ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 5 (432)

УДК 517.956.2

Н.И. КИПРИЯНОВА

ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ ДЛЯ B-ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Данная работа является продолжением [1]. Следуя [2], устанавливаем теоремы о среднем для собственных функций B-полигармонического оператора.

Обозначим через R_N^+ евклидово полупространство точек (x', y), где $x' = (x_1, \dots, x_{N-1})$ и $y > 0$. Пусть область Ω^+ расположена в полупространстве R_N^+ и прилегает к гиперплоскости $y = 0$. Часть границы области Ω^+, лежащую на гиперплоскости $y = 0$, обозначим через Γ^0. В области Ω^+ введем в рассмотрение дифференциальный оператор

$$\Delta_B = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{k}{y}\frac{\partial}{\partial y},$$

где k — фиксированное положительное число.

Обозначим через $u(x', y)$ четное по y, классическое решение в области Ω^+ уравнения

$$\Delta_B^m u - (-1)^m \lambda u = 0, \tag{1}$$

где m — любое натуральное число, $\lambda > 0$. Оператор Δ_B^m будем именовать B-полигармоническим.

Функция φ, введенная по формуле $u(x', y) = \varphi(\mu x', \mu y)$, где $\mu = \lambda^{1/2m}$, $\mu > 0$, удовлетворяет уравнению

$$\Delta_B^m \varphi - (-1)^m \varphi = 0. \tag{2}$$

Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ — корни уравнения $\alpha^m = (-1)^m$. Тогда функция

$$\Big(\prod_{l=1, l\neq j}^{m} (\Delta_B - \alpha_l) \Big) \varphi = \psi_j, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

удовлетворяет уравнению $\Delta_B \psi_j - \alpha_j \psi_j = 0$. Поэтому для ψ_j справедлива теорема о среднем по любой полусфере с центром в точке $(s', 0) \in \Gamma^0$ и радиусом R, целиком лежащей в области Ω^+, и имеют место формулы [1]

$$(-1)^m m\, \mu^{2(p-m)} \fint_{\omega_R^+} \Delta_B^{m-p} u(x', y)\, y^k d\omega = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j^{m-p}\, \chi_j(s', 0), \quad p = 1, 2, \dots, m. \tag{3}$$

Здесь $\fint$ обозначает интеграл по сферическим углам, деленный на площадь единичной $(N-1)$-мерной полусферы, равную $\pi^{(N-1)/2}\Gamma((k+1)/2)/\Gamma((N+k)/2)$ (см. [3]);

$$\chi_j(x', y) = \alpha_j Z_j(R\sqrt{-\alpha_j})\psi_j(x', y), \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

$$Z_j \equiv Z_j(R\sqrt{-\alpha_i}) = \Gamma\Big(\frac{N+k}{2}\Big) J_{(N+k-2)/2}(R\sqrt{-\alpha_j}) \Big/ \Big(\frac{R\sqrt{-\alpha_j}}{2}\Big)^{(N+k-2)/2};$$

$$\arg\sqrt{-\alpha_j} \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Равенства (3) представляют собой систему m линейных уравнений относительно χ_j. Решая систему (3), получим

$$\chi_j(s',0) = (-1)^m m \sum_{p=1}^{m} c_{jp}\, \mu^{2(p-m)} \oint\limits_{\omega_R^+} \Delta_B^{m-p} u(x',y) y^k\, d\omega, \tag{4}$$

где c_{jp} — некоторые комплексные числа.

Заметим, что максимум модуля любого нормированного в $L_{2,k}(\Omega^+)$, четного по y решения уравнения (1), а также максимумы модулей его производных ограничены в подобласти Ω_0^+ области Ω^+ некоторой степенью λ при всех $\lambda > 0$.

Для решения $T_y^t u(x',y)$ уравнения (1) (T_y^t — оператор обобщенного сдвига, определенный в [4]) и функции v, определенной формулой

$$v = \mathcal{E}\left[\pi^{\frac{N-1}{2}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \Big/ \Gamma\left(\frac{N+k}{2}\right)\right]^{-1} + w,$$

где $\mathcal{E}$ — фундаментальное решение уравнения $\Delta_B^m u = 0$, w — бесконечно дифференцируемая, четная по y функция и, кроме того, $\operatorname{supp} v \subset \Omega_0^+ \subset \Omega^+$, запишем формулу Грина

$$u(s',t) = \int\limits_{\Omega_0^+} (T_y^t u\, \Delta_B^m v - v\, \Delta_B^m T_y^t u)\, y^k\, dx' dy. \tag{5}$$

Здесь в качестве точки (s',t) выбирается точка, которая принадлежит строго внутренней подобласти области Ω^+ так, чтобы обобщенный сдвиг T_y^t по направлению y не выходил за пределы Ω^+. Учитывая, что оператор обобщенного сдвига T_y^t и оператор Δ_B коммутируют, а функция $u(x',y)$ удовлетворяет уравнению (1), перепишем (5) в виде

$$u(s',t) = \int\limits_{\Omega_0^+} T_y^t u\, \Delta_B^m v\, y^k\, dx' dy + (-1)^m \lambda \int\limits_{\Omega_0^+} v\, T_y^t u\, y^k\, dx' dy.$$

Заметим, что всегда существует целое число ν такое, что $v = (\Delta_B^m)^\nu \tilde{v}$, где $\tilde{v}$ — функция, интегрируемая в квадрате с весом y^k, четная по y. В результате получим

$$u(s',t) = \int\limits_{\Omega_0^+} T_y^t u (\Delta_B^m)^{\nu+1} \tilde{v}\, y^k\, dx' dy + (-1)^{m+1} \lambda \int\limits_{\Omega_0^+} (\Delta_B^m)^\nu \tilde{v}\, T_y^t u\, y^k\, dx' dy. \tag{6}$$

С помощью формулы интегрирования по частям преобразуем (6) к виду

$$u(s',t) = 2(-1)^{(m+1)(\nu+1)} \lambda^{\nu+1} \int\limits_{\Omega_0^+} T_y^t u\, \tilde{v}\, y^k\, dx' dy. \tag{7}$$

Применяя к (7) неравенство Коши-Буняковского и учитывая, что $\|u\|_{L_{2,k}} \geq 1$ и $\|T_y^t u\|_{L_{2,k}} \geq c\|u\|_{L_{2,k}}$, получим требуемую оценку. Аналогично поступаем и с производными функции $u(x',y)$.

Таким образом, правая часть в (4) при каждом $j = 1, 2, \ldots, m$ растет не быстрее, чем некоторая степень λ при $\lambda \to \infty$.

Обратимся к функции

$$\chi(x',y) = \alpha_j\, Z_j(R\mu\sqrt{-\alpha_j}\,) \psi_j(x',y) = Z_j \sum_{p=1}^{m} \alpha_j^p\, \mu^{2(p-m)} \Delta_B^{m-p}\, u(x',y). \tag{8}$$

Аргументы всех Z_j $(j \neq 1)$ — комплексные числа, а потому Z_j $(j \neq 1)$ при всех $R > 0$ и всех $\mu > 0$ не имеют нулей, и при $|z| > 1$ справедливо представление ([5], с. 225)

$$Z_j(z) \sim z^{-(N+k-1)/2}\left\{c_1 \exp\left[i\left(z - \frac{\pi}{4}(N+k-1)\right)\right] + c_2 \exp\left[i\left(z - \frac{\pi}{4}(N+k-1)\right)\right]\right\}, \tag{9}$$

где c_1, c_2 — некоторые комплексные постоянные, $j = 2, \dots, m$. Из формул (4), (8), (9) следует

$$\left| \sum_{p=1}^{m} \alpha_j^p \, \mu^{2(p-m)} \Delta_B^{m-p} \, u(x', y) \right| = \frac{|\chi_j(x', y)|}{|Z_j|} = O\left(e^{-\beta_j r_0 \mu}\right), \tag{10}$$

где $\beta_j = |\operatorname{Im} \sqrt{-\alpha_j}|$, $r_0{>}0$ — любое число, меньшее R, и $R\,\mu\,\beta_j{>}1$.

Суммируя по j, получим

$$\left| \sum_{p=1}^{m} \mu^{2(p-m)} \Delta_B^{m-p} \, u(x', y) \sum_{j=2}^{m} \alpha_j^p \right| = O\left(e^{-\beta_0 \, r_0 \, \mu}\right), \quad \beta_0 = \min\{\beta_2, \dots, \beta_m\}. \tag{11}$$

Далее, учитывая

$$\sum_{j=2}^{m} \alpha_j^p = \begin{cases} -(-1)^p, & p = 1, \dots, m-1; \\ (-1)^m (m-1), & p = m, \end{cases}$$

преобразуем (11) к виду

$$\left| -\sum_{p=1}^{m} (-1)^p \, \mu^{2(p-m)} \Delta_B^{m-p} \, u(x', y) + (-1)^m (m-1) u(x', y) \right| = O\left(e^{-\beta_0 \, r_0 \, \mu}\right). \tag{12}$$

Запишем теперь для решения $u(x', y)$ уравнения (1) теорему о среднем по полусфере с центром в точке $(s', 0) \in \Gamma^0$ и радиусом r, $0 < r < r_0$, [1]

$$\oint_{\omega_r^+} u(x', y) y^k \, d\omega = \frac{(-1)^m}{m} \sum_{p=1}^{m} \mu^{2(p-m)} \Delta_B^{m-p} u(s', 0) \sum_{j=1}^{m} \alpha_j^p \, Z_j(R\mu\sqrt{-\alpha_j}).$$

Воспользовавшись (10), получим

$$\oint_{\omega_r^+} u(x', y) y^k \, dy = \frac{(-1)^m}{m} \left\{ Z_1 \sum_{p=1}^{m} (-1)^p \, \mu^{2(p-m)} \Delta_B^{m-p} \, u(s', 0) + \sum_{j=2}^{m} Z_j \, O\left(e^{-\beta_j \, r_0 \, \mu}\right) \right\}. \tag{13}$$

В силу представления (9) $|Z_j(\mu r \sqrt{-\alpha_j})| = O(e^{\beta_j r \, \mu})$. Поэтому, применяя (12), запишем выражение в фигурных скобках из (13) в форме

$$Z_1 \sum_{p=1}^{m} (-1)^p \, \mu^{2(p-m)} \Delta_B^{m-p} \, u(s', 0) + O\left(e^{-\beta_0 (r_0 - r) \mu}\right) =$$

$$= Z_1 (-1)^m \, m u(s', 0) + Z_1 \, O\left(e^{-\beta_0 \, r_0 \, \mu}\right) + O\left(e^{-\beta_0 (r_0 - r) \, \mu}\right).$$

Так как $\alpha_1 = -1$, то $|Z_1(r\mu\sqrt{-\alpha_1})| \le c_0$ при всех $r > 0$, $\mu > 0$, и формула (13) приобретет окончательный вид

$$\oint_{\omega_r^+} u(x', y) y^k \, dy = A(r, k) \, u(s', 0) + O\left(e^{-\beta_0 (r_0 - r) \, \mu}\right), \tag{14}$$

$$A(r, k) = 2^{\frac{N+k-2}{2}} \, \Gamma\left(\frac{N+k}{2}\right) J_{\frac{N+k-2}{2}}(r\mu)(r\mu)^{-\frac{N+k-2}{2}}.$$

Таким образом, получена

Теорема 1. *Пусть $u(x', y)$ — любое нормированное в $L_{2,k}(\Omega^+)$, четное по y решение уравнения (1). Пусть $P' = (s', 0)$ — произвольная внутренняя точка части границы, лежащей на гиперплоскости $y = 0$; r — любое число, меньшее расстояния $\rho(P')$ от точки P' до границы области Γ^0; r_0 — любое число, удовлетворяющее условию $0 < r < r_0 < \rho(P')$; $\mu = \lambda^{\frac{1}{2m}} > 0$. Тогда справедлива формула (14), представляющая собой теорему о среднем с весом y^k по полусфере ω_r^+ с центром на Γ^0 и радиусом r.*

Для получения теоремы о среднем, в которой бы фигурировало значение функции $u(x', y)$ во внутренней точке $P = (s', t)$ области Ω^+, используем оператор обобщенного сдвига T_y^t. Возьмем в качестве функции $u(x', y)$ функцию $T_y^t u(x', y)$ и воспользуемся соответствующей теоремой о среднем (см. [1])

$$\int\!\!\!\!\!\!\diagup_{\omega_r^+} T_y^t u_j(x', y) y^k \, d\omega = u_j(x', t) Z_j(R\sqrt{-\alpha_j}).$$

Здесь и далее в качестве точки $P = (s', t)$ выбираются такие точки, чтобы обобщенный сдвиг по направлению y не выводил за пределы Ω^+. Повторяя изложенные выше рассуждения, придем к формуле

$$\int\!\!\!\!\!\!\diagup_{\omega_r^+} T_y^t u_j(x', y) y^k \, d\omega = A(r, k)\, u(s', t) + O\left(e^{-\beta_0 (r_0 - r)\,\mu}\right). \tag{15}$$

Следовательно, справедлива

Теорема 2. *Пусть $u(x', y)$ — любое нормированное в $L_{2,k}(\Omega^+)$, четное по y решение уравнения (1). Пусть $P = (s', t)$ — произвольная внутренняя точка области Ω^+; r — любое число, меньшее расстояния $\rho(P)$ от точки P до границы области Ω^+; r_0 — любое число, удовлетворяющее условию $0 < r < r_0 < \rho(P)$; $\mu = \lambda^{1/2m} > 0$. Тогда справедлива формула (15), представляющая собой теорему о среднем с весом y^k по полусфере ω_r^+ с центром на Γ^0 и радиусом r.*

Литература

1. Киприянова Н.И. *Теорема о среднем для* B-*полигармонического уравнения* // Корректн. краев. задачи для неклассич. уравн. матем. физ. – Новосибирск, 1984. – С. 81–85.
2. Шишмарев И.А. *Теорема о среднем для полигармонического уравнения и ее следствия* // Функц. анализ и его прилож. – 1969. – Т. 3. – № 4. – С. 69–76.
3. Киприянов И.А., Кононенко В.И. *Фундаментальные решения* B-*эллиптических уравнений* // Дифференц. уравнения. – 1967. – Т. 3. – № 1. – С. 114–129.
4. Левитан Б.М. *Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье* // УМН. – 1951. – Т. 6. – № 2. – С. 102–143.
5. Ватсон Г.Н. *Теория бесселевых функций.* – Ч. 1. – М.: Ин. лит., 1949. – 799 с.

Воронежский государственный университет

Поступила 30.01.1995