ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 1 (524)

УДК 517.554

Т.Н. НИКИТИНА

$\overline{\partial}$-ЗАМКНУТОСТЬ ФОРМ, ПРЕДСТАВИМЫХ ИНТЕГРАЛОМ КОППЕЛЬМАНА НА ОСНОВЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ВЫЧЕТА

Рассмотрим однородную $\overline{\partial}$-задачу Неймана, связанную с оператором типа оператора Ходжа $\overline{\partial}^*\overline{\partial}$ в $\mathbb{C}^n$, $n>1$:

$$\overline{\partial}^*\overline{\partial}F=0 \ \text{ в } \ \Omega \quad \text{и} \quad (\overline{\partial}F)_n=0 \ \text{ на } \ \partial\Omega. \tag{1}$$

Отметим, что данная задача для внешних дифференциальных форм, являющихся решением уравнения $\overline{\partial}^*\overline{\partial}F=0$ в Ω, рассматривалась в ([1], с. 165, [2]), где была решена другим способом для (p,q)-форм с коэффициентами класса $C^2(\overline{\Omega})$ или $C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$. Вопросы $\overline{\partial}$-замкнутости CR-форм рассматривались в [3] (см. также обзор [4] и ссылки, данные там). Переформулируем эту задачу.

Пусть $\Omega=\{z\in\mathbb{C}^n : \varrho(z)>0\}$ — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ с границей класса C^m, $m\geq 1$. Предположим $\varrho\in C^m$ в $\mathbb{C}^n$ и $d\varrho\neq 0$ на $\partial\Omega$.

Обозначим через $\mathrm{Harm}(\Lambda^{p,q},\Omega)$ пространство комплексных гармонических (p,q)-форм F с коэффициентами класса C^2 в Ω, т. е. форм, удовлетворяющих условию $\Box F=\overline{\partial}^*\overline{\partial}F+\overline{\partial}\,\overline{\partial}^*F=0$ в Ω, где оператор $\overline{\partial}^*=-*\partial*$, а $*$ — оператор Ходжа на формах $\sum\limits'_{|L|=p,\ |M|=q} f_{L,M}(\zeta)d\zeta_L\wedge d\overline{\zeta}_M$ типа (p,q) определяется равенством

$$*f(\zeta)=2^{p+q-n}i^n(-1)^{pn}\sum_{|L|=p,\ |M|=q}{}' \sigma(L)\sigma(M)f_{L,M}\,d\zeta[M]\wedge d\overline{\zeta}[L]$$

([5], с. 192); здесь штрих у знака суммы означает, что суммирование ведется по возрастающим мультииндексам $1\leq l_1<l_2<\cdots<l_p\leq n$, $1\leq m_1<m_2<\cdots<m_q\leq n$, $[M]$ означает, что дифференциалы в $d\zeta$ с номерами $m_1,m_2,\dots,m_q$ опущены, знак $\sigma(M)$ определяется равенством $dz_M\wedge dz[M]=\sigma(M)dz$. $\mathcal{G}(\Lambda^{p,q},\Omega)$ — пространство комплексных (p,q)-форм с коэффициентами класса C^2 , удовлетворяющих условию $\overline{\partial}^*\overline{\partial}F=0$ в Ω, $\mathrm{Ph}(\Lambda^{p,q},\Omega)$ — пространство плюригармонических (p,q)-форм с коэффициентами класса C^2 в Ω, т. е. форм, удовлетворяющих условию $\partial\overline{\partial}F=0$, $Z(\Lambda^{p,q},\Omega)$ — пространство $\overline{\partial}$-замкнутых (p,q)-форм в Ω, $\mathcal{G}^\infty(\Lambda^{p,q},\Omega)=\mathcal{G}(\Lambda^{p,q},\Omega)\cap C^\infty(\Lambda^{p,q},\overline{\Omega})$, $\mathrm{Ph}^\infty(\Lambda^{p,q},\Omega)=\mathrm{Ph}(\Lambda^{p,q},\Omega)\cap C^\infty(\Lambda^{p,q},\overline{\Omega})$, $Z^\infty(\Lambda^{p,q},\Omega)=Z(\Lambda^{p,q},\Omega)\cap C^\infty(\Lambda^{p,q},\overline{\Omega})$. При $p=0$ $\mathrm{Ph}(\Lambda^{p,q},\Omega)\subset\mathcal{G}(\Lambda^{p,q},\Omega)$. Действительно, имеем

$$\partial\overline{\partial}u=\sum_L{}'\sum_{\substack{k=1\\k\notin L}}^{n}\sum_{|S|=q+1}{}'\sum_{M\cup l=S}\frac{\partial^2u_{L,M}}{\partial z_k\partial\overline{z}_l}\sigma(M,l)\sigma(S)(-1)^{q+1}d\overline{z}_S\wedge dz_k\wedge dz_L=$$
$$=\sum_{|S|=q+1}{}'\sum_{M\cup l=S}\sum_{|R|=p+1}\sum_{L\cup k=R}\frac{\partial^2u_{L,M}}{\partial z_k\partial\overline{z}_l}\sigma(M,l)\sigma(S)\sigma(L,k)\sigma(R)(-1)^{q+1}d\overline{z}_S\wedge dz_R=0, \tag{2}$$

т.е.

$$\sum_{M\cup l=S}\frac{\partial^2u_{L,M}}{\partial z_k\partial\overline{z}_l}\sigma(M,l)=0 \quad \forall|S|=q+1,\quad |L|=p,\quad 1\leq k\leq n,\quad k\notin L, \tag{3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента для ведущих научных школ НШ-1212.2003.1.

и

$$\sum_{L\cup k=R}\sigma(L,k)\frac{\partial^2 u_{L,M}}{\partial z_k\partial\overline{z}_l}=0\ \ \forall|R|=p+1,\ \ |M|=q,\ \ 1\le l\le n,\ \ l\notin M; \tag{4}$$

$\sigma(M,k)$ определяется равенством $dz_k\wedge dz_M\wedge dz[M,k]=\sigma(M,k)dz$.

С другой стороны,

$$\overline{\partial}^*\overline{\partial}u(z)=-2{\sum_L}'\ {\sum_{M\cup l=J\cup k}}'\frac{\partial^2 u_{L,M}}{\partial z_k\partial\overline{z}_l}\sigma(M,l)\sigma(J,k)d\overline{z}_J\wedge dz_L=0, \tag{5}$$

т. е.

$$\sum_{|S|=q+1}\ \sum_{J\cup k=S}\sigma(J,k)\Big(\sum_{M\cup l=S}\frac{\partial^2 u_{L,M}}{\partial z_k\partial\overline{z}_l}\sigma(M,l)\Big)=0\ \ \forall|J|=q,\ \ |L|=p. \tag{6}$$

Из (3), (4) и (6) следует требуемое включение. Заметим, что при $p\ne 0$ это включение не верно. Например, достаточно рассмотреть (n,q)-формы, которые являются плюригармоническими, но не обязаны принадлежать классу $\mathcal{G}(\Lambda^{p,q},\Omega)$. Однако класс $\mathrm{Ph}'(\Lambda^{p,q},\Omega)$ форм со свойством

$$\sum_{M\cup l=S}\frac{\partial^2 u_{L,M}}{\partial z_k\partial\overline{z}_l}\sigma(M,l)=0\ \ \forall|S|=q+1,\ \ |L|=p,\ \ k=1,2,\dots,n, \tag{7}$$

является подмножеством $\mathcal{G}(\Lambda^{p,q},\Omega)$ для любых $p=0,1,2,\dots,n$, $q=0,1,2,\dots,n$, а для p=0 он содержит пространство $\mathrm{Ph}(\Lambda^{p,q},\Omega)$, при $p=q=0$ совпадает с плюригармоническими функциями.

Заметим, что если $\overline{\partial}u=0$, то

$${\sum_L}'\ {\sum_{|S|=q+1}}'\ \sum_{M\cup l=S}\frac{\partial u_{L,M}}{\partial\overline{z}_l}\sigma(M,l)\sigma(S)d\overline{z}_S\wedge dz_L=0,$$

т. е.

$$\sum_{M\cup l=S}\frac{\partial u_{L,M}}{\partial\overline{z}_l}\sigma(M,l)=0\ \ \forall|S|=q+1,\ \ |L|=p.$$

Следовательно, $\overline{\partial}$-замкнутые формы с коэффициентами класса C^2 принадлежат классу форм, удовлетворяющих равенству (7).

При $p=q=0$ $\mathrm{Ph}(\Lambda^{p,q},\Omega)\subset\mathrm{Harm}(\Lambda^{p,q},\Omega)=\mathcal{G}(\Lambda^{p,q},\Omega)$. Для каждого r, $0\le r\le m$, $\mathcal{G}^r(\Lambda^{p,q},\Omega)=\mathcal{G}(\Lambda^{p,q},\Omega)\cap C^r(\Lambda^{p,q},\overline{\Omega})$, $\mathrm{Ph}^r(\Lambda^{p,q},\Omega)=\mathrm{Ph}(\Lambda^{p,q},\Omega)\cap C^r(\Lambda^{p,q},\overline{\Omega})$, $Z^r(\Lambda^{p,q},\Omega)=Z(\Lambda^{p,q},\Omega)\cap C^r(\Lambda^{p,q},\overline{\Omega})$. Также введем обозначения $\mathcal{G}^f(\Lambda^{p,q},\Omega):H\in\mathcal{G}(\Lambda^{p,q},\Omega)$ и H конечного порядка роста вблизи $\partial\Omega$, $\mathrm{Ph}^f(\Lambda^{p,q},\Omega):H\in\mathrm{Ph}(\Lambda^{p,q},\Omega)$ и H конечного порядка роста вблизи $\partial\Omega$. Дифференциальная форма f является формой конечного порядка роста вблизи Γ, если для любого шара $B(z^0,r)$ с центром в точке $z^0\in\Gamma=\{z:\varrho(z)=0\}$ радиуса r существуют константы $c>0$, $m>0$, для которых

$$|f(z)|={\sum_{\substack{|L|=p,\\|M|=q}}}'|f_{L,M}(z)|\le c|\varrho|^{-m}(z),\quad z\in\Omega\cap B(z^0,r).$$

Предложение 1. *Если внешняя дифференциальная форма $f=u+iv$ с коэффициентами класса $C^2(\Omega)$ $\overline{\partial}$-замкнута в Ω, то $\operatorname{Re}f=(f+\overline{f})/2=u$ и $\operatorname{Im}f=(f-\overline{f})/2i=v$ плюригармоничны в Ω.*

Доказательство. Имеем $\partial\overline{\partial}u=\partial\overline{\partial}(\frac{f+\overline{f}}{2})=\frac{\partial\overline{\partial}f-\overline{\partial}\partial\overline{f}}{2}=0$ в Ω. Так как вместе с f форма $-if\in Z(\Lambda^{p,q},\Omega)$ и $\operatorname{Im}f=\operatorname{Re}(-if)$, то теорема справедлива и для мнимой части. $\square$

Приведем в случае $0\le p\le n$ аналог формулы Грина на основе ядра Коппельмана–Бохнера–Мартинелли (а не многомерного логарифмического вычета) для когомологий Дольбо.

Теорема 1. *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ с кусочно-гладкой границей и форма $\gamma \in C^2(\Lambda^{p,q}, \overline{\Omega})$, тогда*

$$\int_{\partial\Omega} \gamma(\zeta) \wedge U_{p,q}(\zeta - z) + \int_{\Omega} g(\zeta - z)\overline{\partial}^* \overline{\partial}\gamma(\zeta) \wedge \varkappa_{p,q}(\zeta, z) -$$

$$- \int_{\partial\Omega} g(\zeta - z) * \overline{\partial}\gamma(\zeta) \wedge \iota_{p,q}(\zeta, z) - \overline{\partial} \int_{\Omega} \gamma(\zeta) \wedge U_{p,q-1}(\zeta - z) = \chi_\Omega \gamma(z). \quad (8)$$

(*Интегралы по области Ω сходятся абсолютно.*) *Здесь $U_{p,q}(\zeta - z)$ — ядро Коппельмана–Бохнера–Мартинелли (напр.,* [6], с. 11), $g(\zeta) = \begin{cases} -\frac{(n-2)!}{(2\pi i)^n}|\zeta|^{2-2n}, & \text{если } n > 1; \\ (2\pi i)^{-1} \ln|\zeta|, & \text{если } n = 1, \end{cases}$ — *фундаментальное решение уравнения Лапласа, χ_Ω — характеристическая функция области Ω,*

$$\varkappa_{p,q}(\zeta, z) = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{|R|=p \\ |S|=q}}{}' \sigma(R)\sigma(S)(-1)^{n(n-q)} d\zeta[R] \wedge d\overline{\zeta}[S] d\overline{z}_S \wedge dz_R,$$

$$\iota_{p,q}(\zeta, z) = \sum_{\substack{|J|=q \\ |S|=p}}{}' 2^{n-p-q-1} i^n d\zeta_J \wedge d\overline{\zeta}_S d\overline{z}_J \wedge dz_S,$$

и $\varkappa_{p,q} = -*\iota_{p,q}$.

Доказательство. В силу аддитивности операторов формулу (8) достаточно доказать для форм типа

$$f(z) d\overline{z}_M \wedge dz_L, \quad M = (m_1, \ldots, m_q), \quad L = (l_1, \ldots, l_p), \quad (9)$$

где $f \in C^2(\overline{\Omega})$. Имеем

$$* \overline{\partial}\gamma(\zeta) \wedge \iota_{p,q}(\zeta, z) = \sum_{M \cup k = J \cup l}{}' \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}_k} \sigma(J, l)\sigma(M, k)(-1)^{l-1}(-1)^n d\overline{\zeta} \wedge d\zeta[l] d\overline{z}_J \wedge dz_L =$$

$$= *\overline{\partial}(f\, d\overline{\zeta}_M) \wedge \iota_{0,q}(\zeta, z) \wedge dz_L = (-1)^{q+1} \overline{\partial}(f d\overline{\zeta}_M) \wedge W_{0,q}(\zeta, z) \wedge dz_L, \quad (10)$$

а

$$\overline{\partial}^* \overline{\partial}\gamma(\zeta) \wedge \varkappa_{p,q}(\zeta, z) = \sum_{M \cup k = J \cup l}{}' \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta_l \partial \overline{\zeta}_k} \sigma(J, l)\sigma(M, k) d\overline{\zeta} \wedge d\zeta\, d\overline{z}_J \wedge dz_L =$$

$$= \overline{\partial}^* \overline{\partial}(f d\overline{\zeta}_M) \wedge \varkappa_{0,q}(\zeta, z) \wedge dz_L = (-1)^{q+1} \partial\overline{\partial}(f\, d\overline{\zeta}_M) \wedge W_{0,q}(\zeta, z) \wedge dz_L, \quad (11)$$

где $W_{0,q}(\zeta, z) = (-1)^{n+q-1} \sum\limits_{|J|=q}{}' \sum\limits_{\substack{l=1 \\ l \notin J}}^{n} (-1)^{l-1} \sigma(J, l) d\overline{\zeta}[J, l] \wedge d\zeta[l] d\overline{z}_J$.

В ([6], с. 19) доказана справедливость равенства

$$\gamma(\zeta) \wedge U_{p,q}(\zeta - z) = f(\zeta)\, d\overline{\zeta}_M \wedge U_{0,q}(\zeta - z) \wedge dz_L. \quad (12)$$

Поэтому формулу (8) достаточно доказать для $p = 0$. В этом случае справедливо равенство

$$\int_{\partial\Omega} \gamma(\zeta) \wedge U_{0,q}(\zeta - z) + \int_{\Omega} g(\zeta - z)(-1)^{q+1} \partial\overline{\partial}\gamma(\zeta) \wedge W_{0,q}(\zeta, z) -$$

$$- \int_{\partial\Omega} g(\zeta - z)(-1)^{q+1} \overline{\partial}\gamma(\zeta) \wedge W_{0,q}(\zeta, z) - \overline{\partial} \int_{\Omega} \gamma(\zeta) \wedge U_{0,q-1}(\zeta - z) = \chi_\Omega \gamma(z)$$

(см. доказательство в [7], теорема 1). $\square$

Следствие 1. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ с кусочно-гладкой границей, форма $\gamma \in \mathcal{G}(\Lambda^{p,q}, \Omega)$ и $\gamma \in C^1(\Lambda^{p,q}, \overline{\Omega})$, тогда

$$\int_{\partial\Omega} \gamma(\zeta) \wedge U_{p,q}(\zeta - z) - \int_{\partial\Omega} g(\zeta - z) * \overline{\partial}\gamma(\zeta) \wedge \iota_{p,q}(\zeta, z) - \overline{\partial} \int_{\Omega} \gamma(\zeta) \wedge U_{p,q-1}(\zeta - z) = \chi_\Omega \gamma(z). \quad (13)$$

Формула (13) была приведена при $p = q = 0$ Бохнером [8] при выводе интегрального представления Бохнера–Мартинелли.

Приведем в случае $0 \le p \le n$ аналог формулы Грина на основе ядра многомерного логарифмического вычета для когомологий Дольбо.

Обозначим через E_Ω разность по Минковскому $\{\zeta - z : \zeta, z \in \Omega\}$. Пусть U — область голоморфности, $E_\Omega \subset U$. Рассмотрим голоморфное отображение

$$\psi(w) = (\psi_1(w), \ldots, \psi_n(w)) : U \to \mathbb{C}^n,$$

имеющее в U единственный нуль $w = 0$ кратности μ, т. е. $\psi(0) = 0$ и $\psi(w) \ne 0$ при $w \ne 0$.

Теорема 2. *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ с кусочно-гладкой границей и форма $\gamma \in C^2(\Lambda^{p,q}, \overline{\Omega})$, тогда*

$$\int_{\partial\Omega} \gamma(\zeta) \wedge U_{p,q}(\psi(\zeta - z)) + \int_{\Omega} g(\psi(\zeta - z)) \partial_\zeta \mu^\psi_{p,q,\gamma}(\zeta, z) -$$
$$- \int_{\partial\Omega} g(\psi(\zeta - z)) \mu^\psi_{p,q,\gamma}(\zeta, z) - \overline{\partial} \int_{\Omega} \gamma(\zeta) \wedge U_{p,q-1}(\psi(\zeta - z)) = \mu \chi_\Omega \gamma(z). \quad (14)$$

(*Интегралы по области Ω сходятся абсолютно.*) *Здесь $U_{p,q}(\psi(\zeta - z))$ — ядро многомерного логарифмического вычета [7], а $g(\zeta)$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа, χ_Ω — характеристическая функция области Ω,*

$$\mu^\psi_{p,q,\gamma}(\zeta, z) = {\sum_{|L|=p}}' \; {\sum_{M \cup k = J \cup l}}' \; \sum_{r=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \gamma_{L,M}}{\partial \overline{\zeta}_k} A^r_m(\zeta - z) \overline{A^l_m(\zeta - z)} \sigma(J, l) \times$$
$$\times \sigma(M, k) (-1)^{r-1} (-1)^n d\overline{\zeta} \wedge d\zeta[r] d\overline{z}_J \wedge dz_L,$$

где A^j_m — алгебраические дополнения к элементам матрицы Якоби $\left\| \frac{\partial \psi_m}{\partial \zeta_j} \right\|^n_{m,j=1}$.

Доказательство. В силу аддитивности операторов формулу (14) достаточно доказать для форм вида (9). Имеем

$$\mu^\psi_{p,q,\gamma}(\zeta, z) = \mu^\psi_{0,q,f\, d\overline{\zeta}_M}(\zeta, z) \wedge dz_L, \quad (15)$$

а

$$\partial_\zeta \mu^\psi_{p,q,\gamma}(\zeta, z) = {\sum_{M \cup k = J \cup l}}' \; \sum_{r=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta_r \partial \overline{\zeta}_k} A^r_m(\zeta - z) \overline{A^l_m(\zeta - z)} \sigma(J, l) \sigma(M, k) d\overline{\zeta} \wedge d\zeta \, d\overline{z}_J \wedge dz_L =$$
$$= \partial_\zeta \mu^\psi_{0,q,f\, d\overline{\zeta}_M}(\zeta, z) \wedge dz_L = (-1)^{q+1} \partial \overline{\partial}(f \, d\overline{\zeta}_M) \wedge W^\psi_{0,q}(\zeta, z) \wedge dz_L, \quad (16)$$

где

$$W^\psi_{0,q}(\zeta, z) = (-1)^{n+q-1} {\sum_{|J|=q}}' \; \sum_{\substack{l=1 \\ l \notin J}}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} (-1)^{j-1} \sigma(J, l) A^j_m(\zeta - z) \overline{A^l_m(\zeta - z)} d\overline{\zeta}[J, l] \wedge d\zeta[j] \, d\overline{z}_J.$$

В ([7], лемма 5) доказано равенство

$$\gamma(\zeta) \wedge U_{p,q}(\psi(\zeta - z)) = f(\zeta) \, d\overline{\zeta}_M \wedge U_{0,q}(\psi(\zeta - z)) \wedge dz_L. \quad (17)$$

Поэтому формулу (14) достаточно доказать для $p=0$. В этом случае справедливо интегральное представление

$$\int_{\partial\Omega}\gamma(\zeta)\wedge U_{0,q}(\psi(\zeta-z))+\int_{\Omega}g(\psi(\zeta-z))(-1)^{q+1}\partial\overline{\partial}\gamma(\zeta)\wedge W^{\psi}_{0,q}(\zeta,z)-$$
$$-\int_{\partial\Omega}g(\psi(\zeta-z))\mu^{\psi}_{0,q,\gamma}(\zeta,z)-\overline{\partial}\int_{\Omega}\gamma(\zeta)\wedge U_{0,q-1}(\psi(\zeta-z))=\mu\chi_{\Omega}\gamma(z)$$

(см. доказательство в [7], теорема 2). $\square$

Следствие 2. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ с кусочно-гладкой границей, форма γ принадлежит классу форм со свойством (7) и $\gamma\in C^1(\Lambda^{p,q},\overline{\Omega})$, тогда

$$\int_{\partial\Omega}\gamma(\zeta)\wedge U_{p,q}(\psi(\zeta-z))-\int_{\partial\Omega}g(\psi(\zeta-z))\mu^{\psi}_{p,q,\gamma}(\zeta,z)-\overline{\partial}\int_{\Omega}\gamma(\zeta)\wedge U_{p,q-1}(\psi(\zeta-z))=\mu\chi_{\Omega}\gamma(z). \tag{18}$$

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$, $\Gamma=\{z:\varrho(z)=0\}$. Обозначим $\Omega^-=\{z\in\Omega:\varrho(z)<0\}$, $\Omega^+=\Omega\setminus\{\Omega^-\cup\Gamma\}$. Гиперповерхность $\Gamma\in C^\infty$, т. е. $\varrho\in C^\infty(\Omega)$ и $d\varrho\neq 0$ на Γ, ϱ — вещественная функция.

Предложение 2. *Пусть $f\in \mathrm{Harm}^f(\Lambda^{p,q},\Omega^+)$, тогда определены касательная часть f_τ на Γ формы f и нормальная часть $(\overline{\partial}f)_n$ — на Γ.*

Поскольку для коэффициентов дифференциальной формы $f\in\mathrm{Harm}^f(\Lambda^{p,q})$, существуют граничные значения и при дифференцировании гармонических функций сохраняется свойство конечного порядка роста, то предложение 2 следует из [9].

Пусть теперь Ω — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ с гладкой границей, $\Gamma=\partial\Omega$, $\Gamma=\{z:\varrho(z)=0\}$. Обозначим $\Omega^-=\mathbb{C}^n\setminus\{\Omega\cup\Gamma\}$ и считаем $\Omega=\Omega^+$.

Согласно предложению 2 применением равенства (13) к области $\Omega_\varepsilon=\{z\in\mathbb{C}^n:\varrho(z)>\varepsilon\}$, переходом к пределу при $\varepsilon\to+0$ получим

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\partial\Omega_\varepsilon}f(\zeta)\wedge U_{p,q}(\zeta-z)-\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\partial\Omega_\varepsilon}g(\zeta-z)*\overline{\partial}f(\zeta)\wedge\iota_{p,q}(\zeta,z)-$$
$$-\lim_{\varepsilon\to+0}\overline{\partial}\int_{\Omega_\varepsilon}f(\zeta)\wedge U_{p,q-1}(\zeta-z)=\chi_{\Omega}f(z), \tag{19}$$

если f удовлетворяет условию $\overline{\partial}^*\overline{\partial}f=0$ в Ω, имеет конечный порядок роста вблизи $\partial\Omega$ и гармонические коэффициенты в Ω.

Введем дифференциальную форму $V_{p,q+1}(\zeta,z)$, полагая

$$V_{p,q+1}(\zeta,z)=\frac{(-1)^{p(n-q-1)}}{2}\sum_{|I|=p}{}'\sum_{G\cup k=J}{}'\sigma(I)\sigma(J)g(\zeta,z)d\overline{\zeta}[J]\wedge d\zeta[I]d\overline{z}_J\wedge dz_I.$$

Лемма. *Имеет место равенство $\overline{\partial}^*_z V_{p,q+1}(\zeta,z)=U_{p,q}(\zeta-z)$, где $U_{p,q}(\zeta-z)$ — ядро Коппельмана–Бохнера–Мартинелли.*

Лемма для случая $p=0$ доказана в [10].

Заметим, что поскольку ядро Коппельмана–Бохнера–Мартинелли имеет гармонические коэффициенты, то из леммы следует

$$0=\Box U_{p,q}=\overline{\partial}^*\overline{\partial}U_{p,q}+\overline{\partial}\,\overline{\partial}^*U_{p,q}=\overline{\partial}^*\overline{\partial}U_{p,q}+\overline{\partial}\,\overline{\partial}^*\overline{\partial}^*V_{p,q+1}=\overline{\partial}^*\overline{\partial}U_{p,q},$$

т. е. $\overline{\partial}^*\overline{\partial}U_{p,q}=0$, как отмечалось в [1]. Отсюда также следует, что $\overline{\partial}\,\overline{\partial}^*U_{p,q}=0$.

Пусть $M_{p,q}F$ — оператор Коппельмана, т. е. $(M_{p,q}F)(z)=\int\limits_{\partial\Omega}F(\zeta)\wedge U_{p,q}(\zeta-z)$, $z\notin\partial\Omega$ $(n>1)$. Будем писать $M^+_{p,q}F$ или $M^-_{p,q}F$, в зависимости от того, рассматривается ли оператор $M_{p,q}F$ в Ω или вне $\overline{\Omega}$.

Теорема 3. *Пусть F удовлетворяет условию $\overline{\partial}^*\overline{\partial}F = 0$ в Ω, $F \in C^1(\Lambda^{p,q}, \overline{\Omega})$ (форма с гармоническими коэффициентами, имеющая конечный порядок роста при подходе к $\partial\Omega$) и $\partial\Omega$ кусочно-гладкая (класса C^∞). Для того чтобы $(\overline{\partial}F)_n = 0$ на $\partial\Omega$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$M^+_{p,q}F - \overline{\partial}\int_\Omega F(\zeta) \wedge U_{p,q-1}(\zeta - z) = F(z) \tag{20}$$

в Ω (т. е. F представлялась интегралом Коппельмана с точностью до $\overline{\partial}$-точного слагаемого).

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $F \in C^1(\Lambda^{p,q}, \overline{\Omega})$ и $\partial\Omega$ кусочно-гладкая. Тогда выполняется аналог формулы Грина для форм с гладкими коэффициентами (13).

Если $(\overline{\partial}F)_n = 0$, то из (13) следует, что выполняется равенство (20). Если выполняется равенство (20), то из формулы (13) получаем

$$\int_{\partial\Omega} g(\zeta - z) * \overline{\partial}F \wedge \iota_{p,q}(\zeta, z) = 0,$$

когда $z \in \Omega$. По теореме Айзенберга–Даутова ([1], с. 34)

$$0 = \left(M^-_{p,q}F - \overline{\partial}\int_\Omega F(\zeta) \wedge U_{p,q-1}(\zeta - z)\right)_\tau = \left(\int_{\partial\Omega} g(\zeta - z) * \overline{\partial}F \wedge \iota_{p,q}(\zeta, z)\right)_\tau =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{(\partial\Omega_{-\varepsilon})_z}\int_{\partial\Omega_\zeta} g(\zeta - z) * \overline{\partial}F \wedge \iota_{p,q}(\zeta, z) \wedge \chi(z) = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\partial\Omega_\zeta} *\overline{\partial}F\ u(\zeta)\int_{(\partial\Omega_{-\varepsilon})_z} \iota_{p,q}(\zeta, z) \wedge \chi(z),$$

где $(\alpha)_\tau$ — касательная часть формы α на $\partial\Omega$, $\chi \in C(\Lambda^{n-p,n-q-1}, \mathbb{C}^n)$. Здесь применялась теорема Келдыша–Лаврентьева (напр., [11], с. 418) о плотности дробей вида $g(\zeta - z)$ в пространстве функций $C(K)$ ($\Lambda^{2n}(K) = 0$). Интегралы можно менять местами, т. к. подинтегральные выражения непрерывны по совокупности переменных. Отсюда получаем $(\overline{\partial}F)_n = 0$ на $\partial\Omega$.

Пусть теперь F — форма с гармоническими коэффициентами, удовлетворяющая условию $\overline{\partial}^*\overline{\partial}F = 0$ в Ω и имеющая конечный порядок роста при подходе к $\partial\Omega$. Тогда для нее будет справедлива формула

$$\langle F, U_{p,q}(\zeta - z)\rangle - \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\partial\Omega_\varepsilon} g(\zeta - z) * \overline{\partial}F(\zeta) \wedge \iota_{p,q}(\zeta, z) -$$
$$- \lim_{\varepsilon\to+0}\overline{\partial}\int_{\Omega_\varepsilon} F(\zeta) \wedge U_{p,q-1}(\zeta - z) = \chi_\Omega F(z), \tag{21}$$

где $\langle F, U_{p,q}(\zeta - z)\rangle = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon} F(\zeta) \wedge U_{p,q}(\zeta - z)$.

Если $(\overline{\partial}F)_n = 0$ на $\partial\Omega$, то

$$\langle F, U_{p,q}(\zeta - z)\rangle - \lim_{\varepsilon\to+0}\overline{\partial}\int_{\Omega_\varepsilon} F(\zeta) \wedge U_{p,q-1}(\zeta - z) = F(z) \tag{22}$$

в Ω. Если выполняется равенство (22), то

$$\langle *\overline{\partial}F, g(\zeta - z)\iota_{p,q}(\zeta, z)\rangle = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\partial\Omega_\varepsilon} g(\zeta - z) * \overline{\partial}F(\zeta) \wedge \iota_{p,q}(\zeta, z) = 0$$

для $z \in \Omega$. Следовательно,

$$0 = \left(\langle F, U_{p,q}(\zeta - z)\rangle - \lim_{\varepsilon\to+0}\overline{\partial}\int_{\Omega_\varepsilon} F(\zeta) \wedge U_{p,q-1}(\zeta - z)\right)_\tau = (\langle *\overline{\partial}F, g(\zeta - z)\iota_{p,q}(\zeta, z)\rangle)_\tau =$$
$$= \lim_{\delta\to+0}\int_{(\partial\Omega_{-\delta})_z}\langle *\overline{\partial}F, g(\zeta - z)\iota_{p,q}(\zeta, z)\rangle \wedge \chi(z) = \lim_{\delta\to+0}\Big\langle *\overline{\partial}F, u(\zeta)\int_{(\partial\Omega_{-\delta})_z}\iota_{p,q}(\zeta, z) \wedge \chi(z)\Big\rangle,$$

$\chi \in C^\infty(\Lambda^{n-p,n-q-1}, \mathbb{C}^n)$, т. к. по лемме 14.2 из ([1], с. 158) линейные комбинации дробей $g(\zeta - z)$ плотны в $C^\infty(\partial\Omega)$, интегралы можно менять местами. Поскольку подинтегральные выражения непрерывны по совокупности переменных, то $(\overline{\partial}F)_n = 0$ на $\partial\Omega$. $\square$

Пусть $L_{p,q}F$ — оператор Коппельмана с ядром логарифмического вычета, т. е. $(L_{p,q}F)(z) = \int\limits_{\partial\Omega} F(\zeta) \wedge U_{p,q}(\psi(\zeta - z))$, $z \notin \partial\Omega$ $(n > 1)$. Будем писать $L^+_{p,q}F$ или $L^-_{p,q}F$ в зависимости от того, рассматривается ли оператор $L_{p,q}F$ в Ω или вне $\overline{\Omega}$.

Теорема 4. *Пусть F принадлежит классу форм со свойством* (7) *в Ω, $F \in C^1(\Lambda^{p,q}, \overline{\Omega})$* (*форма с гармоническими коэффициентами, имеющая конечный порядок роста при подходе к $\partial\Omega$*) *и $\partial\Omega$ кусочно-гладкая* (*класса C^∞*). *Для того чтобы $(\overline{\partial}F)_n = 0$ на $\partial\Omega$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$L^+_{p,q}F - \overline{\partial} \int_\Omega F(\zeta) \wedge U_{p,q-1}(\psi(\zeta - z)) = \mu F(z) \tag{23}$$

в Ω (*т. е. F представлялась интегралом Коппельмана на основе логарифмического вычета с точностью до $\overline{\partial}$-точного слагаемого*).

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $F \in C^1(\Lambda^{p,q}, \overline{\Omega})$ и $\partial\Omega$ кусочно-гладкая. Тогда выполняется аналог формулы Грина на основе ядра многомерного логарифмического вычета для форм с гладкими коэффициентами (18). Используя предложение 7.1 из [12] о плотности дробей вида

$$\sum_{m=1}^n g(\psi(\zeta - z^s))\overline{A^r_m}(\zeta - z^s)A^k_m(\zeta - z^s), \quad r, k = 1, 2, \ldots, n, \quad z^s \notin \partial\Omega, \tag{24}$$

в пространстве функций $C(\partial\Omega)$, получаем

$$\mu^\psi_{p,q,F}(\zeta, z)|_{\partial\Omega} g(\psi(\zeta - z)) = *\overline{\partial}F \wedge \iota_{p,q}(\zeta, z)|_{\partial\Omega} u(\zeta) \tag{25}$$

для произвольной функции $u \in C(\partial\Omega)$.

Если $(\overline{\partial}F)_n = 0$ на $\partial\Omega$, то из (18), (25) следует (23). Если выполняется равенство (23), то $\int\limits_{\partial\Omega} g(\psi(\zeta - z))\mu^\psi_{p,q,F}(\zeta, z) = 0$ для $z \in \Omega$. По теореме 5 из [7], используя равенство (25), получим

$$0 = \left(L^-_{p,q}F - \overline{\partial} \int_\Omega F(\zeta) \wedge U_{p,q-1}(\psi(\zeta - z))\right)_\tau = \left(\int_{\partial\Omega} g(\psi(\zeta - z))\mu^\psi_{p,q,F}(\zeta, z)\right)_\tau =$$
$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{(\partial\Omega_{-\varepsilon})_z} \int_{\partial\Omega_\zeta} g(\psi(\zeta - z))\mu^\psi_{p,q,F}(\zeta, z) \wedge \chi(z) =$$
$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{(\partial\Omega_{-\varepsilon})_z} \int_{\partial\Omega_\zeta} u(\zeta) * \overline{\partial}F \wedge \iota_{p,q}(\zeta, z) \wedge \chi(z) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\partial\Omega_\zeta} *\overline{\partial}F\ u(\zeta) \int_{(\partial\Omega_{-\varepsilon})_z} \iota_{p,q}(\zeta, z) \wedge \chi(z).$$

Интегралы можно менять местами, поскольку подинтегральные выражения непрерывны по совокупности переменных. Следовательно, $(\overline{\partial}F)_n = 0$ на $\partial\Omega$.

Пусть теперь F — форма с гармоническими коэффициентами, принадлежащая классу форм, удовлетворяющих равенству (7) в Ω, имеющая конечный порядок роста при подходе к $\partial\Omega$. Используя аналог формулы Грина на основе логарифмического вычета, получаемый из формулы (18) для областей Ω_ε применением предельного перехода, формулу (25) и предложение 2, имеем

$$\langle F, U_{p,q}(\psi(\zeta - z))\rangle - \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} g(\psi(\zeta - z))\mu^\psi_{p,q,F}(\zeta, z) -$$
$$- \lim_{\varepsilon \to +0} \overline{\partial} \int_{\Omega_\varepsilon} F(\zeta) \wedge U_{p,q-1}(\psi(\zeta - z)) = \begin{cases} \mu F(z), & \text{если } z \in \Omega; \\ 0, & \text{если } z \notin \overline{\Omega}, \end{cases} \tag{26}$$

где

$$\langle F, U_{p,q}(\psi(\zeta - z))\rangle = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\partial\Omega_\varepsilon} F(\zeta)\wedge U_{p,q}(\psi(\zeta - z)).$$

Если $(\overline{\partial}F)_n = 0$ на $\partial\Omega$, то из (25) ясно, что

$$\langle F, U_{p,q}(\psi(\zeta - z))\rangle - \lim_{\varepsilon\to+0}\overline{\partial}\int_{\Omega_\varepsilon} F(\zeta)\wedge U_{p,q-1}(\psi(\zeta - z)) = \mu F(z) \tag{27}$$

в Ω. Если выполняется равенство (27), то

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\partial\Omega_\varepsilon} g(\psi(\zeta - z))\mu^{\psi}_{p,q,F}(\zeta, z) = 0$$

для $z\in\Omega$. Следовательно, используя равенство (25) для произвольной функции $C^\infty(\partial\Omega_\varepsilon)$, получим

$$\begin{aligned}0 = \Big(\langle F, U_{p,q}(\psi(\zeta-z))\rangle - \lim_{\varepsilon\to+0}\overline{\partial}\int_{\Omega_\varepsilon} F(\zeta)\wedge U_{p,q-1}(\psi(\zeta-z))\Big)_\tau = \Big(\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\partial\Omega_\varepsilon} g(\psi(\zeta-z))\mu^{\psi}_{p,q,F}(\zeta,z)\Big)_\tau =\\
= \lim_{\delta\to+0}\int_{(\partial\Omega_{-\delta})_z}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{(\partial\Omega_\varepsilon)_\zeta} g(\psi(\zeta - z))\mu^{\psi}_{p,q,F}(\zeta, z)\wedge\chi(z) =\\
= \lim_{\delta\to+0}\int_{(\partial\Omega_{-\delta})_z}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{(\partial\Omega_\varepsilon)_\zeta} u(\zeta) * \overline{\partial}F\wedge\iota_{p,q}(\zeta, z)\wedge\chi(z) =\\
= \lim_{\delta\to+0}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{(\partial\Omega_\varepsilon)_\zeta} *\overline{\partial}F\ u(\zeta)\int_{(\partial\Omega_{-\delta})_z}\iota_{p,q}(\zeta, z)\wedge\chi(z).\end{aligned}$$

Интегралы можно менять местами, поскольку подинтегральные выражения непрерывны по совокупности переменных. Отсюда имеем $(\overline{\partial}F)_n = 0$ на $\partial\Omega$. $\square$

Теорема 5. *Пусть Ω — ограниченная область с кусочно-гладкой* (*соответственно класса* C^2) *границей $\partial\Omega$ и $F\in C^1(\Lambda^{p,q},\overline{\Omega})$* (*соответственно $C(\Lambda^{p,q},\overline{\Omega})$*). *Для того чтобы $F\in Z(\Lambda^{p,q},\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (20) *в Ω.*

Доказательство. Необходимость следует из интегрального представления Коппельмана.

Достаточность. Если $F(z) = M^{+}_{p,q}F - \overline{\partial}\int\limits_{\Omega} F(\zeta)\wedge U_{p,q-1}(\zeta - z)$ в Ω, то $\overline{\partial}^*\overline{\partial}F(z) = \overline{\partial}^*\overline{\partial}M^{+}_{p,q}F = \int\limits_{\partial\Omega} F(\zeta)\wedge\overline{\partial}^*_z\overline{\partial}_z U_{p,q}(\zeta - z) = 0$ в Ω. Из теоремы 3 получаем $(\overline{\partial}F)_n = 0$ на $\partial\Omega$. Тогда

$$\begin{aligned}0 = \int_{\partial\Omega}\overline{F}\wedge *\overline{\partial}F = \int_{\Omega}\partial\overline{F}\wedge *\overline{\partial}F + (-1)^{p+q}\int_{\Omega}\overline{F}\wedge\partial * \overline{\partial}F =\\
= \|\partial\overline{F}\|^2 + (-1)^{p+q}\int_{\Omega}\overline{F}\wedge\partial * \overline{\partial}F = \|\partial\overline{F}\|^2\end{aligned} \tag{28}$$

$\Big($соответственно

$$0 = \langle\overline{F}, *\overline{\partial}F\rangle = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\partial\Omega_\varepsilon}\overline{F}\wedge *\overline{\partial}F = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\Omega_\varepsilon}\partial\overline{F}\wedge *\overline{\partial}F\Big), \tag{29}$$

поскольку $*\partial*\overline{\partial}F = -\overline{\partial}^*\overline{\partial}F = 0$.

Следовательно, из равенства (28) (соответственно (29)) вытекает $\|\overline{\partial}F\| = 0$, т. е. $\overline{\partial}F = 0$ в Ω. $\square$

Эта теорема для функций $F\in C^\infty(\overline{D})$ приведена в [13], распространена на функции класса C^1 в [14], на дифференциальные формы с коэффициентами класса C^2, $C^{1,\lambda}$ в ([1], с. 164; [2]).

Теорема 6. *Пусть Ω — ограниченная область с кусочно-гладкой (соответственно класса C^2) границей $\partial\Omega$ и $F \in C^1(\Lambda^{p,q}, \overline{\Omega})$ (соответственно $C(\Lambda^{p,q}, \overline{\Omega})$). Для того чтобы $F \in Z(\Lambda^{p,q}, \Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство (23) в Ω и F принадлежала классу форм, удовлетворяющих условию (7).*

Доказательство. Необходимость следует из интегрального представления Коппельмана на основе логарифмического вычета и того, что $\overline{\partial}$-замкнутые формы принадлежат классу форм, удовлетворяющих условию (7).

Достаточность. Из теоремы 4 получаем $(\overline{\partial}F)_n = 0$ на $\partial\Omega$. Тогда из теорем 3 и 5 следует, что форма F является $\overline{\partial}$-замкнутой в Ω. $\square$

Заметим, что в этих утверждениях не предполагается связности границы области Ω.

Будем обозначать подпространство $\mathcal{G}^1(\Lambda^{p,q}, \Omega)$ через

$$\mathcal{G}^1_0(\Lambda^{p,q}, \Omega) = \{H \in \mathcal{G}^1(\Lambda^{p,q}, \Omega) : \mathrm{Im}(\overline{\partial}H)_n = 0 \text{ на } \partial\Omega\}.$$

Пусть $\mathrm{Ph}^1_0(\Lambda^{p,q}, \Omega) = \{H \in \mathrm{Ph}^1(\Lambda^{p,q}, \Omega) : \mathrm{Im}(\overline{\partial}H)_n = 0 \text{ на } \partial\Omega\}$, ${\mathrm{Ph}'}^1_0(\Lambda^{p,q}, \Omega) = \{H \in {\mathrm{Ph}'}^1(\Lambda^{p,q}, \Omega) : \mathrm{Im}(\overline{\partial}H)_n = 0 \text{ на } \partial\Omega\}$.

Введем подпространства $\mathcal{G}^f_0(\Lambda^{p,q}, \Omega) = \{H \in \mathcal{G}^f(\Lambda^{p,q}, \Omega) : \mathrm{Im}(\overline{\partial}H)_n = 0 \text{ на } \partial\Omega\}$, $\mathrm{Ph}^f_0(\Lambda^{p,q}, \Omega) = \{H \in \mathrm{Ph}^f(\Lambda^{p,q}, \Omega) : \mathrm{Im}(\overline{\partial}H)_n = 0 \text{ на } \partial\Omega\}$, ${\mathrm{Ph}'}^f_0(\Lambda^{p,q}, \Omega) = \{H \in {\mathrm{Ph}'}^f(\Lambda^{p,q}, \Omega) : \mathrm{Im}(\overline{\partial}H)_n = 0 \text{ на } \partial\Omega\}$.

Дадим описание пространства форм из $\mathcal{G}^1_0(\Lambda^{p,q}, \Omega)$ в терминах преобразования Коппельмана.

Предложение 3. *Пусть $p \neq q+1$, а $\partial\Omega$ — кусочно-гладкая граница. Тогда форма $F \in \mathcal{G}^1(\Lambda^{p,q}, \Omega)$ принадлежит $F \in \mathcal{G}^1_0(\Lambda^{p,q}, \Omega)$ тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{Im}\, M_{p,q}F - \mathrm{Im}\,\overline{\partial} \int_\Omega F(\zeta) \wedge U_{p,q-1}(\zeta - z) = \mathrm{Im}\, F(z) \tag{30}$$

в Ω.

Доказательство. Адаптируем доказательство теоремы 3. Пусть $J \neq L$. Имеем $\mathrm{Im}(*\overline{\partial}F \wedge \iota_{p,q}(\zeta, z)|_{\partial\Omega} g(\zeta - z)) = 0$, если

$$\sum_{M \cup k = J \cup l}' \frac{\partial F_{L,M}}{\partial \overline{\zeta}_k} \sigma(M,k)\sigma(J,l)\rho_l = 0 \quad \forall |L| = p, \quad |J| = q, \tag{31}$$

где $\varrho_k = \frac{\partial \varrho}{\partial \zeta_k} / |\mathrm{grad}\, \varrho|$ (здесь использована лемма 3.5 из [1], с. 30). Пусть $J = L$. Имеем $\mathrm{Im}(*\overline{\partial}F \wedge \iota_{p,q}(\zeta, z)|_{\partial\Omega} g(\zeta, z)) = 0$, если

$$\sum_{M \cup k = L \cup l}' \left(\frac{\partial F_{L,M}}{\partial \overline{\zeta}_k} \rho_l - (-1)^p \overline{\frac{\partial F_{L,M}}{\partial \overline{\zeta}_k} \rho_l} \right) \sigma(M,k)\sigma(L,l) = 0 \quad \forall |L| = p. \tag{32}$$

Пусть $q \neq p$ и $p \neq q+1$. Рассмотрим

$$*\overline{\partial}F \wedge \frac{\alpha + \overline{\alpha}}{2}\Big|_{\partial\Omega} = *\overline{\partial}F \wedge \frac{\overline{\alpha}}{2}\Big|_{\partial\Omega} = 2^{p+q-1} \sum_{|L|=p}' \sum_{M \cup k = J \cup l}' \frac{\partial F_{L,M}}{\partial \overline{\zeta}_k} \sigma(M,k)\sigma(J,l)\rho_l d\sigma \overline{\alpha_{L,J}} = 0. \tag{33}$$

Следовательно, $\mathrm{Im}(\overline{\partial}F)_n = 0$ на $\partial\Omega$, если выполняется равенство (31). Если $p = q$, то

$$*\overline{\partial}F \wedge \frac{\alpha + \overline{\alpha}}{2}\Big|_{\partial\Omega} = * \sum_{|L|=p,\ |M|=p}' \sum_{k=1 k \notin M}^{n} \frac{\partial F_{L,M}}{\partial \overline{\zeta}_k} d\zeta_L \wedge d\overline{\zeta}_k \wedge d\overline{\zeta}_M \wedge$$

$$\wedge \frac{1}{2} \Big(\sum_{|I|=p, |J|=p}' \alpha_{I,J} d\overline{\zeta}_J \wedge d\zeta_I + \sum_{|I|=p, |J|=p}' \overline{\alpha}_{I,J} d\zeta_J \wedge d\overline{\zeta}_I)|_{\partial\Omega} =$$

$$= \sum_L' \sum_{M \cup k = I \cup l}' \frac{\partial F_{L,M}}{\partial \overline{\zeta}_k} (-1)^p 2^{2p-1} \sigma(M,k)\sigma(I,l)\varrho_l d\sigma \alpha_{I,L} +$$

$$+\sum_{L}{}' \sum_{M\cup k=J\cup l}{}' \frac{\partial F_{L,M}}{\partial\overline{\zeta}_k} 2^{2p-1}\sigma(M,k)\sigma(J,l)\varrho_l d\sigma\overline{\alpha}_{L,J}=0, \tag{34}$$

если выполняется равенство (31).

Следовательно, $\mathrm{Im}(\overline{\partial}F)_n=0$ на $\partial\Omega$ при $J\neq L$, если выполняется равенство (31); при $J=L$ $\mathrm{Im}(\overline{\partial}F)_n=0$ на $\partial\Omega$, если выполняется равенство (32). Если $p=q+1$, то

$$*\overline{\partial}F\wedge\frac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}\Big|_{\partial\Omega}=\sum_{J\cup l=L}{}' \sum_{M\cup k=I}{}' \frac{\partial F_{L,M}}{\partial\overline{\zeta}_k}(-1)^{q+1}2^{2q}\sigma(M,k)\sigma(L)\sigma(I)\sigma(J,l)\varrho_{\overline{l}}d\sigma\alpha_{I,J}+$$
$$+\sum_{L}{}' \sum_{M\cup k=J\cup l}{}' \frac{\partial F_{L,M}}{\partial\overline{\zeta}_k}2^{2q}\sigma(M,k)\sigma(J,l)\varrho_l d\sigma\overline{\alpha}_{L,J}=0, \tag{35}$$

если

$$\begin{gathered}\sum_{J\cup l=L}{}' \sum_{M\cup k=I}{}' \frac{\partial F_{L,M}}{\partial\overline{\zeta}_k}\sigma(M,k)\sigma(L)\sigma(J,l)\varrho_{\overline{l}}=0 \quad \forall |I|=q+1,\quad |J|=q,\\ \sum_{M\cup k=J\cup l}{}' \frac{\partial F_{L,M}}{\partial\overline{\zeta}_k}\sigma(M,k)\sigma(J,l)\varrho_l=0 \quad \forall |L|=q+1,\quad |J|=q.\end{gathered} \tag{36}$$

Следовательно, при $I\neq L$ $\mathrm{Im}(\overline{\partial}F)_n=0$, если выполняются равенства (36).

Пусть $I=L$. Имеем $\mathrm{Im}(\overline{\partial}F)_n=0$, если выполняются равенства

$$\sum_{J\cup l=L=M\cup k}{}' (-1)^{q+1}\frac{\partial F_{L,M}}{\partial\overline{\zeta}_k}\varrho_{\overline{l}}\sigma(M,k)\sigma(J,l)-$$
$$-\sum_{L}{}' \sum_{M\cup k=J\cup l}{}' \overline{\frac{\partial F_{L,M}}{\partial\overline{\zeta}_k}}\varrho_l\sigma(M,k)\sigma(J,l)=0 \quad \forall |L|=q+1,\quad |J|=q. \tag{37}$$

Если $\mathrm{Im}(\overline{\partial}F)_n=0$ на $\partial\Omega$, то из (13), (31) и (32) следует, что выполняется равенство (30). Обратно, если предположим, что выполняется равенство (30), то

$$\mathrm{Im}\int_{\partial\Omega} g(\zeta-z)*\overline{\partial}F\wedge\iota_{p,q}(\zeta,z)=0$$

для $z\in\Omega$. По теореме Айзенберга–Даутова ([1], с. 34)

$$0=\mathrm{Im}\left(M_{p,q}F-\overline{\partial}\int_{\Omega}F(\zeta)\wedge U_{p,q-1}(\zeta-z)\right)_{\tau}=\mathrm{Im}\left(\int_{\partial\Omega}g(\zeta-z)*\overline{\partial}F\wedge\iota_{p,q}(\zeta,z)\right)_{\tau}=$$
$$=\mathrm{Im}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{(\partial\Omega_{-\varepsilon})_z}\int_{\partial\Omega_\zeta}g(\zeta-z)*\overline{\partial}F\wedge\iota_{p,q}(\zeta,z)\wedge\chi(z)=\mathrm{Im}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\partial\Omega_\zeta}*\overline{\partial}F\, i^n u(\zeta)\int_{(\partial\Omega_{-\varepsilon})_z}\iota_{p,q}(\zeta,z)\wedge\chi(z),$$

где $\chi\in C(\Lambda^{n-p,n-q-1}+\Lambda^{n-q-1,n-p},\mathbb{C}^n)$, $\mathrm{Im}\,\chi=0$. Здесь была применена теорема Келдыша–Лаврентьева ([11], с. 418) о плотности дробей вида $g(\zeta-z)$ в пространстве функций $i^n u\in C(K)$ ($\Lambda^{2n}(K)=0$), где u — действительнозначная функция. Отсюда получаем $\mathrm{Im}(\overline{\partial}F)_n=0$ на $\partial\Omega$. □

Пусть $N_{p,q}$ — действительный линейный оператор, определенный для $F\in\mathcal{G}^1(\Lambda^{p,q},\Omega)$ соотношением

$$N_{p,q}(F)=\mathrm{Re}(F)+i\,\mathrm{Im}(M_{p,q}F)-i\,\mathrm{Im}\,\overline{\partial}\int_{\Omega}F(\zeta)\wedge U_{p,q-1}(\zeta-z).$$

Заметим, что ввиду предложения 3 $\mathcal{G}^1_0(\Lambda^{p,q},\Omega)$ есть множество $\mathrm{Fix}(N_{p,q}) = \{F\in\mathcal{G}^1(\Lambda^{p,q},\Omega):$ $N_{p,q}(F)=F\}$. Дадим описание пространства $\mathcal{G}^f_0(\Lambda^{p,q},\Omega)$ в терминах преобразования Коппельмана.

Предложение 4. *Пусть $p\neq q+1$, $\partial\Omega\in C^\infty$, а $F\in\mathcal{G}^f(\Lambda^{p,q},\Omega)\cap\mathrm{Harm}(\Lambda^{p,q},\Omega)$. Тогда $(\overline{\partial}F)_n$ является действительным в том и только том случае, когда*

$$\mathrm{Im}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\partial\Omega_\varepsilon} f(\zeta)\wedge U_{p,q}(\zeta-z) - \mathrm{Im}\lim_{\varepsilon\to+0}\overline{\partial}\int_{\Omega_\varepsilon} F\wedge U_{p,q-1}(\zeta-z) = \mathrm{Im}\,F \tag{38}$$

в Ω.

Доказательство. Необходимость. Если $\mathrm{Im}(\overline{\partial}F)_n=0$ на $\partial\Omega$, тогда из (31), (32) и (21) следует, что выполнено равенство (38).

Достаточность. Пусть выполнено равенство (38), тогда $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon} g(\zeta-z)*\overline{\partial}F(\zeta)\wedge\imath_{p,q}(\zeta,z)=0$ для $z\in\Omega$. Следовательно,

$$0=\mathrm{Im}\left(\langle F, U_{p,q}(\zeta-z)\rangle - \lim_{\varepsilon\to+0}\overline{\partial}\int_{\Omega_\varepsilon} F(\zeta)\wedge U_{p,q-1}(\zeta-z)\right)_\tau = \mathrm{Im}(\langle *\overline{\partial}F, g(\zeta-z)\iota_{p,q}(\zeta,z)\rangle)_\tau =$$

$$=\mathrm{Im}\lim_{\delta\to+0}\int_{(\partial\Omega_{-\delta})_z}\langle *\overline{\partial}F, g(\zeta-z)\iota_{p,q}(\zeta,z)\rangle\wedge\chi(z) = \mathrm{Im}\lim_{\delta\to+0}\Big\langle *\,\overline{\partial}F, i^n u(\zeta)\int_{(\partial\Omega_{-\delta})_z}\iota_{p,q}(\zeta,z)\wedge\chi(z)\Big\rangle,$$

т. к. по лемме 14.2 из ([1], с. 158) линейные комбинации дробей $g(\zeta-z)$ плотны в $C^\infty(\partial\Omega)$, поэтому имеем $\mathrm{Im}(\overline{\partial}F)_n=0$ на $\partial\Omega$. $\square$

Замечание. Предложение 3 (предложение 4) в случае гармонических функций (конечного порядка роста) получено в [15] ([16]).

Пусть $N_{p,q}$ — действительный линейный оператор, определенный для гармонических форм $F\in\mathcal{G}^f(\Lambda^{p,q},\Omega)$ соотношением

$$N_{p,q}(F)=\mathrm{Re}(F)+i\,\mathrm{Im}\langle F, U_{p,q}(\zeta-z)\rangle - i\,\mathrm{Im}\lim_{\varepsilon\to+0}\overline{\partial}\int_{\Omega_\varepsilon} F(\zeta)\wedge U_{p,q-1}(\zeta-z).$$

Согласно предложению 4 $\mathcal{G}^f_0(\Lambda^{p,q},\Omega)\cap\mathrm{Harm}(\Lambda^{p,q},\Omega)$ есть множество

$$\mathrm{Fix}(N_{p,q})=\{\mathcal{G}^f(\Lambda^{p,q},\Omega)\cap\mathrm{Harm}(\Lambda^{p,q},\Omega): N_{p,q}(F)=F\}.$$

Дадим описание пространства ${\mathrm{Ph}'}^1_0(\Lambda^{p,q},\Omega)$ в терминах преобразования Коппельмана на основе логарифмического вычета.

Предложение 5. *Пусть $p\neq q+1$, а $\partial\Omega$ — кусочно-гладкая граница. Тогда форма $F\in{\mathrm{Ph}'}^1(\Lambda^{p,q},\Omega)$ принадлежит ${\mathrm{Ph}'}^1_0(\Lambda^{p,q},\Omega)$ тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{Im}\,L_{p,q}F - \mathrm{Im}\,\overline{\partial}\int_\Omega F\wedge U_{p,q-1}(\psi(\zeta-z)) = \mu\,\mathrm{Im}\,F \tag{39}$$

в Ω.

Доказательство. Адаптируем доказательство теоремы 4. Используя предложение 7.1 из [12] о плотности дробей вида (24) в пространстве функций $C(\partial\Omega)$, получаем

$$\mu^\psi_{p,q,F}(\zeta,z)|_{\partial\Omega}\,g(\psi(\zeta-z)) = *\overline{\partial}F\wedge\iota_{p,q}(\zeta,z)|_{\partial\Omega}\,i^n u(\zeta), \tag{40}$$

где g — фундаментальное решение уравнения Лапласа, а $u \in C(\partial\Omega)$ — действительнозначная функция.

Если $\operatorname{Im}(\overline{\partial}F)_n = 0$, то из (18), (40), (31) и (32) следует, что выполнено равенство (39). Если выполнено равенство (39), то

$$\operatorname{Im}\int_{\partial\Omega} g(\psi(\zeta - z))\mu^{\psi}_{p,q,F}(\zeta, z) = 0$$

для $z \in \Omega$. По теореме 5 из [7]

$$0 = \operatorname{Im}\left(L_{p,q}F - \overline{\partial}\int_{\Omega} F(\zeta) \wedge U_{p,q-1}(\psi(\zeta - z))\right)_{\tau} = \operatorname{Im}\left(\int_{\partial\Omega} g(\psi(\zeta - z))\mu^{\psi}_{p,q,F}(\zeta, z)\right)_{\tau} =$$
$$= \operatorname{Im}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{(\partial\Omega_{-\varepsilon})_z}\int_{\partial\Omega_\zeta} g(\psi(\zeta - z))\mu^{\psi}_{p,q,F}(\zeta, z) \wedge \chi(z) =$$
$$= \operatorname{Im}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{(\partial\Omega_{-\varepsilon})_z}\int_{\partial\Omega_\zeta} i^n u(\zeta) * \overline{\partial}F \wedge \iota_{p,q}(\zeta, z) \wedge \chi(z) =$$
$$= \operatorname{Im}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\partial\Omega_\zeta} *\overline{\partial}F\ i^n u(\zeta)\int_{(\partial\Omega_{-\varepsilon})_z} \iota_{p,q}(\zeta, z) \wedge \chi(z),$$

применяя равенства (40), (31) и (32), получаем $\operatorname{Im}(\overline{\partial}F)_n = 0$ на $\partial\Omega$. $\square$

Пусть $N^{\psi}_{p,q}$ — действительный линейный оператор, определенный для $F \in \mathrm{Ph}'^1(\Lambda^{p,q}, \Omega)$ соотношением

$$N^{\psi}_{p,q}(F) = \mu\operatorname{Re}(F) + i\operatorname{Im}(L_{p,q}F) - i\operatorname{Im}\overline{\partial}\int_{\Omega} F(\zeta) \wedge U_{p,q-1}(\psi(\zeta - z)).$$

Ввиду предложения 5 $\mathrm{Ph}'^1_0(\Lambda^{p,q}, \Omega)$ есть множество $\mathrm{Fix}(N^{\psi}_{p,q}) = \{F \in \mathrm{Ph}'^1 : N^{\psi}_{p,q}(F) = \mu F\}$.

Дадим описание пространства $\mathrm{Ph}'^f_0(\Lambda^{p,q}, \Omega)$ в терминах преобразования Коппельмана на основе логарифмического вычета.

Предложение 6. *Пусть $p \neq q+1$, $\partial\Omega \in C^\infty$, а форма F с гармоническими коэффициентами принадлежит $\mathrm{Ph}'^f(\Lambda^{p,q}, \Omega)$. Тогда $(\overline{\partial}F)_n$ является действительной тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{Im}\langle F, U_{p,q}(\psi(\zeta - z))\rangle - \operatorname{Im}\lim_{\varepsilon\to+0}\overline{\partial}\int_{\Omega_\varepsilon} F \wedge U_{p,q-1}(\psi(\zeta - z)) = \mu\operatorname{Im}F \tag{41}$$

в Ω.

Доказательство. Необходимость. Если $\operatorname{Im}(\overline{\partial}F)_n = 0$, то из (31), (32), (40) и (26) следует, что выполнено равенство (41).

Достаточность. Пусть выполнено равенство (41), тогда $\operatorname{Im}\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon} g(\psi(\zeta - z))\mu^{\psi}_{p,q,F} = 0$ для $z \in \Omega$. Следовательно,

$$0 = \operatorname{Im}\left(\langle F, U_{p,q}(\psi(\zeta - z))\rangle - \lim_{\varepsilon\to+0}\overline{\partial}\int_{\Omega_\varepsilon} F(\zeta) \wedge U_{p,q-1}(\psi(\zeta - z))\right)_{\tau} =$$
$$= \operatorname{Im}\left(\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\partial\Omega_\varepsilon} g(\psi(\zeta-z))\mu^{\psi}_{p,q,F}(\zeta, z)\right)_{\tau} = \operatorname{Im}\lim_{\delta\to+0}\int_{(\partial\Omega_{-\delta})_z}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{(\partial\Omega_\varepsilon)_\zeta} g(\psi(\zeta-z))\mu^{\psi}_{p,q,F}(\zeta, z)\wedge\chi(z) =$$
$$= \operatorname{Im}\lim_{\delta\to+0}\int_{(\partial\Omega_{-\delta})_z}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{(\partial\Omega_\varepsilon)_\zeta} i^n u(\zeta) * \overline{\partial}F \wedge \iota_{p,q}(\zeta, z) \wedge \chi(z) =$$
$$= \operatorname{Im}\lim_{\delta\to+0}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{(\partial\Omega_\varepsilon)_\zeta} *\overline{\partial}F\ i^n u(\zeta)\int_{(\partial\Omega_{-\delta})_z} \iota_{p,q}(\zeta, z) \wedge \chi(z),$$

т. к. дроби вида (24) плотны в пространстве $C^\infty(\partial\Omega)$ вследствие равенства (40) для произвольной действительнозначной функции $C^\infty(\partial\Omega)$. Отсюда имеем $\operatorname{Im}(\overline{\partial}F)_n = 0$ на $\partial\Omega$. $\square$

Пусть $N^\psi_{p,q}$ — действительный линейный оператор, определенный для форм F с гармоническими коэффициентами, принадлежащих $\mathrm{Ph}'^f(\Lambda^{p,q},\Omega)$, соотношением

$$N^\psi_{p,q}(F) = \mu\operatorname{Re}(F) + i\operatorname{Im}\langle F, U_{p,q}(\psi(\zeta - z))\rangle - i\operatorname{Im}\lim_{\varepsilon\to+0}\overline{\partial}\int_{\Omega_\varepsilon} F(\zeta)\wedge U_{p,q-1}(\psi(\zeta - z)).$$

Согласно предложению 6 $\mathrm{Ph}'^f_0(\Lambda^{p,q},\Omega)\cap\mathrm{Harm}(\Lambda^{p,q},\Omega)$ есть множество

$$\mathrm{Fix}(N^\psi_{p,q}) = \{F\in\mathrm{Ph}'^f\cap\mathrm{Harm}(\Lambda^{p,q},\Omega) : N^\psi_{p,q}(F) = \mu F\}.$$

Литература

1. Кытманов А.М. *Интеграл Бохнера–Мартинелли и его применения.* – Новосибирск: Наука, 1992. – 240 с.
2. Кытманов А.М. *Об интегральном характеристическом свойстве дифференциальных форм* // Сиб. матем. журн. – 1978. – Т. 19. – № 4. – С. 788–792.
3. Айрапетян Р.А., Хенкин Г.М. *Интегральные представления дифференциальных форм на многообразиях Коши–Римана и теория CR-функций* // УМН. – 1984. – Т. 39. – № 3. – С. 39–106.
4. Хенкин Г.М.*Метод интегральных представлений в комплексном анализе* // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. – М.: ВИНИТИ, 1985. – Т. 7. – С. 23–124.
5. Уэллс Р. *Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях.* – М.: Мир, 1976. – 288 с.
6. Айзенберг Л.А., Даутов Ш.А. *Дифференциальные формы, ортогональные голоморфным функциям или формам, и их свойства.* – Новосибирск: Наука, 1975. – 115 с.
7. Никитина Т.Н. *Аналоги формул Грина и Коппельмана для когомологий Дольбо на основе логарифмического вычета с особенностями на границе* // Вопр. матем. анализа. – Красноярск, 2002. – С. 152–186.
8. Bochner S. *Analytic and meromorphic continuation by means of Green's formula* // Ann. Math. – 1943. – V. 44. – P. 652–673.
9. Straube E.J. *Harmonic and analytic functions admitting a distribution boundary value* // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. – 1984. – V. 11. – № 4. – P. 559–591.
10. Кытманов А.М., Мысливец С.Г. *О построении точных комплексов, связанных с комплексом Дольбо* // Сиб. матем. журн. – 2003. – Т. 44. – № 4. – С. 779–799.
11. Ландкоф Н.С. *Основы современной теории потенциала.* – М.: Наука, 1966. – 516 с.
12. Мысливец С.Г. *Об одном граничном варианте теоремы Морера* // Сиб. матем. журн. – 2001. – Т. 42. – № 5. – С. 1136–1146.
13. Folland G.B., Kohn J.J. *The Neumann problem for the Cauchy–Riemann complex.* – Ann. Math. Stud. Princeton, 1972. – V. 75. – 140 p.
14. Аронов А.М., Кытманов А.М. *О голоморфности функций, представимых интегралом Мартинелли–Бохнера* // Функц. анализ и его прилож. – 1975. – Т. 9. – № 3. – С. 83–84.
15. Perotti A. *Dirichlet problem for pluriharmonic function of several complex variables* // Commun. Part. Diff. Equat. – 1999. – V. 24. – № 3&4. – P. 707–717.
16. Мысливец М.С. *Об условиях плюригармонического продолжения распределений с границы области* // Многом. комплекс. анализ. – Красноярск, 2002. – С. 139–149.

Красноярский государственный
технический университет

Поступили
первый вариант 25.03.2004
окончательный вариант 18.04.2005