathbb{R}_-$ и на $\mathbb{R}$ эквивалентны. В этом разделе нам удобнее работать с уравнением (6), поэтому все результаты будем формулировать и доказывать для него.

Лемма 1. *Если p_0 — корень функции g кратности ν_0, то уравнение (6) имеет ν_0 линейно независимых решений вида $e^{p_0 t}, te^{p_0 t}, \ldots, t^{\nu_0 - 1}e^{p_0 t}$.*

Доказательство. Линейная независимость указанных функций очевидна. Чтобы убедиться в справедливости леммы, достаточно подставить эти функции в уравнение (6). □

Таким образом, если многочлен q_m имеет вид

$$q_m(t) = C_0^{(m)} + C_1^{(m)} t + \cdots + C_{\nu_m - 1}^{(m)} t^{\nu_m - 1}, \tag{7}$$

где $C_j^{(m)} \in \mathbb{C}$, $j = \overline{0, \nu_m - 1}$, ν_m — кратность корня p_m, то любая функция вида $x(t) = \sum\limits_m q_m(t)e^{p_m t}$ является решением уравнения (6).

Доказательству основной теоремы о представлении решения уравнения (6) в L^α предпошлем несколько лемм.

Вначале рассмотрим случай, когда решение уравнения (6) и его производные суммируемы на $\mathbb{R}$, а характеристическая функция не имеет нулей на мнимой оси.

Лемма 2. *Пусть $g(i\varphi) \neq 0$ при всех $\varphi \in \mathbb{R}$. Если решение уравнения* (6) *обладает свойством $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|x^{(j)}(t)\right| dt < \infty$, $j = \overline{0, n-1}$, то $x(t) \equiv 0$.*

Доказательство. Так как при любом $j = \overline{0, n-1}$ справедливо $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|x^{(j)}(t)\right| dt < \infty$, а функции r_j имеют ограниченную вариацию, то с учетом теоремы Фубини ([15], с. 317) получаем, что функция $\int\limits_{0}^{\omega} x^{(j)}(t-s)\, dr_j(s)$ также является суммируемой на $\mathbb{R}$. В силу уравнения (6) отсюда следует, что функция $x^{(n)}$ также суммируема на $\mathbb{R}$. Заметим, что из суммируемости $x^{(j+1)}$ и $x^{(j)}$ вытекает $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \left|x^{(j)}(t)\right| = 0$. Если $F(\varphi)$ — Фурье-образ функции x, то Фурье-образы $x^{(j)}$ равны $(-i\varphi)^j F(\varphi)$. Тогда, применяя преобразование Фурье к левой части уравнения (6), имеем

$$(-i\varphi)^n F(\varphi) + \sum_{j=0}^{n-1} \left((-i\varphi)^j \int_0^\omega e^{i\varphi s}\, dr_j(s) \right) F(\varphi) = g(-i\varphi) F(\varphi).$$

Так как $g(-i\varphi) \neq 0$, то уравнение $g(-i\varphi)F(\varphi) = 0$ имеет только тривиальное решение $F(\varphi) = 0$. Используя формулу обратного преобразования Фурье ([15], с. 424), получаем единственное решение уравнения (6) $x(t) \equiv 0$. □

Пусть теперь решение уравнения (6) и его производные суммируемы на $\mathbb{R}_-$.

Лемма 3. *Пусть $g(i\varphi) \neq 0$ при всех $\varphi \in \mathbb{R}$. Если решение уравнения* (6) *обладает свойством $\int\limits_{-\infty}^{0} \left|x^{(j)}(t)\right| dt < \infty$, $j = \overline{0, n-1}$, то решение можно представить в виде*

$$x(t) = \sum_{\operatorname{Re} p_m > 0} q_m(t) e^{p_m t}, \tag{8}$$

где многочлены q_m заданы формулой (7).

Доказательство. Возьмем функцию x при $t \in [-\omega, 0]$ в качестве начальной функции и построим решение уравнения на $\mathbb{R}_+$ (оно определится однозначно). В силу предложения 2 имеем при $t \in \mathbb{R}_+$

$$x^{(j)}(t) = \frac{d^j}{dt^j} \left(\sum_{\operatorname{Re} p_m > 0} \widetilde{q}_m(t) e^{p_m t} \right) + z_j(t), \quad j = \overline{0, n-1},$$

где $\widetilde{q}_m(t) = A_0^{(m)} + A_1^{(m)} t + \dots + A_{\nu_m - 1}^{(m)} t^{\nu_m - 1}$, числа $A_i^{(m)} \in \mathbb{C}$, $i = \overline{0, \nu_m - 1}$, однозначно определяются по начальной функции, а $\lim\limits_{t\to+\infty} |z_j(t)| e^{\varepsilon t} = 0$ при некотором $\varepsilon > 0$.

Положим $u(t) = x(t) - \sum\limits_{\operatorname{Re} p_m > 0} \widetilde{q}_m(t) e^{p_m t}$. Очевидно, что u — решение уравнения (6), причем $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|u^{(j)}(t)\right| dt < \infty$, $j = \overline{0, n-1}$. В силу леммы 2 $u(t) \equiv 0$. Следовательно, справедливо представление (8). □

Наконец, рассмотрим общую ситуацию: α — произвольное вещественное число, а нули характеристической функции произвольно расположены на комплексной плоскости.

Лемма 4. *Любое решение x уравнения* (6)*, принадлежащее пространству L^α, можно представить в виде*

$$x(t) = \sum_{\operatorname{Re} p_m > \alpha} q_m(t) e^{p_m t}, \tag{9}$$

где многочлены q_m определены равенством (7)*.*

Доказательство проведем в два этапа.

1. Пусть $g(\alpha + i\varphi) \neq 0$ при всех $\varphi \in \mathbb{R}$. Если x — решение уравнения (6), то функция $u(t) = e^{-\alpha t} x(t)$ суммируема на $\mathbb{R}_-$ и является решением уравнения

$$u^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \alpha^{n-k} u^{(k)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^\omega e^{-\alpha s} \sum_{k=0}^{j} C_j^k \alpha^{j-k} u^{(k)}(t-s)\, dr_j(s) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Заметим, что уравнение (10) — частный случай уравнения (6), а его характеристическая функция $g_u(p)$ связана с функцией $g(p)$ простым соотношением $g_u(p) = g(\alpha + p)$. Следовательно, $g_u(i\varphi) \neq 0$, и к функции u применима лемма 3. Значит, u представима в виде (8). Возвращаясь к функции x, получаем для нее представление (9).

2. Пусть $g(\alpha + i\varphi) = 0$ при некотором $\varphi \in \mathbb{R}$. Выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы $g(\alpha - \varepsilon + i\varphi) \neq 0$ (возможность такого выбора обеспечивается предложением 1). Очевидно, если при $t \in \mathbb{R}_-$ выполняется $x \in L^\alpha$, то $x \in L^{\alpha-\varepsilon}$. В силу уже доказанной части 1 имеем для x представление

$$x(t) = \sum_{\operatorname{Re} p_m > \alpha - \varepsilon} q_m(t) e^{p_m t} = \sum_{\operatorname{Re} p_m > \alpha} q_m(t) e^{p_m t} + \sum_{\operatorname{Re} p_m = \alpha} q_m(t) e^{p_m t}. \tag{11}$$

Так как $x \in L^\alpha$, то вторую сумму следует отбросить, и вновь приходим к представлению (9). □

Отметим, что при изучении разрешимости уравнения (2) в пространствах ограниченных с экспоненциальным весом функций основным инструментом являлись либо различные варианты преобразования Лапласа ([4], с. 56; [8], [9], с. 325; [10], [12]), либо метод производящих функций [11]. На наш взгляд, возможность эквивалентного перехода от уравнения на полуоси к уравнению на оси делает более естественным применение преобразования Фурье. Как показывают результаты этого раздела, переход к Фурье-образам в совокупности с асимптотическим разложением (5) позволяет установить разрешимость уравнения (2) и структуру пространства его решений проще и короче, чем в перечисленных выше работах.

4. Основные результаты

Обозначим $\beta_1 = \operatorname{Re} p_1$, $\beta_2 = \max\limits_{\operatorname{Re} p_m < \beta_1} \{\operatorname{Re} p_m\}, \ldots, \beta_k = \max\limits_{\operatorname{Re} p_m < \beta_{k-1}} \{\operatorname{Re} p_m\}, \ldots$. Очевидно, последовательность $\{\beta_k\}$ монотонно убывает к $-\infty$, поскольку количество корней функции g с одинаковой вещественной частью конечно.

Из утверждений, приведенных в предыдущем разделе, легко получить результат о разрешимости уравнения (2) и структуре его решения.

Теорема 1. *Пусть $\alpha \in [\beta_{k+1}, \beta_k)$. Тогда любое решение уравнения* (2) *в пространстве L^α представимо в виде*

$$x(t) = \sum_{\operatorname{Re} p_m \geqslant \beta_k} q_m(t) e^{p_m t}, \tag{12}$$

где q_m — полином степени $\nu_m - 1$ с произвольными комплексными коэффициентами.

Доказательство. Если $\alpha = \beta_{k+1}$, то структура пространства решений уравнения (2) в L^α определяется формулой (9), которая совпадает с (12).

Поскольку в полосе $\operatorname{Re} p \in (\beta_{k+1}, \beta_k)$ функция g не имеет нулей, то структура решения уравнения (2) в пространстве L^α при $\alpha \in (\beta_{k+1}, \beta_k)$ определяется той же формулой (12). ☐

Следствие 1. Уравнение (2) имеет в пространстве L^α только тривиальное решение тогда и только тогда, когда $\alpha \geqslant \beta_1$.

Заметим, что вследствие предложения 1 в представлении (12) количество слагаемых конечно и определяется количеством и кратностью нулей характеристической функции, лежащих справа от прямой $\operatorname{Re} p = \alpha$. Следовательно, пространство решений уравнения (2) в пространстве L^α конечномерно, а его размерность равна $\sum\limits_{\operatorname{Re} p_m \geqslant \beta_k} \nu_m$.

Теорема 1 дает возможность исследовать разрешимость уравнения (2) в других функциональных пространствах. Покажем это на примере пространства

$$L^\alpha_\infty = \left\{ x : x^{(n-1)} \in D_{\mathrm{loc}},\ \sup_{t \leqslant 0} \left(\left| x^{(j)}(t) \right| e^{-\alpha t} \right) < \infty,\ j = \overline{0, n-1} \right\}.$$

Теорема 2. *Если $\alpha \in (\beta_{k+1}, \beta_k)$, то любое решение уравнения* (2) *в пространстве L^α_∞ представимо в виде* (12).

Если $\alpha = \beta_{k+1}$, то любое решение уравнения (2) *в пространстве L^α_∞ представимо в виде*

$$x(t) = \sum_{\operatorname{Re} p_m \geqslant \beta_k} q_m(t) e^{p_m t} + \sum_{\operatorname{Re} p_m = \beta_{k+1}} c_m e^{p_m t}, \tag{13}$$

где q_m — полином степени $\nu_m - 1$ с произвольными комплексными коэффициентами, c_m — произвольные комплексные числа.

Доказательство. Поскольку при $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\int_{-\infty}^{0} \left| x^{(j)}(t) \right| e^{-(\alpha - \varepsilon)t}\, dt \leqslant \sup_{t \in \mathbb{R}_-} \left(\left| x^{(j)}(t) \right| e^{-\alpha t} \right) \int_{-\infty}^{0} e^{\varepsilon t}\, dt < \infty, \quad j = \overline{0, n-1},$$

то $L^\alpha_\infty \subseteq L^{\alpha-\varepsilon}$, причем ε можно выбрать сколь угодно малым.

В силу теоремы 1 любое решение уравнения (2) в пространстве $L^{\alpha-\varepsilon}$ представимо в виде

$$x(t) = \sum_{\operatorname{Re} p_m > \alpha} q_m(t) e^{p_m t} + \sum_{\operatorname{Re} p_m = \alpha} q_m(t) e^{p_m t},$$

где q_m — полином степени $\nu_m - 1$ с произвольными комплексными коэффициентами. Если добавить условие $x \in L^\alpha_\infty$, то при $\alpha \in (\beta_{k+1}, \beta_k)$ получаем представление (12), а при $\alpha = \beta_{k+1}$ во второй сумме от полиномов остаются только свободные члены. ☐

Следствие 2. Уравнение (2) имеет в пространстве L^α_∞ только тривиальное решение, если и только если $\alpha > \beta_1$.

Для пространства L^0_∞ следствие 2 допускает красивую переформулировку.

Следствие 3. Для того чтобы уравнение (2) имело в пространстве L^0_∞ только тривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы уравнение (3) было экспоненциально устойчивым.

Доказательство. Достаточно отметить, что уравнение (3) экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда все корни характеристической функции лежат слева от мнимой оси ([5], с. 209–210), т. е. при $\beta_1 < 0$. ☐

Следствие 3 показывает, что между задачей однозначной разрешимости уравнения (2) (а также уравнения (6)) и задачей устойчивости решения уравнения (3) существует тесная связь.

Аналогичным образом исследование разрешимости уравнения (2) в пространствах

$$L_p^\alpha = \left\{ x : x^{(n-1)} \in D_{\mathrm{loc}},\ \int_{-\infty}^{0} \left|x^{(j)}(t)\right|^p e^{-\alpha t}\, dt < \infty,\quad j = \overline{0, n-1} \right\},$$

$$L_{\lim} = \left\{ x : x^{(n-1)} \in D_{\mathrm{loc}},\ \lim_{t\to-\infty} \left|x^{(j)}(t)\right| < \infty,\quad j = \overline{0, n-1} \right\},$$

$$P_m = \left\{ x : x^{(n-1)} \in D_{\mathrm{loc}},\ \sup_{t\leqslant 0} \frac{\left|x^{(j)}(t)\right|}{1+|t|^m} < \infty,\quad j = \overline{0, n-1} \right\},$$

$$M_p^\alpha = \left\{ x : x^{(n-1)} \in D_{\mathrm{loc}},\ \sup_{t\leqslant 0} \int_{t}^{t+1} \left|x^{(j)}(t)\right|^p e^{-\alpha t}\, dt < \infty,\quad j = \overline{0, n-1} \right\}$$

сводится к изучению уравнения (2) в пространстве L^α, $\alpha \in \mathbb{R}$, поскольку при достаточно малых $\varepsilon > 0$ справедливы включения

$$L_p^\alpha \subseteq L^{\alpha/p-\varepsilon},\quad L_{\lim} \subseteq L_\infty^0,\quad P_m \subseteq L^{-\varepsilon},\quad M_p^\alpha \subseteq L_p^{\alpha-\varepsilon}.$$

Отметим, что в работах ([4], с. 56; [9], с. 325; [10], [13], [14]) рассматривалось пространство L_∞^α, в работах ([8], [9], с. 325) — пространство P_m. В [12] была декларирована разрешимость в пространстве M_p^α, но, по-видимому, доказательство справедливо только для пространства L_∞^α. Результаты указанных работ вытекают из теоремы 1 как частные случаи.

5. Примеры

На примере нескольких простых уравнений покажем, как работают полученные результаты. Подчеркнем, что в отличие от работ ([4], с. 56; [8]–[10], [12]) мы доводим применение теорем 1 и 2 до эффективных (выраженных в терминах исходных параметров) признаков разрешимости конкретных уравнений.

Пример 2. Для уравнения

$$\dot{x}(t) + ax(t-1) = 0, \tag{14}$$

где $a \in \mathbb{R}$, найдем условия на коэффициент, при которых (14) имеет в пространстве L_∞^0 только тривиальные решения. В силу следствия 3 это возможно тогда и только тогда, когда уравнение (14), рассматриваемое на $\mathbb{R}_+$, экспоненциально устойчиво. Используя известный критерий экспоненциальной устойчивости ([5], с. 484), получаем, что (14) имеет в L_∞^0 только тривиальное решение, если и только если $a \in \big(0, \pi/2\big)$.

Более тонкое исследование характеристической функции требуется, чтобы найти условия, при которых пространство решений уравнения (14) имеет заданную ненулевую размерность.

Пример 3. Найдем условия на коэффициент a, при которых пространство решений уравнения (14), принадлежащих L_∞^0, двумерно.

Уравнение (14) имеет характеристическую функцию $g(p) = p + ae^{-p}$. Отметим, что система уравнений $g(p) = 0$, $g'(p) = 0$ совместна только при $p = -1$. Следовательно, все нули функции g, вещественная часть которых неотрицательна, являются простыми.

Легко видеть, что функция g имеет нули на мнимой оси только при $a = 0$ (тогда $p = 0$) и при $a_m = (-1)^m\big(\pi/2 + \pi m\big)$ (тогда $p = \pm i\theta_m$, $\theta_m = \pi/2 + \pi m$), $m \in \mathbb{N}_0$.

Точки 0 и a_m, $m \in \mathbb{N}_0$, разбивают вещественную ось на счетное множество промежутков, причем в силу непрерывной зависимости нулей функции g от коэффициентов число нулей g, лежащих справа от мнимой оси, одинаково для всех a, принадлежащих внутренности любого из указанных промежутков. Увеличение или уменьшение количества нулей g происходит только на границах промежутков.

Проследим динамику нулей квазиполинома g, лежащих на мнимой оси, в зависимости от изменения параметра a. Рассмотрим семейство $\{g^a(p)\}_{a\in\mathbb{R}} = g(a,p) = p + ae^{-p}$. Очевидно, существует функциональная зависимость корней функции g от a; обозначив ее $p = p(a)$, заметим, что эта функция непрерывно дифференцируема. Следовательно, равенство $g(a,p(a)) = 0$ выполняется тождественно и $\frac{d}{da}g(a,p(a)) = 0$. По формуле производной сложной функции имеем

$$\frac{dp}{da} = -\frac{e^{-p}}{1-ae^{-p}} = \frac{1}{a\,(1/p+1)}.$$

Значит,

$$\frac{d(\operatorname{Re} p)}{da}\bigg|_{\substack{a=a_m\\ p=\pm i\theta_m}} = \frac{1}{a_m\big(\theta_m^{-2}+1\big)}, \quad \frac{d(\operatorname{Re} p)}{da}\bigg|_{\substack{a=0\\ p=0}} = -1,$$

т. е. производная $\frac{d(\operatorname{Re} p)}{da}$ при положительных a положительна, а при неположительных a отрицательна. Как отмечалось выше, при $a = a_m$ функция g имеет ровно два корня на мнимой оси. Следовательно, при переходе a через a_m в сторону увеличения $|a|$ количество нулей справа от мнимой оси увеличивается на два. Поскольку при $a = 0$ функция g имеет единственный корень на мнимой оси, то при переходе a через 0 в сторону уменьшения a количество нулей справа от мнимой оси увеличивается на один.

Как известно ([5], с. 484), количество нулей функции g справа от мнимой оси при $a \in \big(0,\pi/2\big)$ равно нулю. При $a < 0$ функция g имеет справа от мнимой оси нечетное число нулей, следовательно, размерность пространства решений не может быть равна двум. При $a = \pi/2$ функция g имеет ровно два простых комплексно сопряженных нуля на мнимой оси, справа от мнимой оси корней нет. При $a \in \big(\pi/2, 5\pi/2\big)$ у функции g появляются два простых комплексно сопряженных корня, лежащих справа от мнимой оси. Наконец, при $a \geqslant 5\pi/2$ количество нулей g, лежащих справа или на мнимой оси, будет больше двух.

Окончательно получаем, что пространство решений уравнения (14), принадлежащих L^0_∞, двумерно тогда и только тогда, когда $a \in \big[\pi/2, 5\pi/2\big)$.

Опишем структуру пространства решений в этом случае. Так как коэффициент a вещественный, то решение уравнения тоже естественно записать как вещественнозначную функцию. Любое решение уравнения (14), принадлежащее L^0_∞, имеет вид

$$x(t) = e^{\zeta t}(A\cos\eta t + B\sin\eta t),$$

где $p = \zeta \pm i\eta$ — корни функции g, для которых $\zeta \geqslant 0$, A, B — произвольные вещественные числа.

Пример 4. Для уравнения

$$\dot{x}(t) + a\int_{t-1}^{t} x(s)\,ds = 0, \tag{15}$$

где $a \in \mathbb{R}$, найдем условия на коэффициент a, при которых (15) имеет в пространстве L^0 только тривиальное решение. В силу следствия 1 это возможно тогда и только тогда, когда $\beta_1 \leqslant 0$, т. е. все корни характеристической функции уравнения (15) не лежат справа от мнимой оси. Эта задача для уравнения (15) исследовалась в [19], [20]. Используя результаты этих работ, получаем, что (15) имеет в L^0 только тривиальное решение, если и только если $a \in \big[0, \pi^2/2\big]$.

Пример 5. Найдем условия на коэффициент a, при которых пространство решений уравнения (15) имеет в L^0 нечетную размерность.

Уравнение (15) имеет характеристическую функцию $g(p) = p + a\frac{1-e^{-p}}{p}$.

Непосредственным подсчетом убеждаемся, что система уравнений $g(p) = 0$, $g'(p) = 0$ совместна только при $\operatorname{Re} p < 0$. Следовательно, все нули функции g, вещественная часть которых неотрицательна, являются простыми.

Функция g имеет нули на мнимой оси только при $a = 0$ (тогда $p = 0$) и при

$$a_m = \pi^2(2m+1)^2/2$$

(тогда $p = \pm i\theta_m$, $\theta_m = \pi(2m+1)$), $m \in \mathbb{N}_0$. Заметим, что все $a_m > 0$.

Легко видеть, что количество нулей функции g постоянно на интервалах $(-\infty, 0)$, $(0, a_0)$, (a_m, a_{m+1}) и меняется при переходе через их границы.

Проследим динамику нулей квазиполинома g, лежащих на мнимой оси, в зависимости от изменения параметра a. Рассмотрим семейство $\{g^a(p)\}_{a\in\mathbb{R}} = g(a,p) = p + a\frac{1-e^{-p}}{p}$. Очевидно, существует функциональная зависимость корней функции g от a; обозначим ее $p = p(a)$ и заметим, что эта функция непрерывно дифференцируема. По формуле производной сложной функции имеем

$$\frac{dp}{da} = -\frac{\frac{1-e^{-p}}{p}}{1 + \frac{a}{p}e^{-p} - a\frac{1-e^{-p}}{p}\frac{1}{p}} = -\frac{1-e^{-p}}{2p + ae^{-p}}.$$

Значит,

$$\left.\frac{d(\operatorname{Re} p)}{da}\right|_{\substack{a=a_m\\ p=\pm i\theta_m}} = \frac{2a_m}{a_m^2 + 4\theta_m^2} > 0, \quad \left.\frac{d(\operatorname{Re} p)}{da}\right|_{\substack{a=0\\ p=0}} = -\frac{1}{2}.$$

Как отмечалось выше, при $a = a_m$ функция g имеет ровно два корня на мнимой оси. Следовательно, при переходе a через a_m в сторону увеличения a количество нулей справа от мнимой оси увеличивается на два. Поскольку при $a = 0$ функция g имеет единственный корень на мнимой оси, то при переходе a через нуль в сторону уменьшения a количество нулей справа от мнимой оси увеличивается на один.

Наконец, заметим (см. [19], [20]), что все нули функции g лежат слева от мнимой оси тогда и только тогда, когда $a \in (0, a_0)$.

Поэтому количество нулей функции g справа от мнимой оси при $a \in [0, a_0]$ равно нулю, при $a \in (-\infty, 0)$ равно единице, при $a \in (a_m, a_{m+1}]$ равно $2m + 2$, $m \in \mathbb{N}_0$. При $a = 0$ функция g имеет единственный нуль $p = 0$, при $a = a_m$ функция g имеет ровно два нуля на мнимой оси, причем комплексно сопряженных.

Таким образом, пространство решений уравнения (15), принадлежащих L^0, имеет нечетную размерность тогда и только тогда, когда $a \in (-\infty, 0)$. Более того, данное пространство решений одномерно, остальные нечетные размерности невозможны.

Опишем структуру пространства решений в этом случае. Любое решение уравнения (15), принадлежащее L^0, имеет вид $x(t) = Ae^{\zeta t}$, где $\zeta \in \mathbb{R}$ — единственный корень функции g, лежащий справа от мнимой оси, A — произвольное вещественное число.

В заключение найдем критерий однозначной разрешимости сингулярного функционально-дифференциального уравнения на конечном отрезке.

Пример 6. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x}(t) + \tfrac{a}{t}\dot{x}(t) + \tfrac{b}{t^2}x\left(\tfrac{t}{e}\right) = 0, \quad t \in [0,1] \tag{16}$$

в пространстве ограниченных вместе с производной на $[0,1]$ функций. Производная предполагается абсолютно непрерывной на любом отрезке $[\varepsilon, 1]$, где $\varepsilon \in (0,1)$. Заменой переменных

$t = e^s$, $x(e^s) = y(s)$ уравнение (16) сводится к автономному уравнению

$$y''(s) + (a-1)y'(s) + by(s-1) = 0, \quad s \in \mathbb{R}_-, \tag{17}$$

в пространстве L^0_∞. В силу следствия 3 уравнение (17) имеет в L^0_∞ только тривиальное решение тогда и только тогда, когда это же уравнение, рассматриваемое на $\mathbb{R}_+$, экспоненциально устойчиво. Последний вопрос был исчерпывающе изучен в ([7], с. 130; [21]). Используя результаты этих работ, заключаем, что уравнение (16) однозначно разрешимо (имеет только тривиальное решение) тогда и только тогда, когда $0 < b < \varphi^2/\cos\varphi$, где φ — корень уравнения $a - 1 = \varphi \operatorname{tg} \varphi$ из интервала $\big(0, \pi/2\big)$.

Авторы статьи выражают благодарность В.В. Малыгиной за ряд существенных замечаний, Е.И. Бравому за идею примера 1, а также участникам Пермского семинара по функционально-дифференциальным уравнениям за внимание к работе и плодотворное обсуждение ее результатов.

Литература

[1] Хейл Дж. *Теория функционально-дифференциальных уравнений* (Мир, М., 1984).

[2] Hastings S.P. *Backward existence and uniqueness for retarded functional differential equations*, J. Diff. Equat. **5**, 441-451 (1969).

[3] Lillo J.C. *Backward continuation of retarded functional differential equations*, J. Diff. Equat. **17**, 349–360 (1975).

[4] Мышкис А.Д. *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом* (Наука, М., 1972).

[5] Беллман Р., Кук К. *Дифференциально-разностные уравнения* (Мир, М., 1967).

[6] Плаксина В.П., Плаксина И.М., Плехова Э.В. *О разрешимости задачи Коши для одного квазилинейного сингулярного функционально-дифференциального уравнения*, Изв. вузов. Матем., № 2, 54–61 (2016).

[7] Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом* (Наука, М., 1971).

[8] Schmidt E. *Über eine Klasse linearer funktionalen Differentialgleichungen*, Math. Ann., № 70, 499–521 (1911).

[9] Титчмарш Э.Ч. *Введение в теорию интегралов Фурье* (Гостехиздат, М.–Л., 1948).

[10] Green J.W. *A note on the solutions of the equation $f'(x) = f(x+a)$*, Math. Mag. **26** (3), 117–120 (1953).

[11] Зверкин А.М. *О полноте системы решений типа Флоке для уравнения с запаздыванием*, Дифференц. уравнения **4** (3), 474–478 (1968).

[12] Pitt H.R. *On a class of integro-differential equations*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **40** (3), 199–211 (1944).

[13] Баландин А.С. *О разрешимости на оси некоторых классов дифференциально-разностных уравнений*, Вестн. Тамбовск. ун-та. Сер.: Естествен. и техн. науки **18** (5–2), 2449–2451 (2013).

[14] Баландин А.С. *О разрешимости на оси автономных дифференциальных уравнений с ограниченным запаздыванием*, Вестн. Тамбовск. ун-та. Сер.: Естествен. и техн. науки **20** (5), 1044–1050 (2015).

[15] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа* (Наука, М., 1981).

[16] Azbelev N.V., Simonov P.M. *Stability of differential equations with aftereffects*, Stability and control: theory, methods and appl. **20** (Taylor & Francis, London, 2003).

[17] Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (Физматгиз, М., 1963).

[18] Зубов В.И. *К теории линейных стационарных систем с запаздывающим аргументом*, Изв. вузов. Матем., № 6, 86-95 (1958).

[19] Вагина М.Ю. *Логистическая модель с запаздывающим усреднением*, Автоматика и телемеханика, № 4, 167–173 (2003).

[20] Сабатулина Т.Л., Малыгина В.В. *Некоторые признаки устойчивости линейных автономных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием*, Изв. вузов. Матем., № 6, 55–63 (2007).

[21] Мулюков М.В. *Об асимптотической устойчивости двупараметрических систем дифференциальных уравнений с запаздыванием*, Изв. вузов. Матем., № 6, 48–55 (2014).

А.С. Баландин

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Комсомольский пр., д. 29, г. Пермь, 614990, Россия,

`e-mail:` balandin-anton@yandex.ru

Т.Л. Сабатулина

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Комсомольский пр., д. 29, г. Пермь, 614990, Россия,

`e-mail:` TSabatulina@gmail.com

A.S. Balandin and T.L. Sabatulina

Solvability of autonomous differential equation with aftereffect on negative semi-axis

Abstract. We consider a linear autonomous homogeneous functional differential equation on the real negative semi-axis. We prove that if solutions belong to the special space of functions with integral limitations, then the space of solutions is finite-dimensional and its basis is formed by the solutions of the form $(t^m \exp(pt))$ generated by the roots of the characteristic equation. In contrast to the spaces used earlier, the pointwise estimation of solutions is replaced by the integral one. We adduce examples of differential equations with aftereffect and give the effective description of the space of solutions for these equations.

Keywords: functional differential equation, aftereffect, solvability on the axis, space of functions with exponential weight.

A.S. Balandin

Perm National Research Polytechnic University,
29 Komsomol'skii Ave., Perm, 614990 Russia,

`e-mail:` balandin-anton@yandex.ru

T.L. Sabatulina

Perm National Research Polytechnic University,
29 Komsomol'skii Ave., Perm, 614990 Russia,

`e-mail:` TSabatulina@gmail.com