Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского
Кафедра аэрогидромеханики

Направление: 010800.68 – Механика
Специализация: механика жидкости, газа и плазмы

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(Бакалаврская работа)

Ламинарное двухфазное стратифицированное течение вязкой жидкости в горизонтально расположенной трубе круглого поперечного сечения

Работа завершена:

«___»_____ 2014 г. _____К.Ю. Федорова

Работа допущена к защите:

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры аэрогидромеханики
«___»_____ 2014 г. _____А.Г. Егоров

Заведующий кафедрой
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры аэрогидромеханики
«___»_____ 2014 г. _____А.Г. Егоров

Казань – 2014

СОДЕРЖАНИЕ

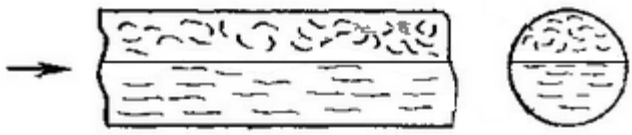
1. ВВЕДЕНИЕ 3
2. ФИЗИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ 6
3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА 8
4. РЕШЕНИЕ 12
   1. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ 12
   2. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ 18
5. ПРИЛОЖЕНИЕ А 27
6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ 32
   Список литературы 33

ВВЕДЕНИЕ

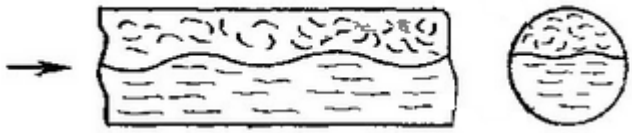
Течение двух несмешивающихся жидкостей различной вязкости и плотности встречается во многих процессах и оборудованиях. Например, при перемещении полезных ископаемых (нефти, растворов солей) от места добычи к потребителю, выбросов фабрик и многое другое. В частности, вышеуказанное течение реализуется в нефтяной промышленности, где смесь воды и нефти передается по трубам на большие расстояния.

При изменении давления, общего расхода потока, соотношения между фазами и свойствами фаз практически могут быть реализованы различные формы течения двухфазной жидкости в горизонтальной системе:

- *стратифицированное течение с движением каждой фазы в своей области и постоянной границей раздела* – это течение, которое встречается в достаточно ограниченном диапазоне жидкостей и реализуется при низких скоростях потока, где стабилизирующая сила тяжести является доминирующей в силу конечной разности плотностей;

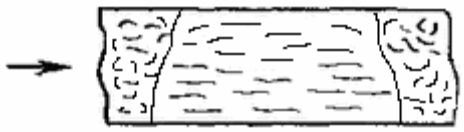


- *расслоенное течение с волновой границей раздела* преобладает при высоких скоростях потока, причем граница раздела фаз в таком случае приобретает волновое движение, и волны периодически захлестывают верхнюю образующую трубы;



- *кольцевое течение* характеризуется движением основной массы жидкости одной из фаз по стенке трубы в виде жидкостного кольца (или пленки), внутри которого с высокой скоростью движется вторая фаза (ядро); при дисперсно-кольцевом течении ядро содержит капли первой фазы;

- *пробковое течение (снарядное)* – это течение двухфазной смеси, развивающееся чаще всего из расслоенного течения с волновой границей; оно характеризуется движением в канале крупных пробок (пузырей) одной фазы, которые движутся с большими скоростями и отделены друг от друга прослойками другой.



В данной работе рассмотрен простейший режим двухфазного установившегося течения – ламинарный стратифицированный поток [1, 2] жидкости в горизонтальной трубе, при котором в нижней части трубы течет тяжелая фаза (вода), а в верхней части – легкая (нефть). Для труб круглого сечения этот режим рассматривался во многих работах [3, 4, 5], основной задачей которых было вычисление при фиксированном перепаде давления объемных расходов воды $Q_{\text{в}}$ и нефти $Q_{\text{н}}$ в зависимости от отношения $m = \mu_{\text{н}} / \mu_{\text{в}} > 1$ вязкостей фаз и доли s поперечного сечения трубы, занятой водой. В этих работах установлено, что зависимость $Q_{\text{н}}(s)$ немонотонна. С

ростом s вначале $Q_{\text{н}}(s)$ растет, увеличиваясь на десятки процентов по сравнению с расходом $Q_{\text{н}}(0)$ в трубе, полностью заполненной нефтью, и лишь затем снижается до нуля при $s=1$, соответствующей расходу в трубе, полностью заполненной водой. Максимальное превышение $Q_{\text{н}}(s)$ над $Q_{\text{н}}(0)$ зависит от отношения вязкостей m и составляет, например 25% при $m=10$ и 36% при $m=100$. Указанный эффект объясняется тем, что водный слой выполняет роль жидкой смазки: двигаясь из-за малой вязкости со значительно большей средней скоростью, вода на межфазной границе увлекает за собой нефть.

Следствием немонотонности $Q_{\text{н}}(s)$ является принципиальная возможность повышения эффективности перекачки вязкой нефти в круглых трубах за счет добавления в поток некоторого количества воды.

ФИЗИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости, состоящей из двух не смешивающихся фаз (нефти и воды) вязкости μ_1 и μ_2 $(\mu_1 \geq \mu_2)$ соответственно, в горизонтально расположенной цилиндрической трубе круглого поперечного сечения постоянного радиуса R. Граница раздела между двумя средами считается горизонтальной плоскостью (рис. 1). Нижняя часть трубы заполнена водой, верхняя – нефтью (в предположении, что вода является более плотной, чем нефть).

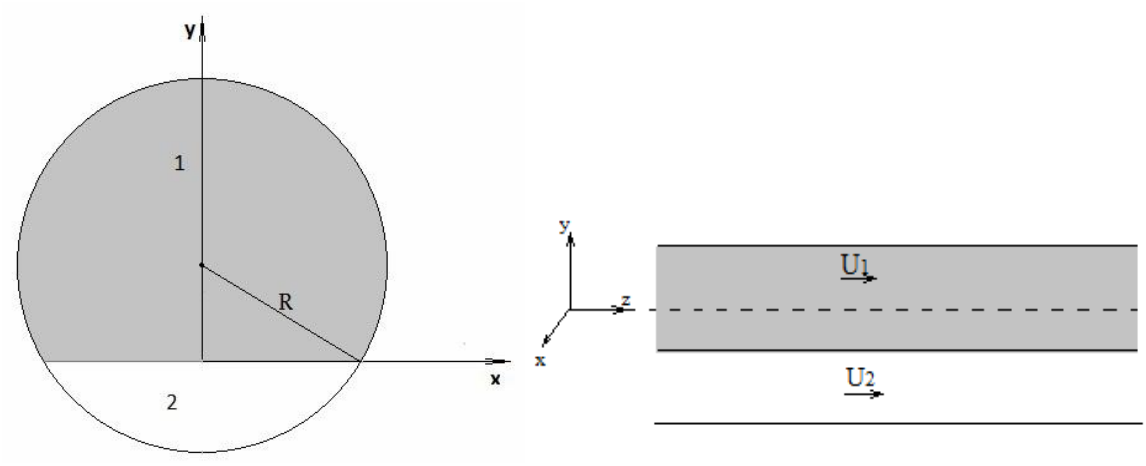


Рис. 1. (Поперечное и продольное сечение трубы радиуса R)

Течение возникает вследствие постоянного перепада давления на концах трубы $\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{p_1 - p_0}{l} = -G = const > 0$, где p_0 – давление во входном сечении, p_1 – давление в выходном сечении трубы, l – длина трубы. Положение границы раздела, а следовательно, и объем, занятый первой и второй фазой, определяется углом ϕ_0 $(0 \leq \phi_0 \leq \pi)$ (рис. 2). Течение считается ламинарным и одномерным, поэтому скорость жидкости $\vec{v}$ в каждой точке направлена вдоль оси z, параллельной продольной оси трубы. Тогда из закона сохранения массы следует, что скорость не зависит от координаты z. Таким образом, $\vec{v} = \vec{v}(0,0,u(x,y))$. Необходимо определить распределение

скорости $u = u(x, y)$ первой и второй фазы при заданном отношении m вязкостей нефти и воды.

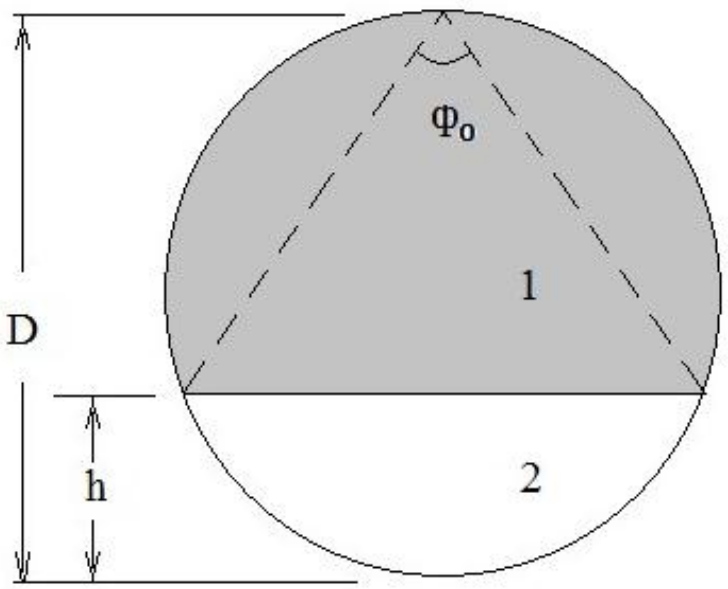


Рис. 2. (Поперечное сечение трубы)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исследуемое течение описывается уравнением Навье – Стокса

$$\rho \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = -\nabla p + \nabla \mu \nabla u,$$

где ∇ – оператор набла, Δ – оператор Лапласа, t – время, μ – коэффициент динамической вязкости, ρ – плотность, p – давление, $\vec{\upsilon}$ – векторное поле скоростей.

Данное уравнение, записанное вдоль оси z, имеет вид:

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\mu}{3} \frac{\partial u}{\partial z} + \nabla \mu \nabla u.$$

С учётом стационарности

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} = u \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Как было показано выше (см. Физическую постановку задачи), скорость не зависит от продольной координаты z, следовательно, $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$. Таким образом, получено:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \nabla \mu \nabla u = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Граничным условием является условие прилипания вязкой жидкости к внутренней поверхности трубы, то есть равенство нулю скорости.

Получена задача:

$$\begin{cases} \nabla\mu\nabla u = -\dfrac{\partial p}{\partial z} = -G, \ (\mathrm{x,y}) \in \Omega, \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \text{где } \mu = \begin{cases} \mu_1, \ (\mathrm{x,y}) \in \Omega_1, \\ \mu_2, \ (\mathrm{x,y}) \in \Omega_2. \end{cases} \tag{1}$$

Области Ω_1, Ω_2 – части сечения, занятые первой фазой (нефтью) и второй фазой (водой) соответственно, $\partial\Omega$ – граница области $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$. Здесь и далее индексом «1» будут обозначаться характеристики, относящиеся к области Ω_1, индексом «2» – к области Ω_2. Так, уравнение $\nabla\mu\nabla u = -G$ переходит в пару уравнений Пуассона для подобластей:

$$\begin{cases} \mu_1 \Delta u_1 = -G, \ (\mathrm{x,y}) \in \Omega_1, \\ \mu_2 \Delta u_2 = -G, \ (\mathrm{x,y}) \in \Omega_2. \end{cases} \tag{2}$$

Для удобства необходимо осуществить переход к безразмерным переменным в уравнениях (2). Пусть связь размерных и безразмерных величин такова:

$$\tilde{x} = \frac{x}{R}, \ \tilde{y} = \frac{y}{R}, \ \tilde{\mu} = \frac{\mu}{\mu_2}, \ \tilde{u} = \frac{u\mu_1}{GR^2}.$$

Тогда задача (1) в безразмерных переменных примет вид

$$\begin{cases} \nabla\tilde{\mu}\nabla\tilde{u} = -1, \ (\tilde{\mathrm{x}},\tilde{\mathrm{y}}) \in \Omega^*, \\ \tilde{u}\big|_{\partial\Omega^*} = 0, \end{cases} \text{где } \tilde{\mu} = \begin{cases} \mu_1 / \mu_2, \ (\tilde{\mathrm{x}},\tilde{\mathrm{y}}) \in \Omega_1^*, \\ 1, \ (\tilde{\mathrm{x}},\tilde{\mathrm{y}}) \in \Omega_2^*. \end{cases}$$

Здесь Ω^* – круг единичного радиуса, Ω_1^*, Ω_2^* – его подобласти. Далее для удобства знак «*» опущен. Таким образом, достаточно решить задачу в безразмерных переменных, после чего определить истинное распределение скоростей по формуле

$$u(x,y)=\frac{GR^2}{\mu_1}\tilde{u}(\frac{x}{R},\frac{y}{R}).$$

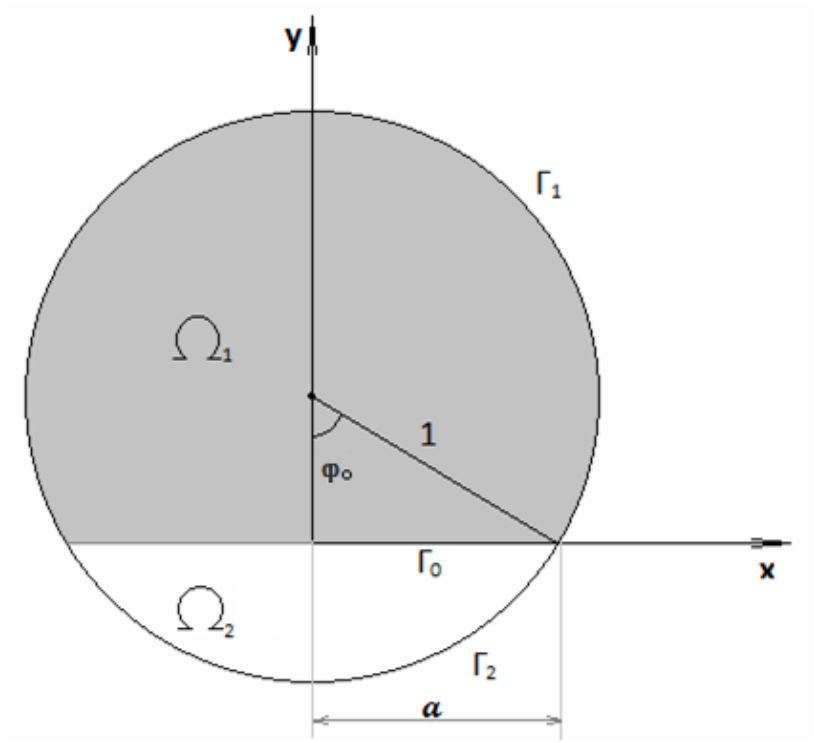


Рис. 3. (Поперечное сечение трубы единичного радиуса)

Итак, далее рассматривается задача:

$$\begin{cases}\nabla\mu\nabla u=-1, & (x,y)\in\Omega,\\ u\big|_{\partial\Omega}=0,\end{cases}\quad \text{где } \mu=\begin{cases}\mu_0, & (x,y)\in\Omega_1,\\ 1, & (x,y)\in\Omega_2,\end{cases} \tag{3}$$

где $\Omega=\Omega_1+\Omega_2$ – круг единичного радиуса, $\mu_0=\mu_1/\mu_2$ – отношение вязкостей фаз. Через Γ_0 обозначается граница раздела между средами, а через $\Gamma_1=\partial\Omega_1-\Gamma_0,\ \Gamma_2=\partial\Omega_2-\Gamma_0$ – границы каждой из сред (рис. 3). На границе Γ_0 скорость должна быть непрерывной, следовательно, $u_1=u_2$, а также должны совпадать “сдвиговые” напряжения со стороны двух сред, то есть $\frac{\partial u_1}{\partial y}=\mu_0\frac{\partial u_2}{\partial y}$.

Таким образом, полученная задача представляет собой:

1) эллиптическую систему уравнений, описывающую скорости течения жидкости $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$

$$\begin{cases} \mu_0 \Delta u_1 = -1, \ (\mathrm{x,y}) \in \Omega_1, \\ \Delta u_2 = -1, \ (\mathrm{x,y}) \in \Omega_2, \end{cases} \tag{4}$$

2) граничные условия на стенках трубы

$$\begin{cases} u_1\big|_{\Gamma_1} = 0, \\ u_2\big|_{\Gamma_2} = 0, \end{cases} \tag{5}$$

3) условия на границе раздела фаз

$$\begin{cases} (u_1 - u_2)\big|_{\Gamma_0} = 0, \\ \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial y} - \mu_0 \dfrac{\partial u_2}{\partial y}\right)\Bigg|_{\Gamma_0} = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Далее решается задача (4), (5), (6).

РЕШЕНИЕ

1. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

На рис. 4. изображено сечение трубы единичного радиуса. ϕ_0 – угол между касательной к трубе и осью Ox, он определяет положение границы раздела фаз. Расстояние $a = \sin\phi_0$ – это координата x границы $\partial\Omega$ области $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ при $y = 0$.

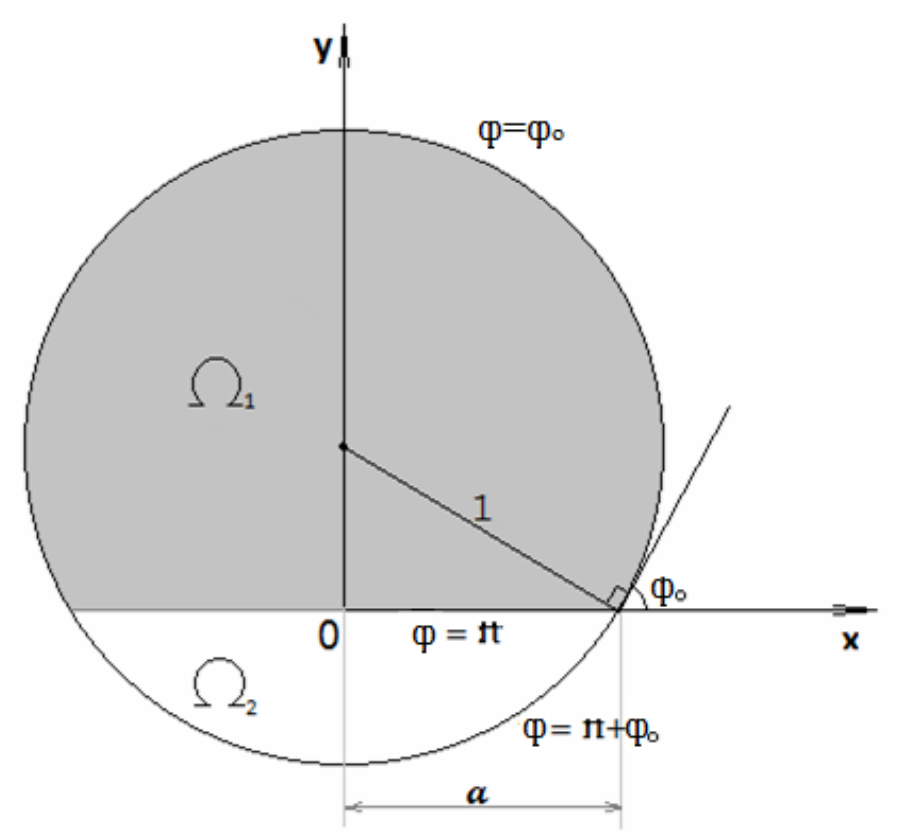


Рис.4. (Поперечное сечение трубы единичного радиуса)

Для решения задачи осуществляется переход в бицилиндрическую систему координат (ξ, ϕ) по формулам:

$$\begin{cases} x = \dfrac{a\ sh\xi}{ch\xi - \cos\phi}, \\ y = \dfrac{a\ \sin\phi}{ch\xi - \cos\phi}. \end{cases} \tag{7}$$

На рис. 5 изображены линии $\phi = const,\ \xi = const$ в физической плоскости (x, y) при $a = 1$. Линиям $\phi = const$ соответствуют дуги окружностей, проходящих через точки $(a,0),(-a,0)$ в физической плоскости (x, y), а линиям $\xi = const$ – окружности, относительно которых точки $(a,0),(-a,0)$ являются симметричными.

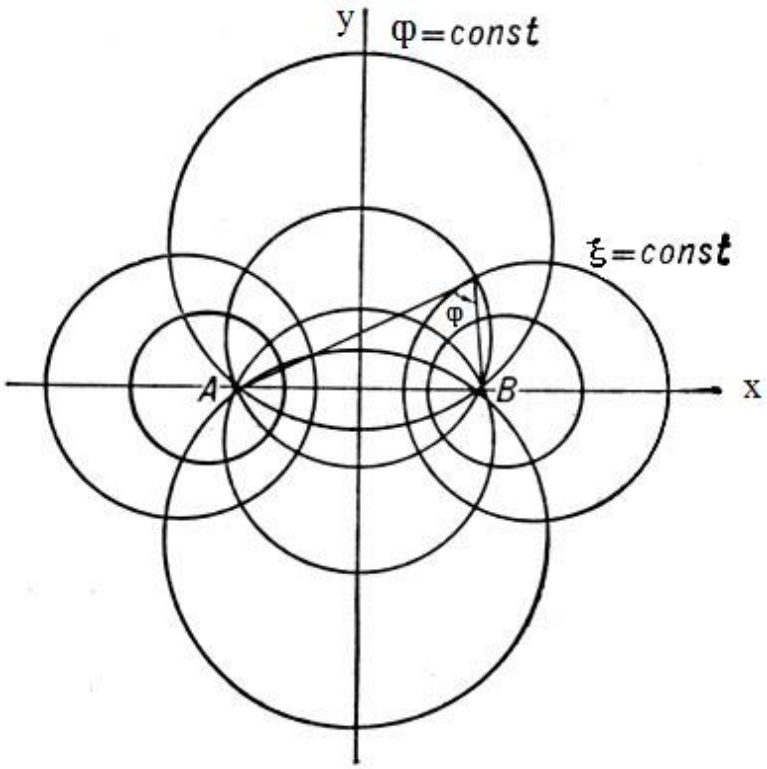


Рис.5. (Линии $\phi = const,\ \xi = const$ в плоскости (x, y))

После указанного преобразования область Ω перейдет из круга единичного радиуса в бесконечную по координате ξ полосу (рис. 6). Область Ω_1 переходит в полосу $\{\phi_0 < \phi < \pi, -\infty < \xi < \infty\}$, область Ω_2 – в полосу $\{\pi < \phi < \pi + \phi_0, -\infty < \xi < \infty\}$. При этом границе Γ_2 (рис. 3) соответствует прямая $\phi = \phi_0 + \pi$ в плоскости (ξ, ϕ), а Γ_1 соответствует $\phi = \phi_0$, и соответствие точек таково, что

$$y = 0 \leftrightarrow \phi = \pi,$$

$$x = 0 \leftrightarrow \xi = 0,$$

$$\{x=a,\ y=0\} \ \leftrightarrow\ \xi=\infty,$$

$$\{x=-a,\ y=0\} \ \leftrightarrow\ \xi=-\infty.$$

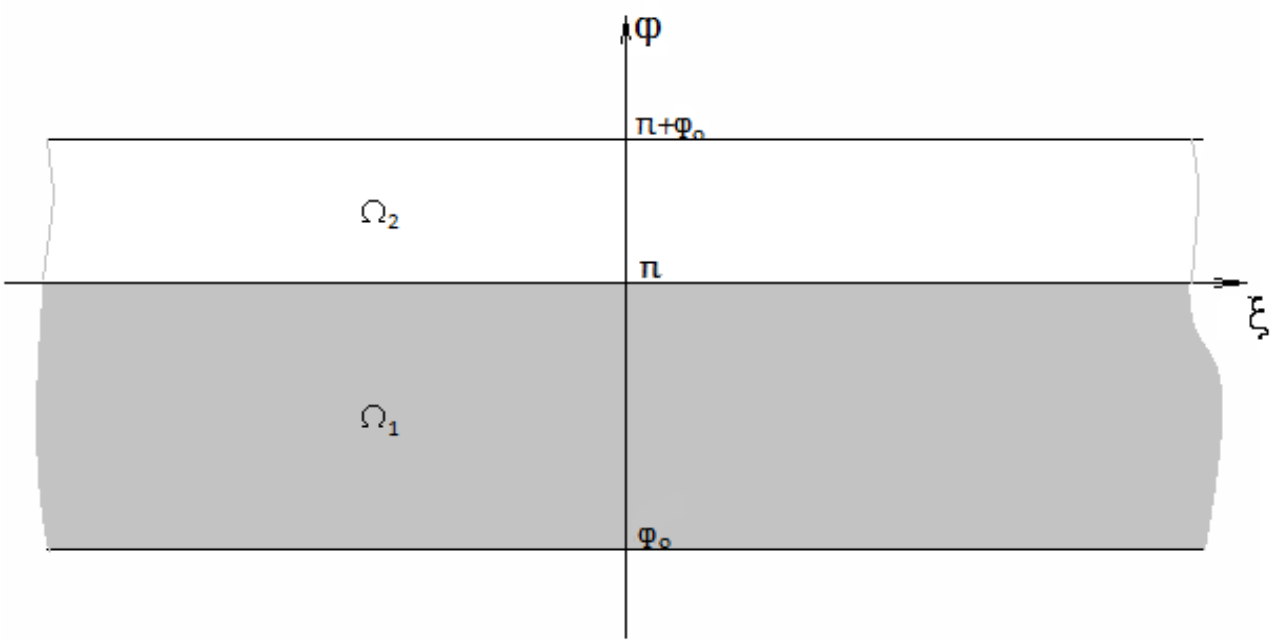


Рис. 6. (Область Ω в плоскости (ξ,ϕ))

Необходимо вычислить якобиан преобразования координат

$$J(\xi,\phi)=\begin{vmatrix} x'_\phi & x'_\xi \\ y'_\phi & y'_\xi \end{vmatrix} = x'_\phi y'_\xi - x'_\xi y'_\phi .$$

С использованием уравнений (7) находятся частные производные

$$x'_\sigma = y'_\xi = -\frac{a\sin\phi\ sh\xi}{\left(ch\xi-\cos\phi\right)^2},\ x'_\xi = -y'_\phi = a\frac{1-ch\xi\cos\phi}{\left(\mathrm{ch}\xi-\cos\phi\right)^2}. \qquad (8)$$

Тогда

$$J(\xi,\phi)=a^2\frac{\sin^2\phi\ sh^2\xi+\left(ch\xi\cos\phi-1\right)^2}{\left(ch\xi-\cos\phi\right)^4}=\frac{a^2}{\left(ch\xi-\cos\phi\right)^2}.$$

Далее определяется оператор Лапласа в бицилиндрической системе координат.

Для произвольной функции f вторая производная по ϕ вычисляется следующим образом:

$$f''_{\phi\phi} = \left(f'_{\phi} \right)'_{\phi} = \left(f'_x x'_{\phi} + f'_y y'_{\phi} \right)'_{\phi} = \left(f''_{xx} x'_{\phi} + f''_{xy} y'_{\phi} \right) x'_{\phi} + f'_x x''_{\phi\phi} + \left(f''_{yx} x'_{\phi} + f''_{yy} y'_{\phi} \right) y'_{\phi} +$$

$$+ f'_y y''_{\phi\phi} = f''_{xx} \left(x'_{\phi} \right)^2 + 2 f''_{xy} y'_{\phi} x'_{\phi} + f''_{yy} \left(y'_{\phi} \right)^2 + f'_x x''_{\phi\phi} + f'_y y''_{\phi\phi}.$$

Аналогично можно получить вторую производную по ξ:

$$f''_{\xi\xi} = f''_{xx} \left(x'_{\xi} \right)^2 + 2 f''_{xy} y'_{\xi} x'_{\xi} + f''_{yy} \left(y'_{\xi} \right)^2 + f'_x x''_{\xi\xi} + f'_y y''_{\xi\xi}.$$

После сложения двух последних равенств:

$$f''_{\phi\phi} + f''_{\xi\xi} = f''_{xx} \left(\left(x'_{\phi} \right)^2 + \left(x'_{\xi} \right)^2 \right) + 2 f''_{xy} \left(y'_{\phi} x'_{\phi} + y'_{\xi} x'_{\xi} \right) + f''_{yy} \left(\left(y'_{\phi} \right)^2 + \left(y'_{\xi} \right)^2 \right) +$$

$$+ f'_x \left(x''_{\phi\phi} + x''_{\xi\xi} \right) + f'_y \left(y''_{\phi\phi} + y''_{\xi\xi} \right).$$

С учетом выражений (8) имеется:

$$\left(x'_{\phi} \right)^2 + \left(x'_{\xi} \right)^2 = x'_{\phi} y'_{\xi} - x'_{\xi} y'_{\phi} = J,$$

$$y'_{\phi} x'_{\phi} + y'_{\xi} x'_{\xi} = y'_{\phi} y'_{\xi} - y'_{\xi} y'_{\phi} = 0,$$

$$\left(y'_{\phi} \right)^2 + \left(y'_{\xi} \right)^2 = -x'_{\xi} y'_{\phi} + x'_{\phi} y'_{\xi} = J,$$

$$x''_{\phi\phi} + x''_{\xi\xi} = \left(x'_{\phi} \right)'_{\phi} + \left(x'_{\xi} \right)'_{\xi} = \left(y'_{\xi} \right)'_{\phi} + \left(-y'_{\phi} \right)'_{\xi} = 0,$$

$$y''_{\phi\phi} + y''_{\xi\xi} = \left(y'_{\phi} \right)'_{\phi} + \left(y'_{\xi} \right)'_{\xi} = \left(-x'_{\xi} \right)'_{\phi} + \left(x'_{\phi} \right)'_{\xi} = 0.$$

Таким образом, $f''_{\phi\phi} + f''_{\xi\xi} = J \left(f''_{xx} + f''_{yy} \right)$, откуда следует искомое выражение оператора Лапласа в бицилиндрической системе координат

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) = \frac{\left(ch\xi - \cos\phi \right)^2}{a^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right). \qquad (9)$$

Итак, уравнения (4) в новых переменных в подобластях Ω_1 и Ω_2 будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \Delta u_1(\xi,\phi) = -\dfrac{a^2}{\mu_0\left(ch\xi - \cos\phi\right)^2}, \ (\xi,\phi) \in \Omega_1, \\ \Delta u_2(\xi,\phi) = -\dfrac{a^2}{\left(ch\xi - \cos\phi\right)^2}, \ (\xi,\phi) \in \Omega_2, \end{cases}.$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial\phi^2}$.

Граничные условия (5), (6) примут вид:

$$\begin{cases} u_1\big|_{\phi=\phi_0} = 0, \\ u_2\big|_{\phi=\phi_0+\pi} = 0, \\ (u_1 - u_2)\big|_{\phi=\pi} = 0, \\ \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial\phi} - \mu_0\dfrac{\partial u_2}{\partial\phi}\right)\Bigg|_{\phi=\pi} = 0. \end{cases}.$$

Последнее условие доказывается следующим образом.

$\triangleright$ Для произвольной функции f:

$$\frac{\partial f}{\partial\phi}\bigg|_{\phi=\pi} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\phi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\phi}\right)\bigg|_{\phi=\pi} = \langle \text{с учетом формул (8)} \rangle =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}0 + \frac{\partial f}{\partial y}a\frac{1+ch\xi}{\left(1+ch\tau\xi\right)^2}\right)\bigg|_{\phi=\pi} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{a}{\left(1+ch\xi\right)}\bigg|_{\phi=\pi} = \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{\phi=\pi}\frac{a}{\left(1+ch\xi\right)},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{\phi=\pi} = \frac{\partial f}{\partial\phi}\bigg|_{\phi=\pi}\frac{1+ch\xi}{a}.$$

Тогда

$$0 = \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} - \mu_0\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)\bigg|_{\phi=\pi} = \frac{1+ch\xi}{a}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\phi} - \mu_0\frac{\partial u_2}{\partial\phi}\right)\bigg|_{\phi=\pi},$$

Откуда следует требуемое $\triangleleft$.

С учетом того, что $\xi = \pm\infty \leftrightarrow \{x = \pm a,\ y = 0\}$ необходимо добавить еще два граничных условия:

$$u_1\big|_{\xi=\pm\infty} = u_2\big|_{\xi=\pm\infty} = 0.$$

Таким образом, полученная задача в новой системе координат представляет собой:

1) эллиптическую систему уравнений, описывающую скорости течения жидкости $u_1(\xi,\phi)$, $u_2(\xi,\phi)$

$$\begin{cases} \Delta u_1(\xi,\phi) = -\dfrac{a^2}{\mu_0\left(ch\xi - \cos(\phi)\right)^2}, \ (\xi,\phi)\in\Omega_1, \\ \Delta u_2(\xi,\phi) = -\dfrac{a^2}{\left(ch\xi - \cos(\phi)\right)^2}, \ (\xi,\phi)\in\Omega_2, \end{cases} \tag{10}$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial\phi^2}$,

2) граничные условия:

$$\begin{cases} u_1\big|_{\phi=\phi_0} = 0, \\ u_2\big|_{\phi=\phi_0+\pi} = 0, \\ (u_1 - u_2)\big|_{\phi=\pi} = 0, \\ \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial\phi} - \mu_0\dfrac{\partial u_2}{\partial\phi}\right)\Bigg|_{\phi=\pi} = 0, \\ u_1\big|_{\xi=\pm\infty} = u_2\big|_{\xi=\pm\infty} = 0. \end{cases}, \tag{11}$$

где область $\Omega_1 = \{\phi_0 < \phi < \pi, -\infty < \xi < \infty\}$, область $\Omega_2 = \{\pi < \phi < \pi + \phi_0, -\infty < \xi < \infty\}$.

Используя преобразование Фурье по координате ξ, решение задачи (10), (11) можно получить в следующем явном виде:

$$\tilde{u}_1(\xi,\phi) = 2\sin\phi_0\left\{\frac{\sin(\phi-\phi_0)}{\operatorname{ch}\xi - \cos\phi} - 2(1-\mu_0)\sin(\pi-\phi_0)\int_0^\infty W_{1\upsilon}(\omega,\phi)\cos(\omega\xi)d\omega\right\}, \tag{12}$$

$$\tilde{u}_2(\xi,\phi) = 2\mu_0\sin\phi_0\left\{\frac{\sin(\phi-\phi_0)}{\operatorname{ch}\xi - \cos\phi} - 2(1-\mu_0)\sin(\pi-\phi_0)\int_0^\infty W_{2\upsilon}(\omega,\phi)\cos(\omega\xi)d\omega\right\}, \tag{13}$$

где $u(x,y)=\dfrac{GR^2}{\mu_1}\tilde{u}(x,y)$, $\mu_0=\mu_1/\mu_2$. Спектральные функции $W_{1\upsilon}(\omega,\phi)$, $W_{2\upsilon}(\omega,\phi)$ имеют вид:

$$W_{1\upsilon}(\omega,\phi)=\frac{\omega\,\mathrm{sh}[\omega(\phi-\phi_0)]}{\mathrm{sh}(\pi\omega)\,\mathrm{ch}[\omega(\pi-\phi_0)]\psi(\omega)},$$

$$W_{2\upsilon}(\omega,\phi)=\frac{\omega\,\mathrm{sh}[\omega(\phi-\phi_0-\pi)]}{\mathrm{sh}(\pi\omega)\,\mathrm{ch}[\omega(-\phi_0)]\psi(\omega)}, \tag{14}$$

где $\psi(\omega)=\mathrm{th}[\omega(\pi-\phi_0)]+\mu_0\,\mathrm{th}[\omega\phi_0]$.

2. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

Аналитическое решение (12) — (14) задачи (10), (11) исследовалось с использованием пакета Matlab. Была написана программа (см. ПРИЛОЖЕНИЕ А).

При использовании численных методов возникает проблема в рассмотрении бесконечной области (рис. 6). Решается она с помощью некоторого ограничения данной области. При этом в окрестности точек $(a,0),(-a,0)$ физической плоскости (x,y) (рис. 4) также отсечется некоторая малая область. Оптимальным вариантом ограничения является отсечение от исходной области Ω по оси ξ бесконечных концов до прямоугольника $\{\phi_0<\phi<\pi+\phi_0,-4\pi<\xi<4\pi\}$. Тогда отношение площади отсеченной части к площади всей области $S=\pi$ составит величину порядка 10^{-10}. Для сохранения граничных условий необходимо принять $u_1\big|_{\xi=\pm4\pi}=u_2\big|_{\xi=\pm4\pi}=0$.

Полученная область $\{\phi_0<\phi<\pi+\phi_0,-4\pi<\xi<4\pi\}$ разбивалась равномерной сеткой следующим образом:

$$\begin{cases}\xi_i=-4\pi+8ih_\xi\pi,\ i=0,...,2N,\\ \phi_j=\phi_0+\ jh_\phi\pi,\ j=0,...,M,\end{cases}\quad\begin{cases}h_\xi=1/(2N),\\ h_\phi=1/M.\end{cases}$$

Далее в силу симметрии рассматривалась область $\{\phi_0 < \phi < \pi + \phi_0, 0 < \xi < 4\pi\}$ и, соответственно, разбиение

$$\begin{cases} \xi_i = 8ih_\xi\pi,\ i = 0,...,N, \\ \phi_j = \phi_0 + jh_\phi\pi,\ j = 0,...,M, \end{cases} \begin{cases} h_\xi = 1/N, \\ h_\phi = 1/M. \end{cases}$$

Интегралы в выражениях (12), (13) вычислялись с помощью преобразования Фурье. Далее, после получения по формулам (12), (13) ряда значений $\tilde{u}_1^{ij}(\xi,\phi)$, $\tilde{u}_2^{ij}(\xi,\phi)$, $i = \overline{0,N}$, $j = \overline{0,M}$ ($\tilde{u}_2^{ij}(\xi,\phi) \equiv \tilde{u}_2(\xi_i,\phi_j)$) осуществлялся переход в физическую плоскость (x, y) по формулам (7). В результате были получены искомые значения скоростей в узлах сетки $u_1^{ij}(x,y)$, $u_2^{ij}(x,y)$, $i = \overline{0,N}$, $j = \overline{0,M}$.

Рассмотрены несколько случаев положения границы раздела фаз:

1) $\phi_0 = \dfrac{4\pi}{9}$, что соответствует наполненности трубы водой на высоту $h = R(1 - \cos\dfrac{4\pi}{9}) \approx 0{,}8R$;

2) $\phi_0 = \dfrac{\pi}{3}$, $h = 0{,}5R$;

3) $\phi_0 = \dfrac{\pi}{6}$, $h = R(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}) \approx 0{,}1R$.

В каждом случае для нескольких значений отношения вязкостей $\mathrm{m} = \dfrac{\mu_1}{\mu_2}$ изображены профили скоростей в среднем сечении $x = 0$ (рис. 7, рис. 8, рис. 9).

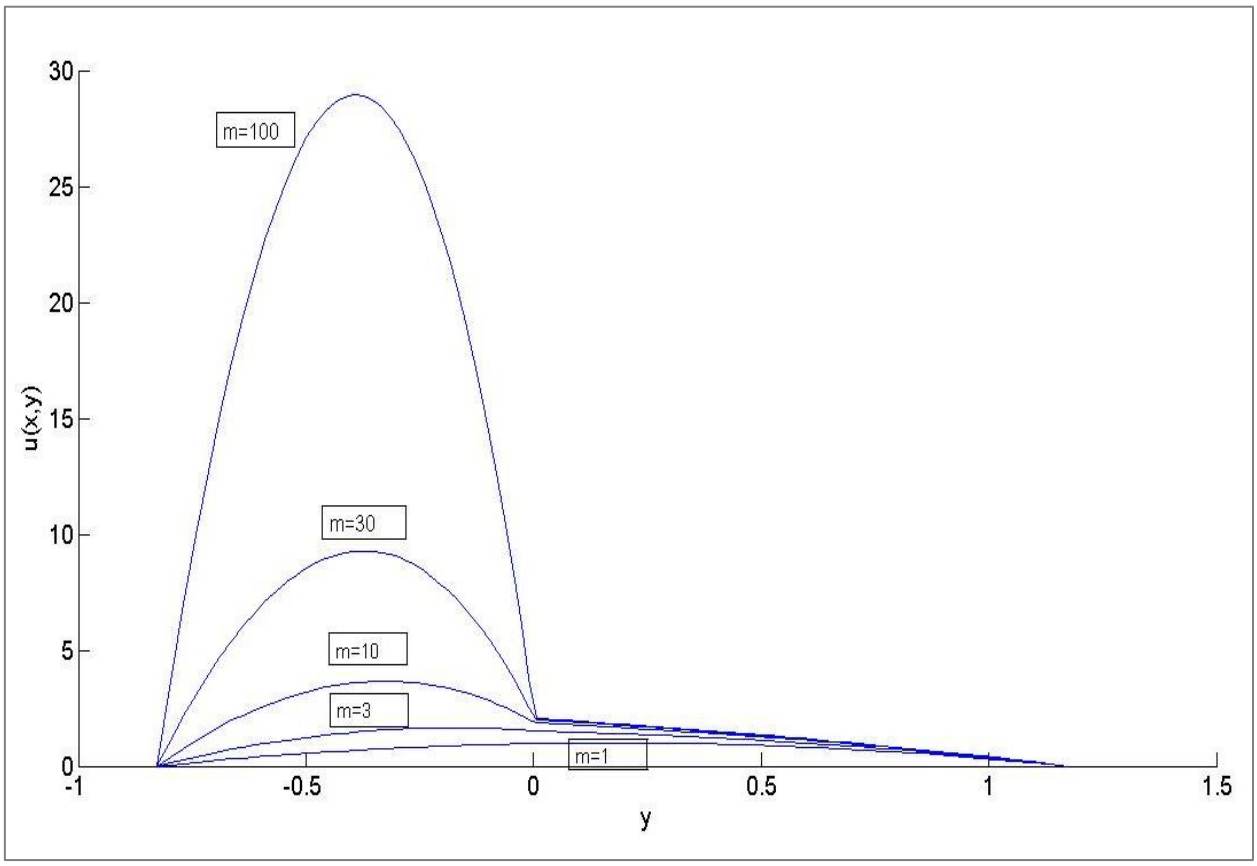


Рис. 7. (Профили скоростей в сечении $x = 0$ при $\phi_0 = \frac{4\pi}{9}$)

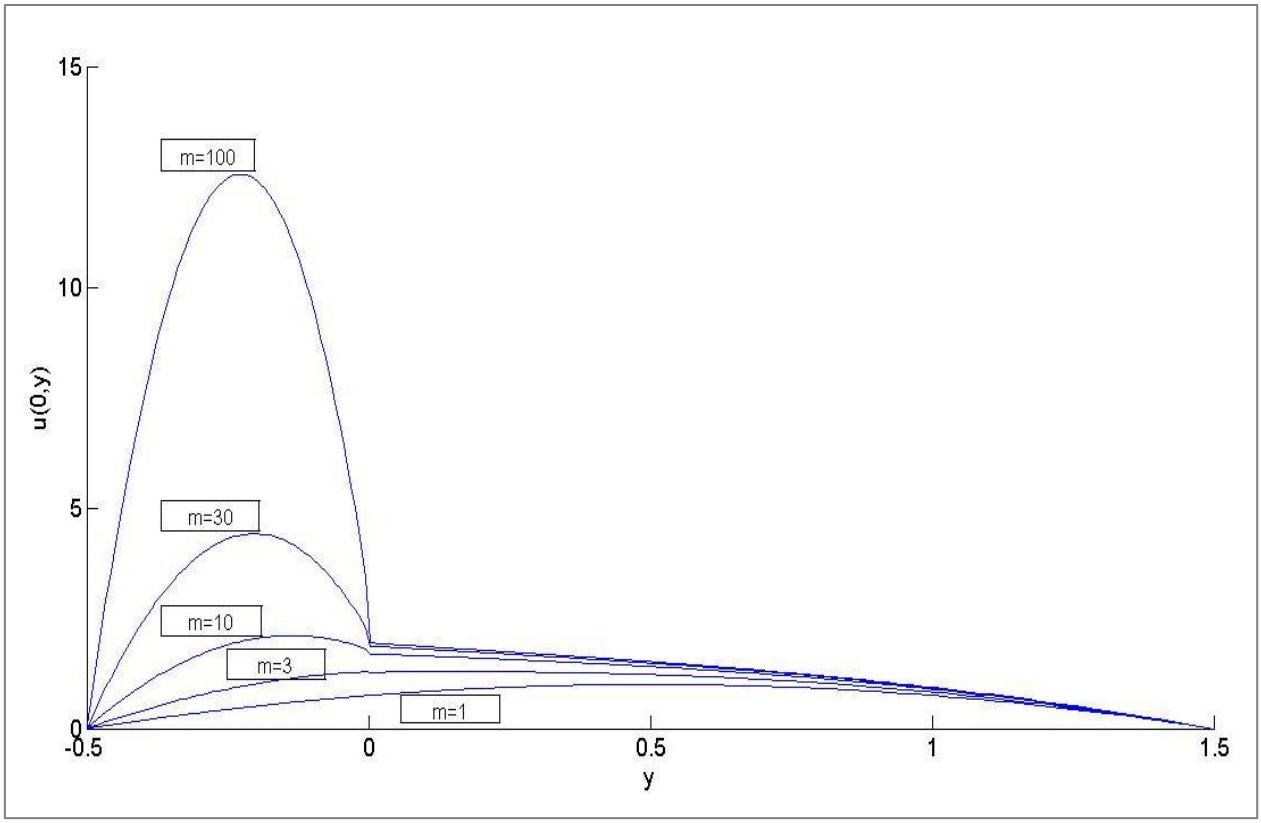


Рис. 8. (Профили скоростей в сечении $x = 0$ при $\phi_0 = \frac{\pi}{3}$)

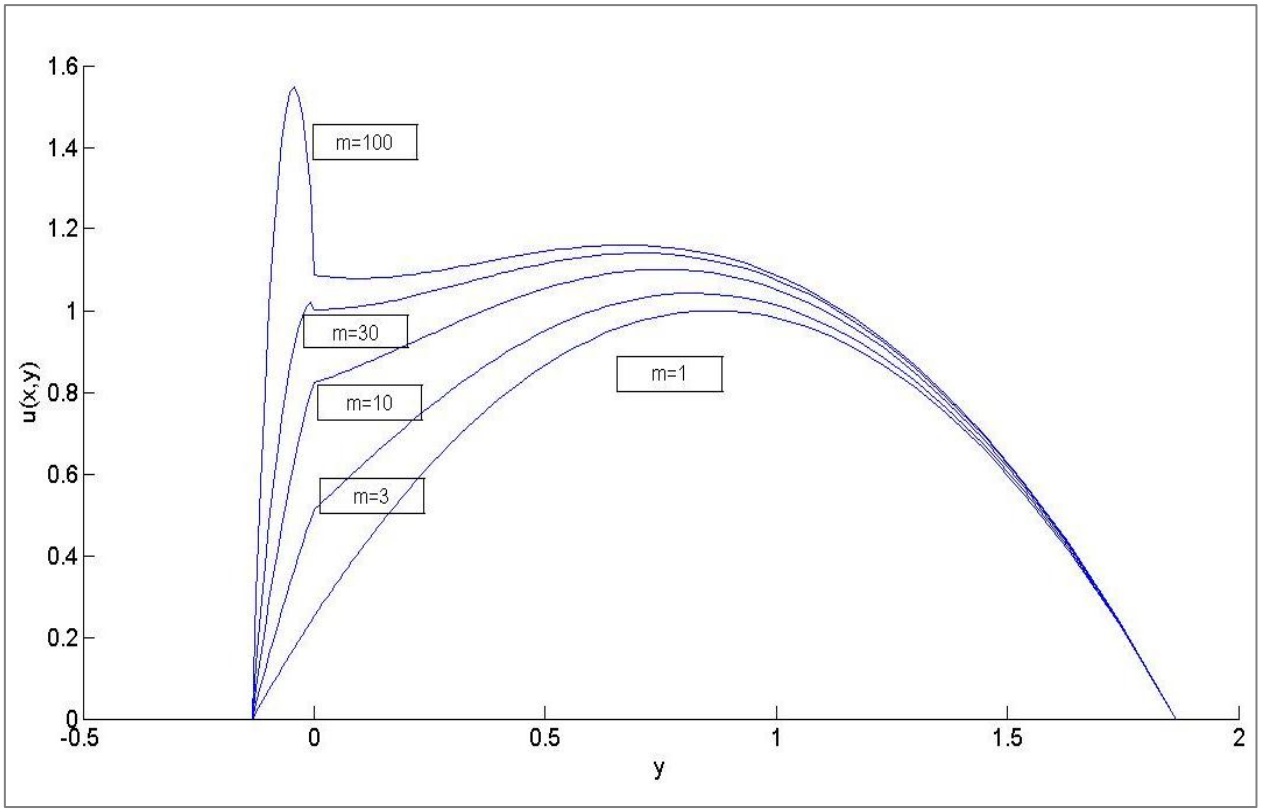


Рис. 9. (Профили скоростей в сечении $x = 0$ при $\phi_0 = \frac{\pi}{6}$)

Данные графики представляют собой профили скоростей, нормированных на вязкость нефти. Рассматривая, например, случай $\phi_0 = \frac{4\pi}{9}$, $\mathrm{m} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = 10$ (рис. 7), можно видеть монотонный рост скорости воды до некоторого максимального значения, затем спад до точки на границе раздела, соответствующей точке $y = 0$, далее в области течения нефти продолжается монотонное убывание скорости до нуля. Сравнивая ряд графиков, к примеру, в случае $\phi_0 = \frac{\pi}{3}$ (рис. 8) для различных отношений вязкостей, необходимо заметить, что с ростом $\mathrm{m} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ происходит неограниченный рост скорости течения воды, однако, это не влечет за собой неограниченного роста скорости нефти. Напротив, профили скоростей нефти находятся в ограниченном диапазоне и сходятся друг к другу с

определенного момента $y=1$. Аналогичная картина наблюдается и для остальных положений границы раздела (рис. 7, рис. 9). Далее, после рассмотрения одного из представленных случаев отношения вязкости фаз $\mathrm{m}=\frac{\mu_1}{\mu_2}=30$ для трех положений границы раздела $\phi_0=\frac{4\pi}{9}$, $\phi_0=\frac{\pi}{3}$, $\phi_0=\frac{\pi}{6}$ можно сделать вывод, что вместе с ростом доли воды в трубе происходит рост максимального значения скорости нефти.

На рис. 10, 11, 12 также представлены профили скоростей в среднем сечении $x=0$. Данные графики в отличие от приведенных выше являются профилями скоростей, нормированных на вязкость воды. Для каждого из положений границы раздела $\phi_0=\frac{4\pi}{9}$, $\phi_0=\frac{\pi}{3}$, $\phi_0=\frac{\pi}{6}$ (рис. 10, рис 11, рис.12 соответственно) характерны:

- параболическая форма профиля при $\mathrm{m}=\frac{\mu_1}{\mu_2}=1$,
- некоторый предельный случай $\mathrm{m}=\infty$, при котором движение воды не влияет на движение нефти (нефть, в свою очередь, остается неподвижной).

Видно, что с уменьшением отношения вязкостей движение нефти становится все более интенсивным. Таким образом, вода представляет собой жидкую смазку, разгоняющую нефть.

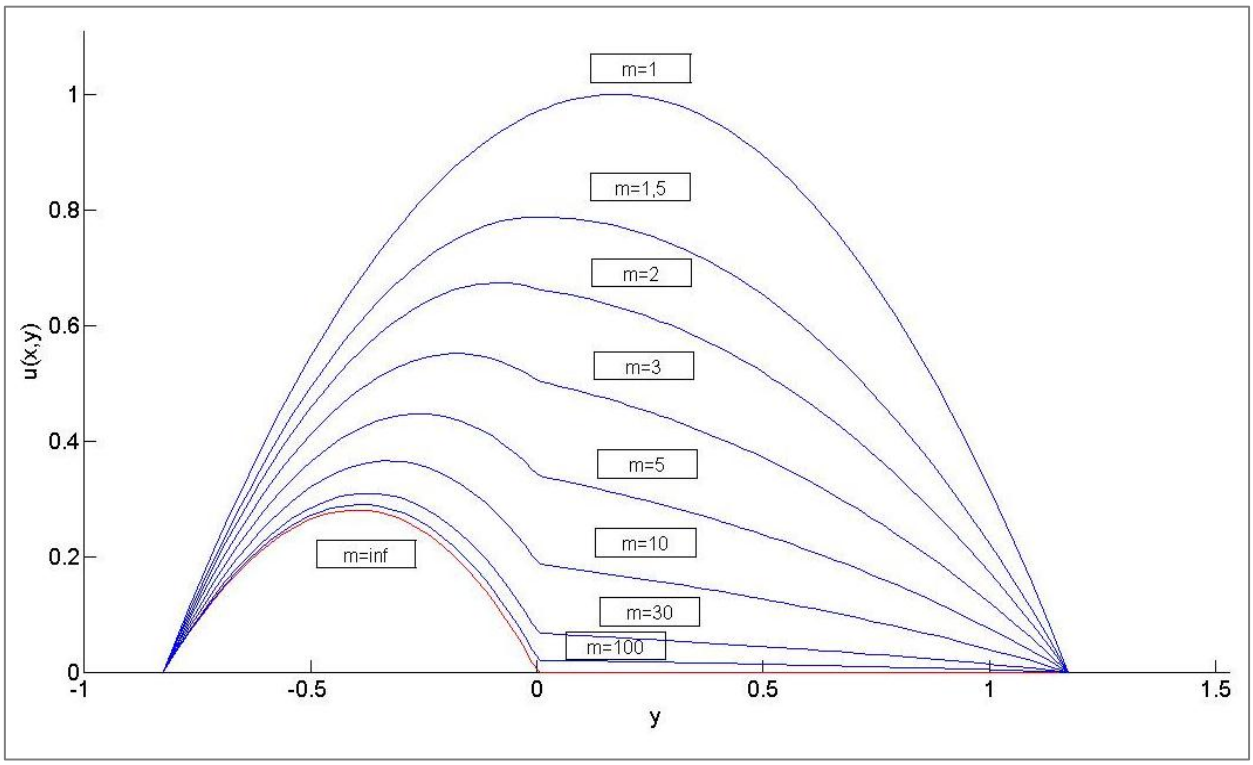


Рис. 10. (Профили скоростей в сечении $x = 0$ при $\phi_0 = \dfrac{4\pi}{9}$)

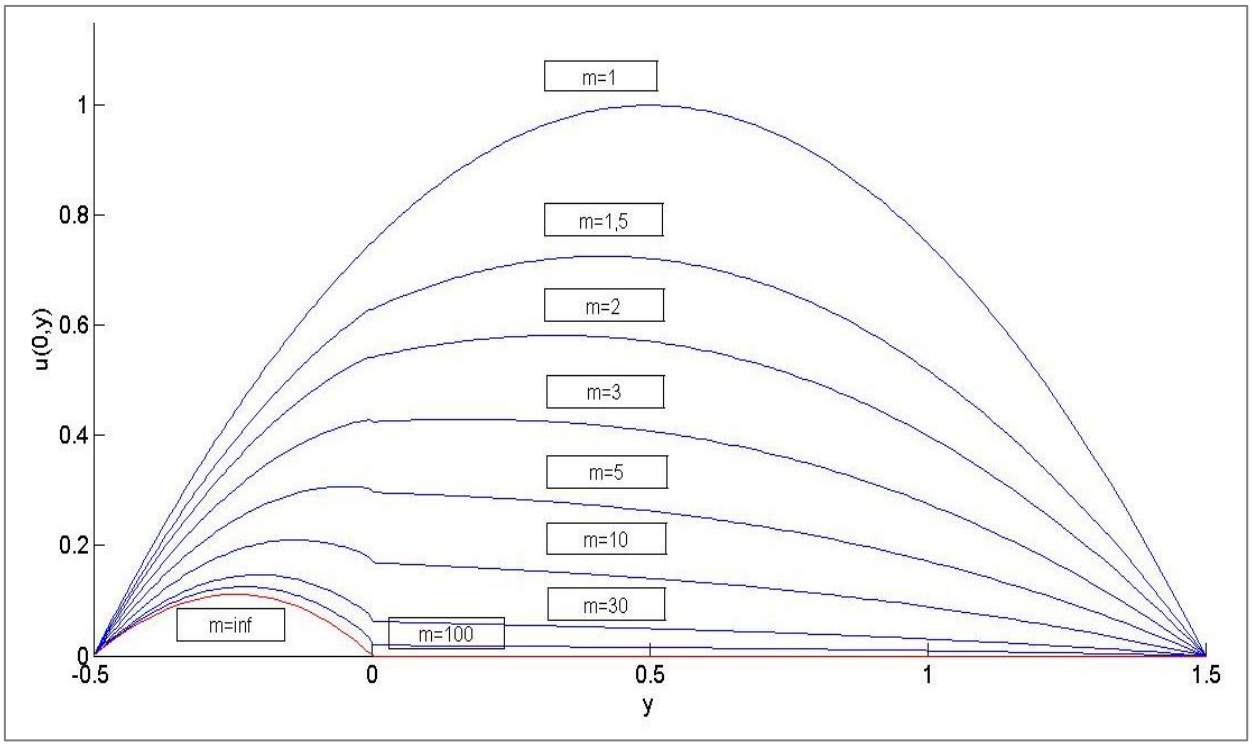


Рис. 11. (Профили скоростей в сечении $x = 0$ при $\phi_0 = \dfrac{\pi}{3}$)

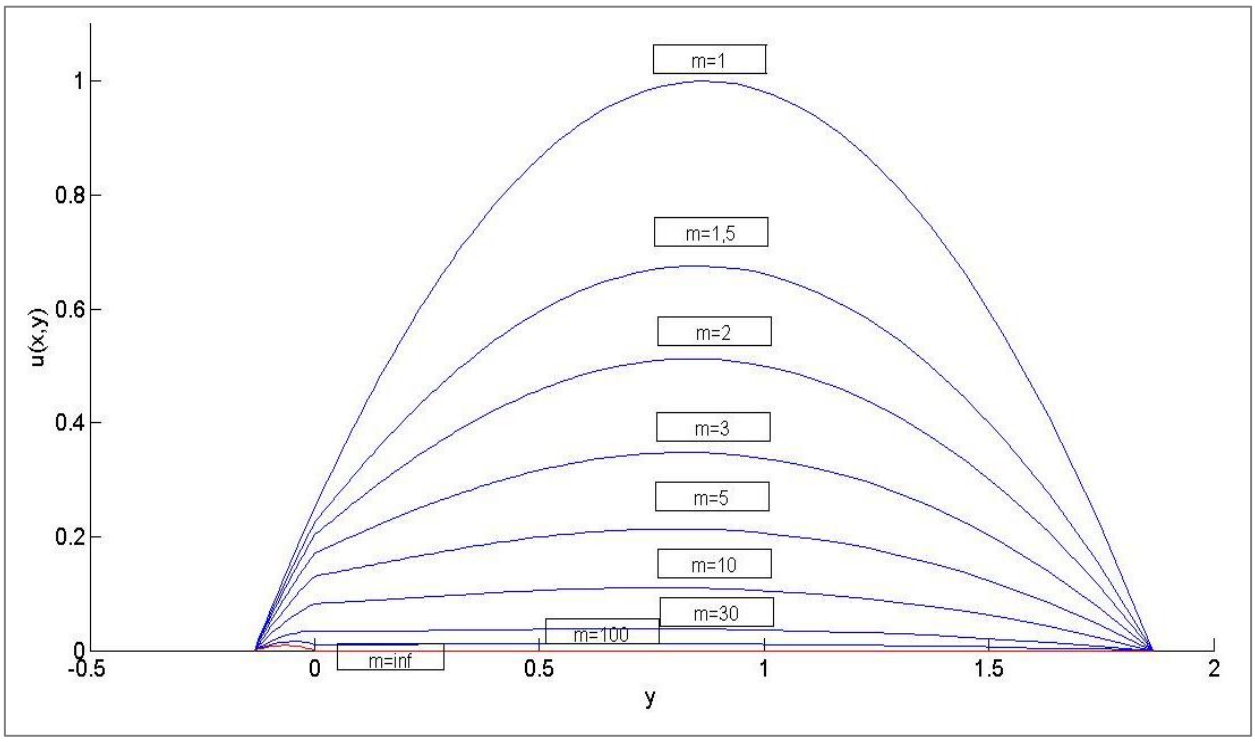


Рис. 12. (Профили скоростей в сечении $x = 0$ при $\phi_0 = \frac{\pi}{6}$)

Ниже, на рис. 13-16 изображены поля скоростей на правой половине поперечного сечения трубы (рис. 3) для двух положений границы раздела фаз $\phi_0 = \frac{\pi}{3}$, $\phi_0 = \frac{4\pi}{9}$ и для двух значений отношения вязкостей $\mathrm{m} = 10$, $\mathrm{m} = 100$. На рис. 13, рис. 16 видно, что с приближением к точке $(a, 0)$ в плоскости раздела $y = 0$ наблюдается монотонный спад скорости до нуля. Аналогичный спад наблюдается и в любой другой плоскости, параллельной плоскости раздела фаз. Рассматривая пары рис.13, рис.14 и рис.15, рис.16, следует отметить, что увеличению $\mathrm{m} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ в 10 раз соответствует рост скоростей воды в 6 и 8 раз соответственно, что не влечет за собой роста скорости нефти. Если сопоставить графики на рис. 13 и 14 (или 14 и 16), то можно видеть, что при перемещении уровня воды к центру трубы пик скорости по воде растет.

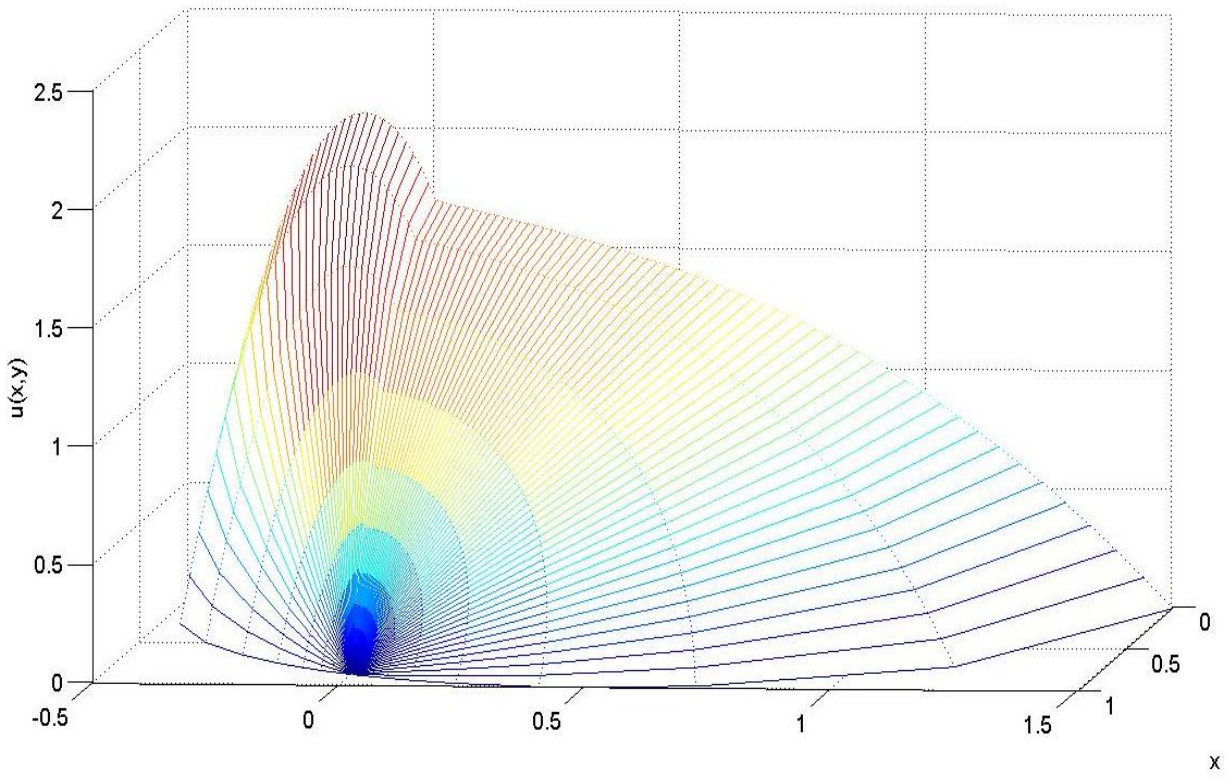


Рис. 13. (Поле скоростей на половине круга при $m = 10$ и $\phi_0 = \frac{\pi}{3}$)

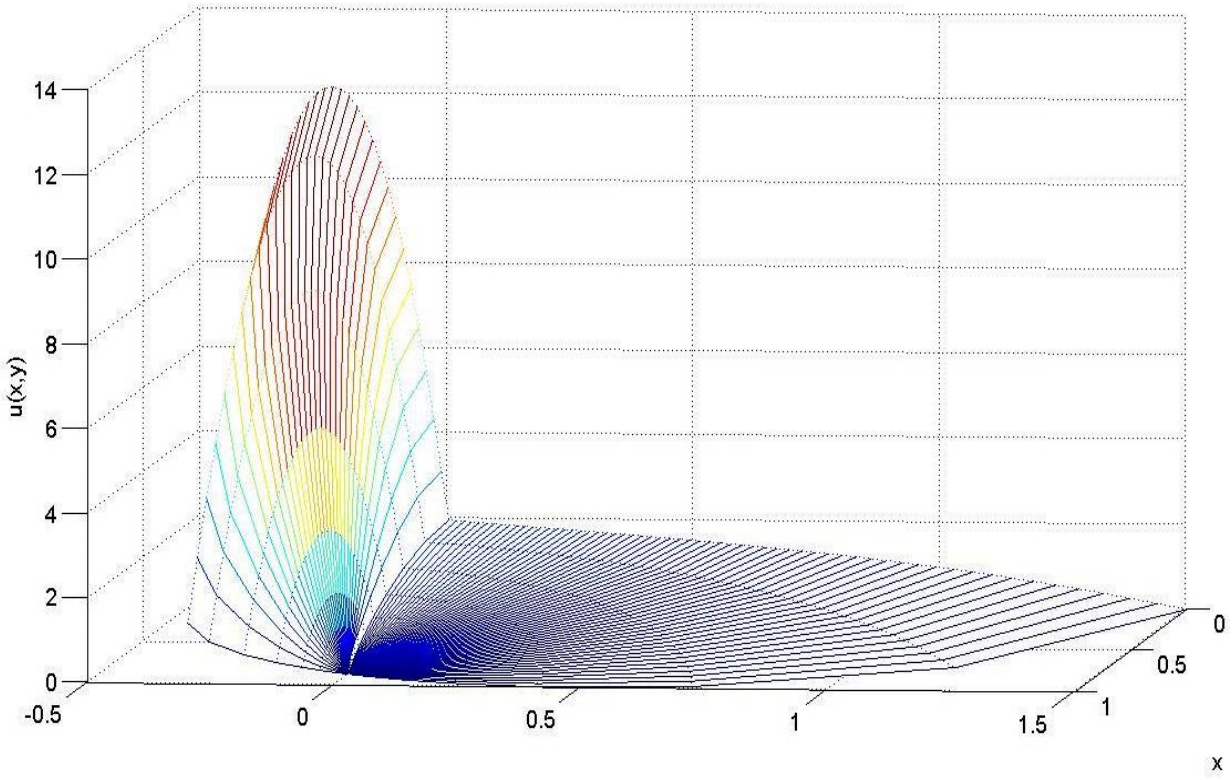


Рис. 14. (Поле скоростей на половине круга при $m = 100$ и $\phi_0 = \frac{\pi}{3}$)

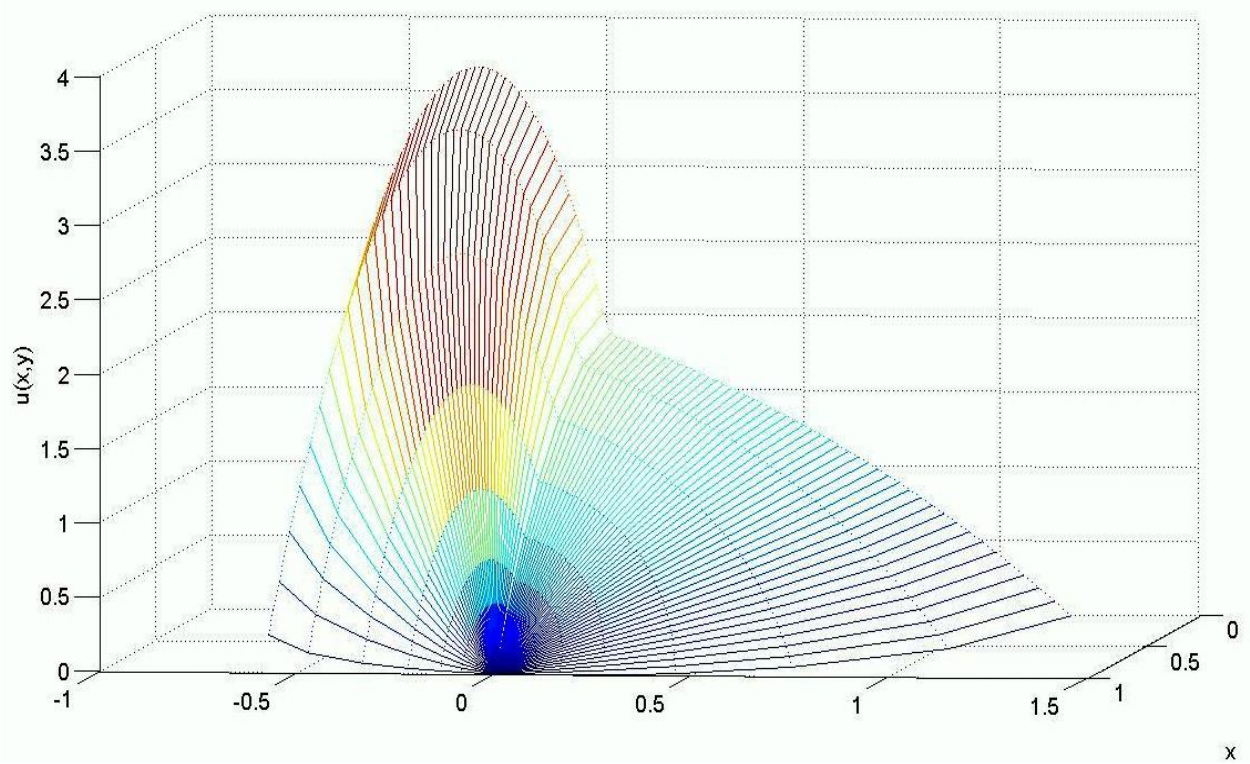


Рис. 15. (Поле скоростей на половине круга при $m = 10$ и $\phi_0 = \frac{4\pi}{9}$)

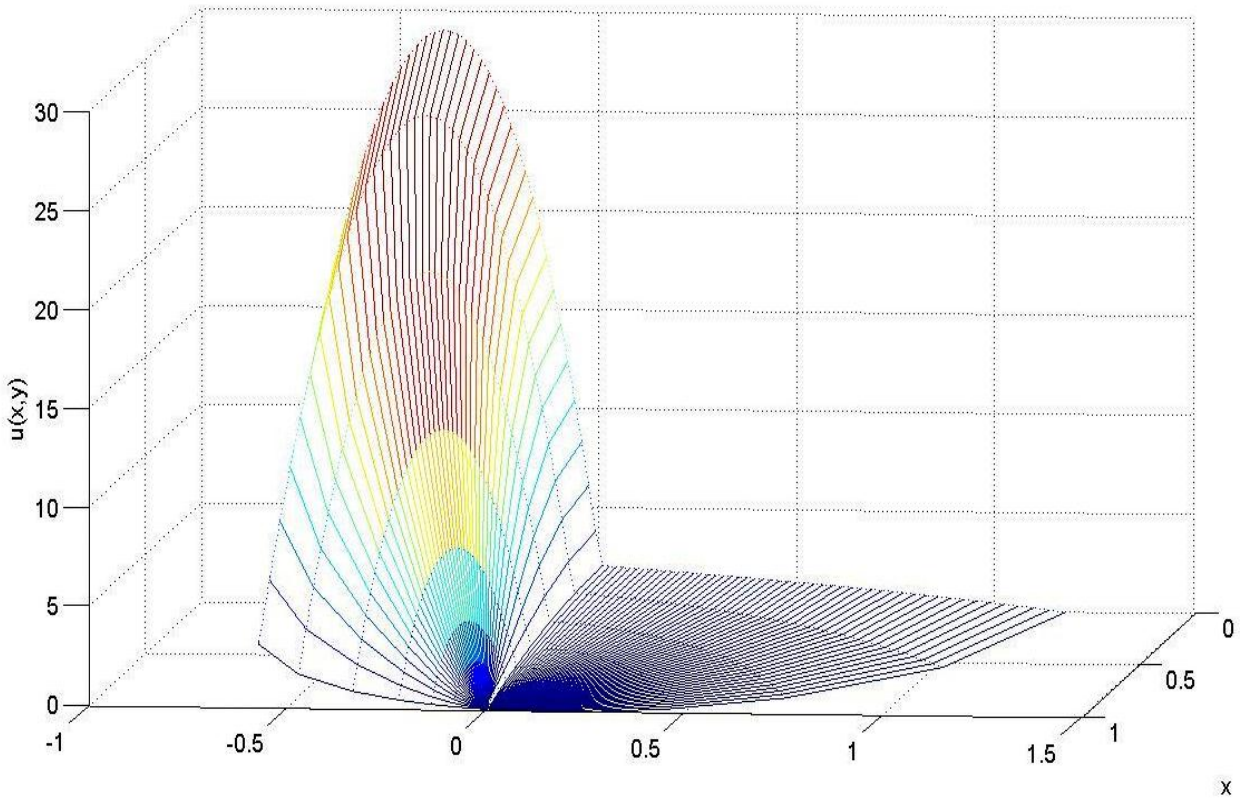


Рис. 16. (Поле скоростей на половине круга при $m = 100$ и $\phi_0 = \frac{4\pi}{9}$)

ПРИЛОЖЕНИЕ А

```
close all
clear all
n=1024*4;
A=4*pi; % oblast' omega
hom=A/(n-1); % shag po omega
X=2*pi*(n-1)*(n-1)/(n*A); % oblast' ksi
hksi=X/(n-1); % shag po ksi
ksi=linspace(0,X,n);
om=linspace(0,A,n);
m=1000; % otnoshenie vayzkostei (m oil / m water)
f0=pi/3; % ygol, opredelyaushi polojenie razdela faz
f=linspace(f0,f0+pi,90);

%perehod k decart sist
r=sin(f0);
for i=1:length(ksi)
   for j=1:length(f)
x(i,j)=r*sinh(ksi(i))/(cosh(ksi(i))-cos(f(j)));
y(i,j)=r*sin(f(j))/(cosh(ksi(i))-cos(f(j)));
   end
end

%vichislenie podintegral'nih func w1(om, f), w2(om, f), w2_inf(om, f) (dla slychia
m=inf)
for j=1:length(f)

if f(j) <= pi
w1(j,1)=(f(j)-f0)/(pi*(pi+f0*(m-1)));
end
```

```
if f(j) >= pi
w2(j,1)=-(f(j)-f0-pi)/(pi*(pi+f0*(m-1)));
w2_inf(j,1)=-(f(j)-f0-pi)/(pi*f0);
end
w(j,1)=f0/(pi*(pi+f0*(m-1)));

for i=2:length(om)

if f(j) <= pi
w1(j,i)=om(i)*sinh(om(i)*(f(j)-f0))/(tanh(om(i)*(pi-
f0))+m*tanh(om(i)*(f0)))/(sinh(pi*om(i))*cosh(om(i)*(pi-f0)));
end

if f(j) >= pi
w2(j,i)=om(i)*sinh(om(i)*(f(j)-f0-pi))/(tanh(om(i)*(pi-
f0))+m*tanh(om(i)*(f0)))/(sinh(pi*om(i))*cosh(om(i)*(-f0)));
w2_inf(j,i)=-om(i)*sinh(om(i)*(f(j)-f0-
pi))/(tanh(om(i)*f0))/(sinh(pi*om(i))*cosh(om(i)*(-f0)));
end

end
end

for j=1:length(f)
   if f(j) <= pi
w1(j,1)=w1(j,1)/2;
w1(j,n)=w1(j,n)/2;
   end
   if f(j) >= pi
w2(j,1)=w2(j,1)/2;
w2(j,n)=w2(j,n)/2;
```

```
w2_inf(j,1)=w2(j,1)/2;
w2_inf(j,n)=w2(j,n)/2;
    end
end
w1=w1';
w2=w2';

w2_inf=w2_inf';

%vichislenie integrala
g1=hom*real(fft(w1,n));
g2=hom*real(fft(w2,n));
g2_inf=hom*real(fft(w2_inf,n));

%vichislenie skorostei faz (u1-verhnya, n2-nijnay)
for i=1:length(ksi)
for j=1:length(f)

if f(j) <= pi
u(i,j)=2*sin(f0)*(sin(f(j)-f0)/(cosh(ksi(i))-cos(f(j)))+2*(1-m)*sin(pi-
f0)/cos(pi)*g1(i,j));
end

if f(j) > pi
u(i,j)=2*m*sin(f0)*(sin(f(j)-f0)/(cosh(ksi(i))-cos(f(j)))+2*(1-m)*sin(pi-
f0)/cos(pi)*g2(i,j));
end

end
end

% obrezka po ksi
```

```
N=n^(0.5);
for i=1:N
    for j=1:length(f)
X(i,j)=x(i,j);
Y(i,j)=y(i,j);
U(i,j)=u(i,j);
    end
end


 %perexod v decart sist

 %postroenie skorostei v sechenii pri x=0
 %figure(1)
%hold on
%plot(y(1,:),u(1,:)/m)
%plot(y(1,:),u(1,:))

%postroenie skorostei (u_inf) v sechenii pri x=0 i m=inf
for i=1:length(ksi)
for j=1:length(f)

if f(j) <= pi
u_inf(i,j)=0;
end

if f(j) > pi
u_inf(i,j)=2*sin(f0)*(sin(f(j)-f0)/(cosh(ksi(i))-cos(f(j)))+2*sin(pi-
f0)/cos(pi)*g2_inf(i,j));
end

end
```

```
end
figure(2)
%plot(y(1,:),u_inf(1,:),'r')

%postroenie skorostei v sechenii pri y=0 dla opredeleniya N (obrezka po ksi)
%figure(2)
%plot(X(:,60),U(:,60))

%posnroenie skorosti 3D
%mesh(x,y,u)
%jet=flipud(colormap('jet'));

%figure(3)
%mesh(x,y,u)
%hold on
%figure(3)
%mesh(X,Y,U)
% mesh(X,Y,U,'MeshStyle','row','Linestyle',':') % izolinii Y
%  hold on
%  mesh(X,Y,U,'MeshStyle','column','Linestyle','-') % izolinii X
  %colormap(jet)
```

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Аналитически решена задача о стратифицированном установившемся течении вязкой двухфазной жидкости в горизонтально расположенной цилиндрической трубе круглого поперечного сечения.

На основании перехода из декартовой в бицилиндрическую систему координат, с последующим использованием преобразования Фурье была составлена программа в пакете Matlab. Построены зависимости скоростей от отношения вязкостей фаз, а также от положения границы раздела.

При течении нефти по трубе в нее выгодно добавлять некоторое количество воды, имеющей меньшую вязкость. Показано, что при достаточно небольшом отношении вязкостей вода, находящаяся в нижней части трубы и движущаяся со значительно большей средней скоростью, выступает в роли жидкой смазки при движении нефти, завлекая ее за собой на межфазной границе. Данный факт обеспечивает значительный прирост расхода нефти. Таким образом, уменьшению отношения вязкостей фаз (в частности, уменьшению вязкости нефти) соответствует увеличение расхода.

Список литературы

1) Brauner, N., and Moalem Maron, D. (1992). Flow pattern transitions in two phase liquid-liquid horizontal tubes // International Journal of Multiphase Flow 18:123-140.
2) Angeli, P., and Hewitt, G.F. (2000). Flow structure in horizontal oil-water flow.// International Journal Multiphase Flow 26:1117-1140
3) Brauner, N., Rovinsky, J., and Moalem Maron, D. (1996a). Analytical solution for laminar-laminar two-phase stratified flow in circular conduits. Chemical Engineering Comm. 141-142, 103-143.
4) Bentwich, M. (1964). Two-phase axial flow in pipe. Trans. of the ASME. Series D 84(4):669-672.
5) Ng, T.S., Lawrence, C.J., Hewitt, G.F. (2002). Laminar stratified pipeflow.// International Journal Multiphase Flow 28(6):963-996.
6) Brauner, N. (2002). Modelling and Control of Two-Phase Phenomena:Liquid-Liquid Two-Phase Flow Systems. Ed. V Bertola, CISM Center, Udine, Italy.
7) M.M. Awad, Jan Taler, Dawid Taler, N. Kazi. (2012). An Overview of Heat Transfer Phenomena. Chapter 11 (Two-Phase Flow)