ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 10 (521)

УДК 517.977

*А.Г. ИВАНОВ*

# ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА СДВИГОВ И СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В классе обобщенных управлений[1] (мер) приведены достаточные условия существования оптимального процесса в смысле работы ([8], с. 525) и в терминах динамической системы сдвигов, определенной на множестве допустимых процессов нелинейной системы управления, указаны достаточные условия существования почти периодического (п. п.) магистрального процесса, являющегося решением задачи оптимального управления п. п. движениями.

**1.** Пусть $\mathbb{R}^n$ — $n$-мерное евклидово пространство со стандартной нормой, $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ — пространство линейных операторов $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ с нормой $|L|\doteq\max\limits_{|x|\le 1}|Lx|$. Через $\mathfrak{V}_{n,\mathbb{T}}\doteq\mathfrak{V}(\mathbb{T}\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n)$, где $\mathfrak{U}\in\mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$, а в качестве $\mathbb{T}$ рассматривается либо отрезок прямой, либо вся прямая, обозначим совокупность функций $\varphi:\mathbb{T}\times\mathfrak{U}\to\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условиям $\varphi(t,\cdot)\in C(\mathfrak{U},\mathbb{R}^n)$ при п. в. $t\in\mathbb{T}$, для каждого $u\in\mathfrak{U}$ отображение $t\mapsto\varphi(t,u)$ измеримо (по Лебегу) и существует такая функция $\psi_\varphi\in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{T},\mathbb{R}_+)$ ($\mathbb{R}_+\doteq[0,\infty)$), что $\max\limits_{u\in\mathfrak{U}}|\varphi(t,u)|\le\psi_\varphi(t)$ при п. в. $t\in\mathbb{T}$. В $\mathfrak{V}_{n,\mathbb{T}}$ определена норма $\|\cdot\|_{\mathfrak{V}_{n,\mathbb{T}}}$ [2]. В дальнейшем $\mathfrak{V}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n)$ — совокупность таких отображений $\varphi:\mathbb{R}\times\mathfrak{U}\to\mathbb{R}^n$, что $\varphi\in\mathfrak{V}_{n,\mathbb{T}}$ для каждого отрезка $\mathbb{T}\subset\mathbb{R}$, и $(\mathrm{frm}(\mathfrak{U}),|\cdot|_w)$ — нормированное пространство мер Радона на $\mathbb{R}^m$, носитель которых содержится в $\mathfrak{U}$ ([2], с. 297), $\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$ — его подмножество, состоящее из вероятностных мер Радона и $\mathrm{DIR}(\mathfrak{U})$ — совокупность мер Дирака $\delta_u$, сосредоточенных в точках $u\in\mathfrak{U}$; $\mathbb{M}(\mathbb{T},\mathrm{frm}(\mathfrak{U}))$ — совокупность таких измеримых отображений $\mu:\mathbb{T}\to(\mathrm{frm}(\mathfrak{U}),|\cdot|_w)$, что $\|\mu\|_{\mathbb{T}}\doteq\operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in\mathbb{T}}|\mu(t)(\mathfrak{U})|<\infty$ ($|\mu(t)|(\mathfrak{U})$ — вариация меры $\mu(t)\in\mathrm{frm}(\mathfrak{U})$), $\mathcal{M}_{\mathbb{T}}\doteq\mathbb{M}(\mathbb{T},\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$ и $\mathcal{M}_{\mathbb{T}}^{(1)}$ — совокупность измеримых отображений $t\mapsto\delta_{u(t)}\in\mathrm{DIR}(\mathfrak{U})\subset(\mathrm{frm}(\mathfrak{U}),|\cdot|_w)$, которая изоморфна $\mathcal{U}_{\mathbb{T}}$ — множеству измеримых отображений[2] $u:\mathbb{T}\to\mathfrak{U}$ и, следовательно, каждое $u(\cdot)\in\mathcal{U}_{\mathbb{T}}$ можно рассматривать как элемент из $\mathcal{M}_{\mathbb{T}}^{(1)}$, отождествляя его с отображением $t\mapsto\delta_{u(t)}\in\mathrm{DIR}(\mathfrak{U})$. Поскольку $\mathfrak{V}_{1,\mathbb{T}}^*\cong\mathbb{M}(\mathbb{T},\mathrm{frm}(\mathfrak{U}))$, то в $\mathbb{M}(\mathbb{T},\mathrm{frm}(\mathfrak{U}))$ возможно определить (слабую) норму $\|\cdot\|_{w,\mathbb{T}}$, относительно которой множества $\mathcal{M}_{\mathbb{T}}$ и $\mathfrak{S}_1\doteq\{\mu\in\mathbb{M}(\mathbb{T},\mathrm{frm}(\mathfrak{U})):\|\mu\|_{\mathbb{T}}\le 1\}$ компактны, причем, если $\mu_j\in\mathfrak{S}_1$, $j\in\mathbb{Z}_+$, то $\lim\limits_{j\to\infty}\|\mu_j-\mu_0\|_{w,\mathbb{T}}=0$ в том и только том случае, если $\lim\limits_{j\to\infty}\int\limits_{\mathbb{T}}\langle\mu_j(t),\varphi(t,u)\rangle dt=\int\limits_{\mathbb{T}}\langle\mu_0(t),\varphi(t,u)\rangle dt$ $\Big(\langle\mu_j(t),\varphi(t,u)\rangle\doteq\int\limits_{\mathfrak{U}}\varphi(t,u)\mu_j(du),\ j\in\mathbb{Z}_+\Big)$ для каждой функции $\varphi\in\mathfrak{V}_{1,\mathbb{T}}$.

Сейчас фиксируем функцию $f:G\times\mathfrak{U}\to\mathbb{R}^n$ ($G$ — область в $\mathbb{R}^n$), удовлетворяющую условию

1) в каждой точке $(x,u)\in G\times\mathfrak{U}$ существует производная $f'_x(x,u)$ и $f\in C(G\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n)$, $f'_x\in C(G\times\mathfrak{U},\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n))$, и рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x}=\langle\mu(t),f(x,u)\rangle dt\doteq\int_{\mathfrak{U}}f(x,u)\mu(t)(du),\quad \mu(\cdot)\in\mathcal{M}_{\mathbb{T}},\tag{1.1}$$

[1]О важности процедуры расширения или овыпуклення в задачах оптимального управления см., напр., [1]–[5], а в игровых задачах — [6], [7].

[2]Этот факт и приведенные ниже свойства пространства $\mathbb{M}(\mathbb{T},\mathrm{frm}(\mathfrak{U}))$ в случае, когда в качестве $\mathbb{T}$ рассматривается отрезок прямой, приведены в [2] и без труда переносятся на случай, когда $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ (напр., [9]).

для которой через $\mathfrak{A}_c(\mathbb{T})$ обозначим совокупность (допустимых) пар $(x(\cdot),\mu(\cdot))$, в которых $x(t)$, $t\in\mathbb{T}$, — решение системы (1.3), отвечающее (обобщенному) управлению $\mu(\cdot)\in\mathcal{M}_{\mathbb{T}}$, такое, что $\overline{\mathrm{orb}}(x;\mathbb{T})\subset G$, где $\overline{\mathrm{orb}}(x;\mathbb{T})$ — замыкание в $\mathbb{R}^n$ множества $\mathrm{orb}(x;\mathbb{T})\doteq\{x(t),\ t\in\mathbb{T}\}$ и для заданного $X\in\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ полагаем $\mathfrak{A}_c(\mathbb{T};X)\doteq\{(x(\cdot),\mu(\cdot))\in\mathfrak{A}_c(\mathbb{T}):\overline{\mathrm{orb}}(x;\mathbb{T})\subset X\}$.

Из определения $\mathfrak{A}_c(\mathbb{T};X)$, используя теорему Арцеля–Асколи, компактность множества $\mathcal{M}_{\mathbb{T}}\subset(\mathbb{M}(\mathbb{T},\mathrm{frm}(\mathfrak{U})),\|\cdot\|_{w,\mathbb{T}})$, учитывая, что равенство $\lim\limits_{j\to\infty}\|\mu_j-\mu_0\|_{w,\mathbb{T}}=0$, $\{\mu_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}\subset\mathcal{M}_{\mathbb{T}}$, где $\mathbb{T}\doteq[t_0,t_1]$, влечет (напр., [3]) равенство $\lim\limits_{j\to\infty}\Big(\max\limits_{t\in[t_0,t_1]}\int\limits_{t_0}^{t}\langle\mu_j(t)-\mu_0(t),\varphi(t,u)\rangle dt\Big)=0$ для каждой функции $\varphi\in\mathfrak{V}_{n,\mathbb{T}}$, получаем следующее утверждение.

**Лемма 1.1.** *Для каждого отрезка $\mathbb{T}\subset\mathbb{R}$ множество $\mathfrak{A}_c(\mathbb{T};X)\subset C(\mathbb{T},\mathbb{R}^n)\times\mathcal{M}_{\mathbb{T}}$ (секвенциально) компактно.*

Далее, на $\mathfrak{A}_c[t_0,t_1]$ зададим функционал

$$(x(\cdot),\mu(\cdot))\mapsto\mathfrak{T}(x(\cdot),\mu(\cdot);t_0,t_1)\doteq\int_{t_0}^{t_1}\langle\mu(t),g(x(t),u)\rangle dt, \tag{1.2}$$

где $g\in C(G\times\mathfrak{U},\mathbb{R})$, который, как несложно показать, непрерывен на $C(\mathbb{T},\mathbb{R}^n)\times\mathcal{M}_{\mathbb{T}}$. Поэтому по лемме 1.1 в силу теоремы Вейерштрасса получается

**Лемма 1.2.** *Для каждого отрезка $[t_0,t_1]$ (глобальное) решение задачи*

$$\mathfrak{T}(x(\cdot),\mu(\cdot);t_0,t_1)\to\min,\quad(x(\cdot),\mu(\cdot))\in\mathfrak{A}_c([t_0,t_1];X) \tag{1.3}$$

*существует.*

Совокупность решений задачи (1.3) обозначим через $\mathcal{R}[t_0,t_1]$.

По аналогии с определением в ([8], с. 24) дадим

**Определение 1.1.** Допустимый процесс $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in\mathfrak{A}_c[t_0,t_1]$ системы (1.1) называется оптимальным для задачи $\mathfrak{T}(x(\cdot),\mu(\cdot);t_0,t_1)\to\min$, $(x(\cdot),\mu(\cdot))\in\mathfrak{A}_c[t_0,t_1]$, если для любого другого процесса $(x(\cdot),\mu(\cdot))\in\mathfrak{A}_c[t_0,t_1]$ такого, что $x(t_0)=\widehat{x}(t_0)$, $x(t_1)=\widehat{x}(t_1)$, выполнено неравенство $\mathfrak{T}(x(\cdot),\mu(\cdot);t_0,t_1)\geq\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot);t_0,t_1)$.

Совокупность решений указанной в определении 1.1 задачи обозначим через $O\mathcal{P}[t_0,t_1]$ и положим

$$O\mathcal{P}(\mathbb{R})\doteq\{(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in\mathfrak{A}_c(\mathbb{R}):\ \text{для каждого }[t_0,t_1]\subset\mathbb{R}\ (\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))|_{[t_0,t_1]}\in O\mathcal{P}[t_0,t_1]\}. \tag{1.4}$$

Совокупность решений задачи (1.3) в смысле определения 1.1 обозначим через $O\mathcal{P}([t_0,t_1];X)$ и аналогично $O\mathcal{P}(\mathbb{R})$ определяем множество $O\mathcal{P}(\mathbb{R};X)\subset\mathfrak{A}_c(\mathbb{R};X)$.

**Замечание 1.1.** Поскольку $\mathcal{R}[t_0,t_1]\subset O\mathcal{P}([t_0,t_1];X)$, а сужение $(x(\cdot),\mu(\cdot))|_{[t_0',t_1']}$ решения $(x(\cdot),\mu(\cdot))\in O\mathcal{P}([t_0,t_1];X)$ на каждый подотрезок $[t_0',t_1']\subset[t_0,t_1]$ принадлежит $O\mathcal{P}([t_0',t_1'];X)$ ([8], с. 24), то и сужение пары $(x(\cdot),\mu(\cdot))\in\mathcal{R}[t_0,t_1]$ на каждый подотрезок $[t_0',t_1']\subset[t_0,t_1]$ также принадлежит $O\mathcal{P}([t_0',t_1'];X)$.

Всюду далее, не оговаривая, предполагаем, что $X\in\mathrm{comp}(G)$ такое, что для каждого отрезка $\mathbb{T}\subset\mathbb{R}$ множество $\mathfrak{A}_c(\mathbb{T};X)\neq\emptyset$. Такое множество существует, если, например, система (1.1) имеет процесс $(x(\cdot),\mu(\cdot))\in\mathfrak{A}_c(\mathbb{R})$, в котором $\overline{\mathrm{orb}}(x)\doteq\overline{\mathrm{orb}}(x;\mathbb{R})\in\mathrm{comp}(G)$. В этом случае в качестве множества $X$ достаточно рассмотреть любую компактную окрестность $\overline{\mathrm{orb}}(x)$, содержащуюся в $G$.

**Лемма 1.3.** *Для любой системы отрезков $\mathbb{T}_1\subset\mathbb{T}_2\subset\cdots$, исчерпывающей $\mathbb{R}$, существует последовательность $(x_j(\cdot),\mu_j(\cdot))\in O\mathcal{P}(\mathbb{T}_j;X)$, $j\in\mathbb{N}$, сходящаяся на каждом отрезке $\mathbb{T}\subset\mathbb{R}$ в топологии пространства $C(\mathbb{T},\mathbb{R}^n)\times\mathcal{M}_{\mathbb{T}}$ к некоторому процессу $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in\mathfrak{A}_c(\mathbb{R};X)$.*

**Доказательство.** Рассмотрим последовательность $\{(\widehat{x}_j(\cdot),\widehat{\mu}_j(\cdot))\}_{j=1}^{\infty}$, составленную из решений (см. лемму 1.2) задачи (1.3) на $\mathfrak{A}_c(\mathbb{T}_j;X)$, $j\in\mathbb{N}$. По лемме 1.1 из этой последовательности можно извлечь подпоследовательность $\{(\widehat{x}_j^{(1)}(\cdot),\widehat{\mu}_j^{(1)}(\cdot))\}_{j=1}^{\infty}$, сходящуюся при $j\to\infty$ в пространстве $C(\mathbb{T}_1)\times\mathcal{M}_{\mathbb{T}_1}$ $(C(\mathbb{T}_1)\doteq C(\mathbb{T}_1,\mathbb{R}^n))$ к некоторому процессу $(z_1(\cdot),\nu_1(\cdot))\in\mathfrak{A}_c(\mathbb{T}_1;X)$ и, кроме того (см. замечание 1.1), $(\widehat{x}_j^{(1)}(\cdot),\widehat{\mu}_j^{(1)}(\cdot))\in O\mathcal{P}(\mathbb{T}_1;X)$, $j\in\mathbb{N}$. Снова по лемме 1.1 из последовательности $\{(\widehat{x}_j^{(1)}(\cdot),\widehat{\mu}_j^{(1)}(\cdot))\}_{j=1}^{\infty}$ извлекаем подпоследовательность $(\widehat{x}_j^{(2)}(\cdot),\widehat{\mu}_j^{(2)}(\cdot))\in O\mathcal{P}(\mathbb{T}_2;X)$, $j\in\mathbb{N}$, сходящуюся при $j\to\infty$ в пространстве $C(\mathbb{T}_2)\times\mathcal{M}_{\mathbb{T}_2}$ к некоторому процессу $(z_2(\cdot),\nu_2(\cdot))\in\mathfrak{A}_c(\mathbb{T}_2;X)$. Продолжив указанную процедуру, получим совокупность последовательностей $\{(\widehat{x}_j^{(i+1)}(\cdot),\widehat{\mu}_j^{(i+1)}(\cdot))\}_{j=1}^{\infty}\subset\{(\widehat{x}_j^{(i)}(\cdot),\widehat{\mu}_j^{(i)}(\cdot))\}_{j=1}^{\infty}$, $i\in\mathbb{N}$, такую, что $(\widehat{x}_j^{(i)}(\cdot),\widehat{\mu}_j^{(i)}(\cdot))\in O\mathcal{P}(\mathbb{T};X)$, $j\in\mathbb{N}$, при каждом $i\in\mathbb{N}$ и всяком $\mathbb{T}\subset\mathbb{T}_i$ и сходящуюся при $j\to\infty$ в пространстве $C(\mathbb{T}_i)\times\mathcal{M}_{\mathbb{T}_i}$ к некоторому процессу $(z_i(\cdot),\nu_i(\cdot))\in\mathfrak{A}_c(\mathbb{T}_i;X)$. Поскольку $(z_i(\cdot),\nu_i(\cdot))|_{\mathbb{T}_l}=(z_l(\cdot),\nu_l(\cdot))$, $l=1,\dots,i-1$, то процесс $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in\mathfrak{A}_c(\mathbb{R};X)$ такой, что $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))|_{\mathbb{T}_k}=(z_k(\cdot),\nu_k(\cdot))$, $k\in\mathbb{N}$, и последовательность $(x_j(\cdot),\mu_j(\cdot))\doteq(\widehat{x}_j^{(j)}(\cdot),\widehat{\mu}_j^{(j)}(\cdot))$, $j\in\mathbb{N}$, искомые. $\square$

**2.** Далее используем следующие два определения.

**Определение 2.1.** Пусть заданы процесс $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in\mathfrak{A}_c(\mathbb{R})$ и числа $\varepsilon$, $\vartheta$, $\eta>0$. Система (1.1) называется $\varepsilon,\vartheta,\eta$-равномерно локально управляемой ($\varepsilon,\vartheta,\eta$-РЛУ) на $\operatorname{orb}(\widehat{x};[\tau_0,\infty))$, если при каждом $\tau\geq\tau_0$ для любого $x_0\in O_\varepsilon[\widehat{x}(\tau)]\doteq\{x\in\mathbb{R}^n:|\widehat{x}(\tau)-x|\leq\varepsilon\}$ найдется такое управление $\mu\in\mathcal{M}_{\tau,\vartheta}\doteq\mathcal{M}_{[\tau,\tau+\vartheta]}$, что $\|\widehat{\mu}-\mu\|_{w,[\tau,\tau+\vartheta]}\leq\eta|\widehat{x}(\tau)-x_0|$ и система (1.1) имеет решение $x(t)$, $\tau\leq t\leq\tau+\vartheta$, удовлетворяющее условиям $x(\tau)=x_0$, $x(\tau+\vartheta)=\widehat{x}(\tau+\vartheta)$. Эта система называется РЛУ на $\operatorname{orb}(\widehat{x};[\tau_0,\infty))$, если существуют такие константы $\varepsilon$, $\vartheta$, $\eta>0$, что она является $\varepsilon,\vartheta,\eta$-РЛУ на $\operatorname{orb}(\widehat{x};[\tau_0,\infty))$.

**Определение 2.2.** Пусть заданы процесс $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in\mathfrak{A}_c(\mathbb{R})$ и числа $\varepsilon$, $\vartheta$, $\eta>0$. Система (1.1) называется $\varepsilon,\vartheta,\eta$-равномерно локально достижимой ($\varepsilon,\vartheta,\eta$-РЛД) с $\operatorname{orb}(\widehat{x};[\tau_0,\infty))$, если при каждом $\tau\geq\tau_0$ для любого $x_0\in O_\varepsilon[\widehat{x}(\tau+\vartheta)]$ найдется такое управление $\mu\in\mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$, что $\|\widehat{\mu}-\mu\|_{w,[\tau,\tau+\vartheta]}\leq\eta|\widehat{x}(\tau+\vartheta)-x_0|$ и система (1.1) имеет решение $x(t)$, $\tau\leq t\leq\tau+\vartheta$, удовлетворяющее условиям $x(\tau)=\widehat{x}(\tau)$, $x(\tau+\vartheta)=x_0$. Система (1.1) называется РЛД с $\operatorname{orb}(\widehat{x};[\tau_0,\infty))$, если существуют такие константы $\varepsilon$, $\vartheta$, $\eta>0$, что она является $\varepsilon,\vartheta,\eta$-РЛД с $\operatorname{orb}(\widehat{x};[\tau_0,\infty))$.

**Замечание 2.1.** Поскольку при каждом $s\in\mathbb{R}$ функция $t\mapsto\widehat{x}_s(t)\doteq\widehat{x}(t+s)$, $t\in[0,\vartheta]$, является решением задачи Коши

$$\dot{x}=\langle\widehat{\mu}_s(t),f(x,u)\rangle,\quad\widehat{\mu}_s(t)\doteq\widehat{\mu}(t+s),\quad t\in[0,\vartheta];$$
$$x(0)=\widehat{x}_s(0),$$

то система (1.1) $\varepsilon,\vartheta,\eta$-РЛУ на $\operatorname{orb}(\widehat{x};[\tau_0,\infty))$ в том и только том случае, если при каждом $\tau\geq\tau_0$ для любого $x_0\in O_\varepsilon[\widehat{x}(\tau)]$ найдется такое $\nu\in\mathcal{M}_{[0,\vartheta]}$, что $\|\widehat{\mu}_\tau-\nu\|_{w,[0,\vartheta]}\leq\eta|\widehat{x}(\tau)-x_0|$ и система (1.1) имеет решение $y(t)$, $0\leq t\leq\vartheta$, удовлетворяющее условиям $y(0)=x_0$, $y(\vartheta)=\widehat{x}(\tau+\vartheta)$.

Аналогичное утверждение имеет место и для РЛД системы (1.1) с $\operatorname{orb}(\widehat{x};[\tau_0,\infty))$.

В дальнейшем важную роль будет играть свойство одновременной РЛУ системы (1.1) на $\operatorname{orb}(\widehat{x};[\tau_0,\infty))$ и ее РЛД с $\operatorname{orb}(\widehat{x};[\tau_0,\infty))$. Для формулировки достаточных условий выполнения этого свойства рассмотрим систему

$$\dot{x}=A(t)x+\langle\Delta\mu(t),f(\widehat{x}(t),u)\rangle,\quad A(t)\doteq\langle\widehat{\mu}(t),f'_x(\widehat{x}(t),u)\rangle,\quad\Delta\mu(t)\doteq\widehat{\mu}(t)-\mu(t),\tag{2.1}$$

которая называется РЛУ (в нуль) на $[\tau_0,\infty)$, если найдутся такие константы $\varepsilon$, $\vartheta>0$, что для каждого $\tau\geq\tau_0$ и всякого $x_0\in O_\varepsilon[0]$ найдется такое $\mu\in\mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$, при котором система (2.1) имеет решение $x(t)$, $\tau\leq t\leq\tau+\vartheta$, удовлетворяющее условиям $x(\tau)=x_0$, $x(\tau+\vartheta)=0$.

Для фиксированной пары $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in\mathfrak{A}_c(\mathbb{R};X)$ выбираем такое $r>0$, что компактное множество

$$K\doteq\overline{\operatorname{orb}}(\widehat{x};\mathbb{R})+O_r[0]\subset G.\tag{2.2}$$

Для непрерывной вместе со своей производной по $x$ функции $f : G \times \mathfrak{U} \to \mathbb{R}^n$ предполагаем выполненным условие

2) существуют такие константы $\widehat{r} \in (0, r]$, $\alpha > 0$ и непрерывная ограниченная функция $(t, u) \mapsto \mathfrak{f}(t, u) \in [\tau_0, \infty)$, что для всех $(t, z, u) \in [\tau_0, \infty) \times O_{\widehat{r}}[0] \times \mathfrak{U}$ выполнено неравенство $\max\limits_{\theta \in [0,1]} |f'_x(\widehat{x}(t) + \theta z, u) - f'_x(\widehat{x}(t), u)| \leq \mathfrak{f}(t, u)|z|^{\alpha}$.

В точности повторив доказательства теорем 2.1 и 4.1 работы [10], заменив $\mathrm{orb}_+(\widehat{x}) \doteq \mathrm{orb}(\widehat{x}; [0, \infty))$ на $\mathrm{orb}(\widehat{x}; [\tau_0, \infty))$, с учетом сделанного в ней замечания 4.2 получаем следующее утверждение.

**Теорема 2.1.** *Пусть функция $f : G \times \mathfrak{U} \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию* 1) *и на процессе $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R}; X)$ выполнено условие* 2). *Тогда, если система* (2.1) *РЛУ на $[\tau_0, \infty)$, то найдутся такие константы $\varepsilon$, $\vartheta$, $\eta > 0$, что система* (1.1) *$\varepsilon, \vartheta, \eta$-РЛУ на $\mathrm{orb}(\widehat{x}; [\tau_0, \infty))$ и $\varepsilon, \vartheta, \eta$-РЛД с $\mathrm{orb}(\widehat{x}; [\tau_0, \infty))$. При этом для каждого $\tau \geq \tau_0$ решение, фигурирующее в определении $\varepsilon, \vartheta, \eta$-РЛУ системы* (1.1) *на $\mathrm{orb}(\widehat{x}; [\tau_0, \infty))$ и $\varepsilon, \vartheta, \eta$-РЛД с $\mathrm{orb}(\widehat{x}; [\tau_0, \infty))$, при всех $t \in [\tau, \tau + \vartheta]$ содержится в $K$.*

В дальнейшем используем следующий вариант леммы 2.2 из [10].

**Лемма 2.1.** *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1 *и последовательность $\{x_0^{(j)}\}_{j=1}^{\infty} \subset O_{\varepsilon}[\widehat{x}(\tau)]$ $(\tau \geq \tau_0)$ такая, что $\lim\limits_{j \to \infty} |x_0^{(j)} - \widehat{x}(\tau)| = 0$. Пусть далее $\mu_j \in \mathcal{M}_{\tau, \vartheta}$ — управление, удовлетворяющее неравенству $\|\widehat{\mu} - \mu_j\|_{w, [\tau, \tau + \vartheta]} \leq \eta |\widehat{x}(\tau) - x_0^{(j)}|$, при котором система* (1.1) *имеет такое решение $x_j(t) \in K$, что $x_j(\tau) = x_0^{(j)}$, $x_j(\tau + \vartheta) = \widehat{x}(\tau + \vartheta)$. Тогда $\lim\limits_{j \to \infty} \|x_j - \widehat{x}\|_{C[\tau, \tau + \vartheta]} = 0$.*

Аналогично доказательству упомянутой леммы из [10] доказывается

**Лемма 2.2.** *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1 *и последовательность $\{x_0^{(j)}\}_{j=1}^{\infty} \subset O_{\varepsilon}[\widehat{x}(\tau + \vartheta)]$ $(\tau \geq \tau_0)$ такая, что $\lim\limits_{j \to \infty} |x_0^{(j)} - \widehat{x}(\tau + \vartheta)| = 0$. Пусть далее $\mu_j \in \mathcal{M}_{\tau, \vartheta}$ — управление, удовлетворяющее неравенству $\|\widehat{\mu} - \mu_j\|_{w, [\tau, \tau + \vartheta]} \leq \eta |\widehat{x}(\tau + \vartheta) - x_0^{(j)}|$, при котором система* (1.1) *имеет такое решение $x_j(t) \in K$, что $x_j(\tau) = \widehat{x}(\tau)$, $x_j(\tau + \vartheta) = x_0^{(j)}$. Тогда $\lim\limits_{j \to \infty} \|x_j - \widehat{x}\|_{C[\tau, \tau + \vartheta]} = 0$.*

**Теорема 2.2.** *Пусть функция $f : G \times \mathfrak{U} \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию* 1) *и последовательность $\{(x_j(\cdot), \mu_j(\cdot))\}_{j=1}^{\infty}$, $(x_j(\cdot), \mu_j(\cdot)) \in O\mathcal{P}(\mathbb{T}_j)$, $\mathbb{T}_j \subset \mathbb{T}_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$ $\left(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \mathbb{T}_j = \mathbb{R}\right)$, сходится на каждом отрезке $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ в пространстве $C(\mathbb{T}) \times \mathcal{M}_{\mathbb{T}}$ к процессу $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R})$, на котором выполнено условие* 2). *Тогда, если система* (2.1) *РЛУ на $[\tau_0, \infty)$, то найдется такое $T_1 > \tau_0$, что $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot))$ принадлежит $O\mathcal{P}[T_1, \infty)$.*

**Доказательство.** По теореме 2.1 найдутся такие константанты $\varepsilon$, $\vartheta$, $\eta > 0$, что система (1.1) будет $\varepsilon, \vartheta, \eta$-РЛУ на $\mathrm{orb}(\widehat{x}; [\tau_0, \infty))$ и $\varepsilon, \vartheta, \eta$-РЛД с $\mathrm{orb}(\widehat{x}; [\tau_0, \infty))$. Полагаем $T_1 \doteq \tau_0 + \vartheta$ и покажем, что $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in O\mathcal{P}[T_1, \infty)$. Действительно, в противном случае найдется отрезок $[t_0, t_1] \subset [T_1, \infty)$ и такой процесс $(x(\cdot), \mu(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c[t_0, t_1]$, что

$$x(t_0) = \widehat{x}(t_0), \ x(t_1) = \widehat{x}(t_1). \tag{2.3}$$

При некотором $\delta > 0$ выполнено неравенство (см. обозначение в (1.2))

$$\mathfrak{T}(x(\cdot), \mu(\cdot); t_0, t_1) < \mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot); t_0, t_1) - \delta. \tag{2.4}$$

В силу условий теоремы 2.2 будет выполняться равенство

$$\lim_{j \to \infty} (\|\widehat{x} - x_j\|_{C(\mathbb{T})} + \|\widehat{\mu} - \mu_j\|_{w, \mathbb{T}}) = 0, \quad \mathbb{T} \doteq [t_0 - \vartheta, t_1 + \vartheta]. \tag{2.5}$$

Поэтому для всех $j$, начиная с некоторого $\widehat{j}\in\mathbb{N}$, $x_j(t)\in O_\varepsilon[\widehat{x}(t)]$ для всех $t\in\mathbb{T}$. Фиксируем теперь $j\ge\widehat{j}$ и для точки $x_j(t_0-\vartheta)\in O_\varepsilon[\widehat{x}(t_0-\vartheta)]$ ($t_0-\vartheta\ge\tau_0$ в силу выбора $T_1$) рассмотрим $\mu_j^+\in\mathcal{M}_{[t_0-\vartheta,t_0]}$, удовлетворяющее неравенству

$$\|\widehat{\mu}-\mu_j^+\|_{w,[t_0-\vartheta,t_0]}\le\eta|\widehat{x}(t_0-\vartheta)-x_j(t_0-\vartheta)|, \tag{2.6}$$

и система (1.1) имеет решение $y_j^+(t)\in O_\varepsilon[\widehat{x}(t)]$, $t\in[t_0-\vartheta,t_0]$, с условиями

$$y_j^+(t_0-\vartheta)=x_j(t_0-\vartheta),\quad y_j^+(t_0)=\widehat{x}(t_0). \tag{2.7}$$

Для точки $x_j(t_1+\vartheta)\in O_\varepsilon[\widehat{x}(t_1+\vartheta)]$ рассмотрим $\mu_j^-\in\mathcal{M}_{[t_1,t_1+\vartheta]}$, удовлетворяющее неравенству

$$\|\widehat{\mu}-\mu_j^-\|_{w,[t_1,t_1+\vartheta]}\le\eta|\widehat{x}(t_1+\vartheta)-x_j(t_1+\vartheta)|, \tag{2.8}$$

и система (1.1) имеет решение $y_j^-(t)\in O_\varepsilon[\widehat{x}(t)]$, $t\in[t_0,t_1+\vartheta]$, с условиями

$$y_j^-(t_1)=\widehat{x}(t_1),\quad y_j^-(t_1+\vartheta)=x_j(t_1+\vartheta). \tag{2.9}$$

Теперь определим

$$\nu_j(t)\doteq\begin{cases}\mu_j^+(t), & t\in[t_0-\vartheta,t_0];\\ \mu(t), & t\in[t_0,t_1];\\ \mu_j^-(t), & t\in[t_1,t_1+\vartheta],\ \nu_j\in\mathcal{M}_{\mathbb{T}}.\end{cases}$$

Тогда (см. (2.3), (2.7) и (2.9)) отвечающее ему решение $y_j^+(t)$, $t\in\mathbb{T}$, системы (1.1) имеет вид

$$y_j(t)\doteq\begin{cases}y_j^+(t), & t\in[t_0-\vartheta,t_0];\\ y(t), & t\in[t_0,t_1];\\ y_j^-(t), & t\in[t_1,t_1+\vartheta],\end{cases}$$

причем

$$y_j(t_0-\vartheta)=x_j(t_0-\vartheta),\quad y_j(t_1+\vartheta)=x_j(t_1+\vartheta).$$

Далее, в силу определения процесса $(y_j(\cdot),\nu_j(\cdot))$ имеем соотношения

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}(y_j(\cdot),\nu_j(\cdot);t_0-\vartheta,t_1+\vartheta)&=\mathfrak{T}(y_j^+(\cdot),\mu_j^+(\cdot);t_0-\vartheta,t_0)+\mathfrak{T}(x(\cdot),\mu(\cdot);t_0,t_1)+\\ &+\mathfrak{T}(y_j^-(\cdot),\nu_j^-(\cdot);t_1,t_1+\vartheta)\overset{(2.4)}{<}\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot);t_0-\vartheta,t_1+\vartheta)-\delta+I_j^{(1)}+I_j^{(2)},\end{aligned}$$

в которых

$$\begin{aligned}I_j^{(1)}&\doteq\int_{t_0-\vartheta}^{t_0}(\langle\mu_j^+(t),g(y_j^+(t),u)\rangle-\langle\widehat{\mu}(t),g(\widehat{x}(t),u)\rangle)dt,\\ I_j^{(2)}&\doteq\int_{t_1}^{t_1+\vartheta}(\langle\mu_j^-(t),g(y_j^-(t),u)\rangle-\langle\widehat{\mu}(t),g(\widehat{x}(t),u)\rangle)dt.\end{aligned}$$

Покажем, что

$$\lim_{j\to\infty}I_j^{(k)}=0,\quad k=1,2. \tag{2.10}$$

Действительно,

$$|I_j^{(1)}|\le\vartheta\omega_{\gamma_j}[g,K\times\mathfrak{U}]+\left|\int_{t_0-\vartheta}^{t_0}\langle\mu_j^+(t)-\widehat{\mu}(t),g(\widehat{x}(t),u)\rangle dt\right|, \tag{2.11}$$

где $\gamma_j\doteq\|y_j^+-\widehat{x}\|_{C[t_0-\vartheta,t_0]}$, а $\omega_{\gamma_j}[g,K\times\mathfrak{U}]$ — $\gamma_j$-колебание непрерывной функции $g$ на компакте $K\times\mathfrak{U}$. По лемме 2.1 в силу (2.5) и (2.7) $\gamma_j\to0$ при $j\to\infty$. Следовательно,

$$\lim_{j\to\infty}\omega_{\gamma_j}[g,K\times\mathfrak{U}]=0, \tag{2.12}$$

а т. к. $\lim\limits_{j\to\infty}\|\mu_j^+-\widehat{\mu}\|_{w,[t_0-\vartheta,t_0]}=0$ (см. (2.5) и (2.6)), то $\lim\limits_{j\to\infty}\Big|\int\limits_{t_0-\vartheta}^{t_0}\langle\mu_j^+(t)-\widehat{\mu}(t),g(\widehat{x}(t),u)\rangle dt\Big|=0.$ Из последнего равенства, учитывая (2.11) и (2.12), получаем (2.10) для $k=1$. Аналогично, используя лемму 2.2, равенства (2.5), (2.9) и неравенство (2.8), доказываем (2.10) при $k=2$. Поэтому найдется такое $j_1\geq\widehat{j}$, что при всех $j\geq j_1$ будет выполнено неравенство

$$\mathfrak{T}(y_j(\cdot),\nu_j(\cdot);t_0-\vartheta,t_1+\vartheta)<\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot);t_0-\vartheta,t_1+\vartheta)-\delta/2. \tag{2.13}$$

С другой стороны, в силу (2.5) $\lim\limits_{j\to\infty}\mathfrak{T}(x_j(\cdot),\mu_j(\cdot);t_0-\vartheta,t_1+\vartheta)=\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot);t_0-\vartheta,t_1+\vartheta)$. Следовательно, $\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot);t_0-\vartheta,t_1+\vartheta)<\mathfrak{T}(x_{j_0}(\cdot),\mu_{j_0}(\cdot);t_0-\vartheta,t_1+\vartheta)+\delta/4$ при некотором $j_0\geq j_1$. Отсюда, учитывая (2.13), получаем

$$\mathfrak{T}(y_{j_0}(\cdot),\nu_{j_0}(\cdot);t_0-\vartheta,t_1+\vartheta)<\mathfrak{T}(x_{j_0}(\cdot),\mu_{j_0}(\cdot);t_0-\vartheta,t_1+\vartheta)-\delta/4<\mathfrak{T}(x_{j_0}(\cdot),\mu_{j_0}(\cdot);t_0-\vartheta,t_1+\vartheta),$$

что противоречит тому, что $(x_{j_0}(\cdot),\mu_{j_0}(\cdot))\in\mathcal{OP}[t_0-\vartheta,t_1+\vartheta]$. $\square$

**Замечание 2.2.** Как показано в лемме 1.3, расширение множества $\mathcal{U}_{\mathbb{T}}$ до $\mathcal{M}_{\mathbb{T}}$ позволяет по любой системе отрезков $\mathbb{T}_1\subset\mathbb{T}_2\subset\cdots$, исчерпывающей $\mathbb{R}$, указать последовательность $(x_j(\cdot),\mu_j(\cdot))\in\mathcal{OP}(\mathbb{T}_j;K)$, $j\in\mathbb{N}$, сходящуюся на каждом отрезке $\mathbb{T}\subset\mathbb{R}$ в топологии пространства $C(\mathbb{T},\mathbb{R}^n)\times\mathcal{M}_{\mathbb{T}}$ к некоторому процессу $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in\mathfrak{A}_c(\mathbb{R};K)$. Как видно из приведенного доказательства теоремы 2.2, этот процесс будет принадлежать множеству $\mathcal{OP}([T_1,\infty);K)$, если указанные при доказательстве этой теоремы решения $y_j^+$ и $y_j^-$, помимо приведенных свойств, еще не должны покидать множество $K$, соответственно, при всех $t\in[t_0-\vartheta,t_0]$ и $t\in[t_1,t_1+\vartheta]$. Проверка такого свойства и достаточные условия его выполнения требуют, вообще говоря, дополнительного исследования. Поэтому в рамках статьи ограничимся рассмотрением оптимального процесса, принадлежащего $\mathcal{OP}[T_1,\infty)$, указанного в теореме 2.2.

В дальнейшем, при описании поведения оптимальных процессов, определенных на $[0,T]$, при $T\to\infty$ (что является одной из основных задач теории магистральных процессов [8] и асимптотически достижимых элементов [11]) важную роль будет играть динамическая система сдвигов, определенная на множестве $\mathfrak{A}_c(\mathbb{R};X)$.

**3.** Пусть $(\mathfrak{Y},\rho)$ — метрическое пространство. Через $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$ обозначим совокупность таких измеримых отображений $f:\mathbb{R}\to\mathfrak{Y}$, что при некотором (а значит, и при любом) $y\in\mathfrak{Y}$ функция $t\mapsto\rho(y,f(t))$ принадлежит пространству $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. На $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$ введем расстояние

$$\varrho(f,g)\doteq\sup_{t\in\mathbb{R}}\left[\min\left\{\int_t^{t+1}\rho(f(s),g(s))ds,\ |t|^{-1}\right\}\right]. \tag{3.1}$$

Несложно показать, что пространство

$$\mathfrak{B}\doteq(L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathfrak{Y}),\varrho) \tag{3.2}$$

является метрическим и неравенство $\varrho(f,g)<\varepsilon$ равносильно выполнению неравенства $\max\limits_{|t|\leq\varepsilon^{-1}}\int\limits_t^{t+1}\rho(f(s),g(s))ds<\varepsilon$. Отсюда в силу неравенств

$$\max_{|t|\leq\vartheta}\int_t^{t+1}\rho(f(s),g(s))ds\leq\mathfrak{p}_\vartheta(f,g)\quad(\vartheta>0),\qquad \mathfrak{p}_\vartheta(f,g)\leq(2\vartheta+1)\max_{|t|\leq\vartheta}\int_t^{t+1}\rho(f(s),g(s))ds\quad(\vartheta\in\mathbb{N}),$$

где здесь и всюду далее

$$\mathfrak{p}_\vartheta(f,g)\doteq\int_{-\vartheta}^{\vartheta+1}\rho(f(s),g(s))ds\quad(\vartheta>0), \tag{3.3}$$

вытекает

**Лемма 3.1.** *Пусть* $(\mathbb{A},\prec)$ *— направленное множество, функции* $f$ *и* $f_\alpha$, $\alpha\in\mathbb{A}$, *принадлежат* $L_1^{\rm loc}(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$. *Тогда* $\lim\limits_{\alpha\in\mathbb{A}}\varrho(f_\alpha,f)=0$ *в том и только том случае, если для каждого* $\vartheta>0$ *выполнено равенство* $\mathfrak{p}_\vartheta(f_\alpha,f)=0$ *или, что равносильно,* $\lim\limits_{\alpha\in\mathbb{A}}\Big(\max\limits_{|t|\le\vartheta}\int\limits_t^{t+1}\rho(f_\alpha(s),f(s))ds\Big)=0.$

С использованием леммы 3.1, теоремы Фреше [12] об изометрии сепарабельного метрического пространства $\mathfrak{Y}$ части некоторого сепарабельного банахового пространства $\mathbb{B}$, которая является замкнутой, если $\mathfrak{Y}$ — полное сепарабельное метрическое пространство, и свойств нормированного пространства $(L_1(\mathbb{T},\mathbb{B}),\|\cdot\|_{L_1})$, где $\mathbb{T}$ — числовой промежуток, доказывается

**Теорема 3.1.** *Пусть метрическое пространство* $\mathfrak{Y}$ *сепарабельно. Тогда* $\lim\limits_{\tau\to0}\varrho(f(\cdot+\tau),f(\cdot))=0$ *для каждой функции* $f\in L_1^{\rm loc}(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$ *и если к тому же пространство* $\mathfrak{Y}$ *полное, то метрическое пространство* $\mathfrak{B}$ *также является полным.*

**Замечание 3.1.** Отметим, что на $L_1^{\rm loc}(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$ определено также $d$-расстояние (или иначе $d_\rho$-расстояние)

$$d(f,g)\doteq\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\rho(f(s),g(s))ds,\quad f,g\in L_1^{\rm loc}(\mathbb{R},\mathfrak{Y}).\tag{3.4}$$

Функция $f\in L_1^{\rm loc}(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$ называется $d$-ограниченной, если $d(\varphi,y){<}\infty$ при некотором $y\in\mathfrak{Y}$. По аналогии со случаем $\mathfrak{Y}=\mathbb{R}$ [13] совокупность $\mathbb{S}(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$ $d$-ограниченных функций из $L_1^{\rm loc}(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$ называем пространством Степанова. Поскольку $\varrho(f,g)\le d(f,g)$ для любых $f,g\in L_1^{\rm loc}(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$, то топология $\mathcal{T}_d$ на $\mathbb{S}(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$, индуцированная метрикой $d$, содержится в топологии $\mathcal{T}_\varrho$, индуцированной метрикой $\varrho$. Отметим также, если $(\mathfrak{Y},\rho)$ — полное сепарабельное метрическое пространство, то пространство $(\mathbb{S}(\mathbb{R},\mathfrak{Y}),d)$ является полным.

Далее, на метрическом пространстве $\mathfrak{B}$ (см. (3.2)) введем однопараметрическое семейство отображений $g^t:\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}$, определенных равенством $g^t(f)=f_t$, $f\in\mathfrak{B}$, где $f_t(\cdot)\doteq f(\cdot+t)$ — сдвиг на $t\in\mathbb{R}$ функции $f(\cdot)$, и в дальнейшем через ${\rm orb}_g(f)$ и ${\rm orb}_g^+(f)$ обозначаем соответственно траекторию и положительную полутраекторию заданного движения $t\mapsto g^t(f)$.

Из леммы 3.1 и теоремы 3.1 вытекает

**Теорема 3.2.** $(\mathfrak{B},g^t)$ *— динамическая система (в смысле Маркова).*

**Замечание 3.2.** Введенная на $L_1^{\rm loc}(\mathbb{R},\mathfrak{B})$ метрика $\varrho$ (см. (3.1)) является естественным распространением метрики Бебутова $\varrho_c$ [14], заданной на пространстве непрерывных функций $C(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$ равенством $\varrho_c(f,g)\doteq\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}[\min\{\rho(f(t),g(t)),\frac{1}{|t|}\}]$, $f,g\in C(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$, в которой неравенство $\varrho_c(f,g)<\varepsilon$ равносильно тому, что $\max\limits_{|t|\le\varepsilon^{-1}}\rho(f(t),g(t))<\varepsilon$ и, следовательно, $\lim\limits_{j\to\infty}\varrho_c(f,f_j)=0$ в том и только том случае, если для любых $\varepsilon$, $\vartheta>0$ найдется такое $j_0=j_0(\varepsilon,\vartheta)\in\mathbb{N}$, что $\max\limits_{|t|\le\vartheta}\rho(f_j(t),f(t))<\varepsilon$ при $j\ge j_0$. Теорема 3.2 утверждает, что так же, как и в непрерывном случае, пара $(\mathfrak{B},g^t)$ является динамической системой (динамической системой сдвигов). Отметим далее, что динамическая система сдвигов на пространстве непрерывных функций, описанная, например, в [14]–[16], играет важную роль в теории динамических систем и ее приложениях (см., напр., [14]–[19] и приведенную там библиографию). В теории управляемых систем она по-видимому впервые стала использоваться в [20] в связи с введенными Е.Л. Тонковым понятиями равномерной локальной и глобальной управляемости, равномерной наблюдаемости и стабилизации линейных систем управления. Динамическая система сдвигов на множестве функций с введенной на нем топологией посредством оператора замыкания использовалась в [8], [21] при изучении магистральных процессов.

В следующей теореме и далее, если не оговорено специально, рассматриваем метрическое пространство $\mathfrak{B}$, определеное равенством (3.2), и ${\rm cl}\,A$ — замыкание множества $A\subset\mathfrak{B}$.

**Теорема 3.3.** *Пусть* $(\mathfrak{Y},\rho)$ *— полное сепарабельное метрическое пространство и* $\mathcal{K}\subset\mathfrak{B}$. *Тогда* $\mathrm{cl}\,\mathcal{K}\in\mathrm{comp}(\mathfrak{B})$ *в том и только том случае, если множество* $\mathcal{K}$ *равностепенно непрерывно*[1] *и существует такое* $y\in\mathfrak{Y}$, *что* $\sup\limits_{f\in\mathcal{K}}\mathfrak{p}_\vartheta(f,y)ds<\infty$ *для любого* $\vartheta>0$.

**Доказательство.** Необходимость условий теоремы 3.3 является очевидным следствием теоремы Хаусдорфа о предкомпактности подмножества метрического пространства [12] и теоремы 3.1.

Для доказательства достаточности надо использовать теорему Фреше [12] об изометрии полного сепарабельного метрического пространства $(\mathfrak{Y},\rho)$ и замкнутого множества некоторого сепарабельного банахова пространства $\mathbb{B}$, а затем для расширяющейся системы отрезков $[-\vartheta,\vartheta+1]$, $\vartheta\in\mathbb{N}$, последовательно применить теорему Рисса ([12], с. 40) о предкомпактности множества в $(L_1([-\vartheta,\vartheta+1],\mathbb{B}),\|\cdot\|_{L_1})$. $\square$

Отметим далее (см. замечание 3.1), что из неравенства $\mathfrak{p}_\vartheta(f,y)\le 2([\vartheta]+1)d(f,y)$ ($\vartheta>0$, $y\in\mathfrak{Y}$) вытекает, что для всякого $d$-ограниченного множества функций $F\subset L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$, т. е. такого, что $\sup\limits_{\varphi\in F}d(\varphi,y)\doteq\mathfrak{d}<\infty$ при некотором $y\in\mathfrak{Y}$, для каждого $\vartheta>0$ выполняется неравенство $\sup\limits_{\varphi\in F}\mathfrak{p}_\vartheta(\varphi,y)\le 2([\vartheta]+1)\mathfrak{d}$. Поэтому из теоремы 3.3 получаем

**Следствие 3.1.** Если равностепенно непрерывное множество $\mathcal{K}\subset\mathfrak{B}$ является $d$-ограниченным, то $\mathrm{cl}\,\mathcal{K}\in\mathrm{comp}(\mathfrak{B})$.

Напомним (см. замечание 3.1), что $\mathbb{S}(\mathbb{R},\mathfrak{Y})\subset\mathfrak{B}$.

**Теорема 3.4.** *Пусть* $f\in\mathbb{S}(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$. *Тогда множество* $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(f))\subset\mathfrak{B}$ *является* $d$*-ограниченным и принадлежит* $\mathrm{comp}(\mathfrak{B})$ *в том и только том случае, если* $f$ $d$*-непрерывна.*

**Доказательство.** Пусть $\mathcal{K}\doteq\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(f))$ (напомним, что $\mathrm{orb}_g(f)\doteq\{g^t(f),\ t\in\mathbb{R}\}$ и $g^t(f)\doteq f_t$). По определению для каждой функции $\widehat{f}\in\mathcal{K}$ найдется такая числовая последовательность $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$, что

$$\lim_{j\to\infty}\varrho(g^{t_j}(f),\widehat{f})=0. \tag{3.5}$$

Поэтому для каждого $t\in\mathbb{R}$ существует такое $j=j(t)\in\mathbb{N}$, что (см. обозначение (3.3)) $\mathfrak{p}_{|t|}(f_{t_j},\widehat{f})\le 1$ и, следовательно, из неравенства $\int\limits_t^{t+1}\rho(\widehat{f}(s),y)ds\le\mathfrak{p}_{|t|}(f_{t_j},\widehat{f})+d(f,y)$ ($y\in\mathfrak{Y}$), вытекает, что $d(\widehat{f},y)\le 1+d(f,y)$, т. е. множество $\mathcal{K}$ $d$-ограничено.

Допустим теперь, что $f$ $d$-непрерывна. По определению для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta\in(0,1]$, что $d(f_\tau,f)\le\varepsilon/2$ при всех $\tau\in(-\delta,\delta)$. Фиксируем далее произвольную функцию $\widehat{f}\in\mathcal{K}$. В силу (3.5) по лемме 3.1 для каждого $\vartheta=|t|+1$, $t\in\mathbb{R}$, найдется такое $t_j$, что $\mathfrak{p}_\vartheta(g^{t_j}(f),\widehat{f})<\varepsilon/4$. Поэтому из соотношений $\int\limits_t^{t+1}\rho(\widehat{f}_\tau(s),\widehat{f}(s))ds\le\mathfrak{p}_\vartheta(g^{t_j}(f),\widehat{f})+d(f_\tau,f)<\varepsilon$ получаем, что $d(\widehat{f}_\tau,\widehat{f})\le\varepsilon$, т. е. множество $\mathcal{K}$ $d$-равностепенно непрерывно, а значит (см. замечание 3.1), и равностепенно непрерывно в метрике $\varrho$. По следствию 3.1 $\mathcal{K}\in\mathrm{comp}(\mathfrak{B})$.

Обратно, если $\mathcal{K}\in\mathrm{comp}(\mathfrak{B})$, то по теореме 3.3 $\mathcal{K}$ равностепенно непрерывно. Поэтому (см. сноску на этой же странице и лемму 3.1) для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что при всех $\tau\in(-\delta,\delta)$ и каждой функции $\widehat{f}\in\mathcal{K}$ $\mathfrak{p}_1(\widehat{f}_\tau,\widehat{f})<\varepsilon$. Учитывая, что $g^t(f)\in\mathcal{K}$ при всех $t\in\mathbb{R}$, получаем (см. (3.3) при $\vartheta=1$), что $d(f_\tau,f)\le\varepsilon$ при $|\tau|<\delta$, т. е. $f$ является $d$-непрерывной. $\square$

В дальнейшем понадобятся рекуррентные и п. п. движения определенной динамической системы $(\mathfrak{B},g^t)$. Считаем далее, что в определении пространства $\mathfrak{B}$ (см. (3.2)) $(\mathfrak{Y},\rho)$ — полное сепарабельное метрическое пространство.

[1] То есть при каждом $\vartheta>0$ (см. обозначение (3.3)) $\lim\limits_{\tau\to0}(\sup\limits_{f\in\mathcal{K}}\mathfrak{p}_\vartheta(f(\cdot+\tau),f(\cdot))ds)=0$.

**Определение 3.1.** Функция $f \in \mathfrak{B}$ называется рекуррентной, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\{\tau \in \mathbb{R} : \varrho(f_\tau, f) < \varepsilon\}$ относительно плотно (на $\mathbb{R}$).

Совокупность рекуррентных функций в $\mathfrak{B}$ обозначим через $\mathfrak{R}(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$.

Из определения метрики $\varrho$ и леммы 3.1 вытекает, что $f \in \mathfrak{R}(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ в том и только том случае, если для любых $\varepsilon, \vartheta > 0$ (см. (3.3)) множество $E_{\mathfrak{R}}(f, \varepsilon, \vartheta) \doteq \{\tau \in \mathbb{R} : \mathfrak{p}_\vartheta(f_\tau, f) < \varepsilon\}$ ее $\varepsilon, \vartheta$-почти периодов ($\varepsilon, \vartheta$-п. п.) относительно плотно.

Приведем необходимые в дальнейшем утверждения о структуре множества $\mathfrak{R}(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$.

**Лемма 3.2.** *Пусть $f \in \mathfrak{R}(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$. Тогда $\lim\limits_{h\to 0} d(f_h, f) = 0$ и при каждом фиксированном $y \in \mathfrak{Y}$ (см. (3.4)) $d(f, y) < \infty$.*

**Доказательство.** Фиксируем произвольное $t \in \mathbb{R}$ и пусть $l > 0$ — константа, входящая в определение относительной плотности множества $E_{\mathfrak{R}}(f, 1, |t|)$. Тогда при каждом $\tau \in E_{\mathcal{R}}(f, 1, |t|) \cap [-t, -t + l]$ имеем следующие соотношения:

$$\int_t^{t+1} \rho(f(s), y) ds \le \mathfrak{p}_{|t|}(f_\tau, f) + \int_t^{t+1} \rho(f_\tau(s), y) ds < 1 + \int_0^{l+1} \rho(f(s), y) ds \doteq \mathfrak{k}$$

и, следовательно, $d(f, y) \le \mathfrak{k}$.

Далее, для заданного $\varepsilon > 0$ возьмем точку $\tau \in E_{\mathfrak{R}}(f, \frac{\varepsilon}{2}, -|t|-1) \cap [-t, -t+l]$, где $l > 0$ — число, входящее в определение относительной плотности множества $E_{\mathfrak{R}}(f, \frac{\varepsilon}{2}, -|t| - 1)$, и выберем (см. теорему 3.1) $\delta \in (0, 1]$ таким, что $\mathfrak{p}_{l+1}(f_h, f) < \varepsilon/4$ при $|h| \le \delta$. Тогда при $|h| \le \delta$ из неравенств $\int\limits_t^{t+1} \rho(f_h(s), f(s)) ds \le 2\mathfrak{p}_{|t|+1}(f_\tau, f) + \mathfrak{p}_{l+1}(f_h, f) < 2\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ получаем, что $d(f_h, f) \le \varepsilon$ при $|h| \le \delta$. □

Из доказанной леммы 3.2 и теоремы 3.4 (см. также ее доказательство) получаем

**Следствие 3.2.** Множество $\mathfrak{R}(\mathbb{R}, \mathfrak{Y}) \subset \mathbb{S}(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ и для каждой функции $f \in \mathfrak{R}(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ множество[1] $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(f)) \in \mathrm{comp}(\mathfrak{B})$ и $d$-равностепенно непрерывно.

Кроме того, в силу этой же леммы 3.2 получается

**Лемма 3.3.** *Метрическое пространство $(\mathfrak{R}(\mathbb{R}, \mathfrak{Y}), d)$ является полным.*

**Доказательство.** Так как метрическое пространство (см. замечание 3.1) $(\mathbb{S}(\mathbb{R}, \mathfrak{Y}), d)$ является полным, то для доказательства леммы 3.3 достаточно показать, что если последовательность $\{f_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathfrak{R}(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ такова, что $\lim\limits_{j\to\infty} d(f_j, f) = 0$, то $f \in \mathfrak{R}(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$. Действительно, если $\lim\limits_{j\to\infty} d(f_j, f) = 0$, то, используя неравенство $\mathfrak{p}_\vartheta(g^\tau(f), f) \le 2d(f_j, f) + \mathfrak{p}_\vartheta(g^\tau(f_j), f_j)$, выполненное для всех $j \in \mathbb{N}$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $\vartheta > 0$, получим, что для любых $\varepsilon, \vartheta > 0$ и каждом достаточно большом $j$ относительно плотное множество $E_{\mathfrak{R}}(f_j, \frac{\varepsilon}{2}, \vartheta)$ содержится в $E_{\mathcal{R}}(f, \varepsilon, \vartheta)$. □

По теореме 3.2 $(\mathfrak{B}, g^t)$ — динамическая система, поэтому можно определить рекуррентные и п. п. движения [15]. Следуя [15], говорим, что движение $t \mapsto g^t(f)$, отвечающее $f \in \mathfrak{B}$, рекуррентно, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $l > 0$, что для каждого $t \in \mathbb{R}$ при любом $t_0 \in \mathbb{R}$ $\{\tau \in \mathbb{R} : \varrho(g^{t+\tau}(f), g^t(f)) < \varepsilon\} \cap [t_0, t_0 + l] \ne \emptyset$.

В силу следствия 3.2 и теоремы 2.9 из ([15], с. 405) вытекает

**Лемма 3.4.** *Функция $f \in \mathfrak{R}(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ в том и только том случае, если движение $t \mapsto g^t(f)$ рекуррентно.*

---

[1]Напомним, что множество $\mathbb{S}(\mathbb{R}, \mathfrak{Y}) \subset L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ определено в замечании 3.1 и далее рассматриваем его как подпространство пространства $\mathfrak{B}$.

Напомним [15], что движение $t \mapsto g^t(f)$ называется п. п., если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\{\tau \in \mathbb{R} : \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \varrho(g^{t+\tau}(f), g^t(f)) < \varepsilon\}$ относительно плотно и функция $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ называется п. п. по Степанову [13], если для каждого $\varepsilon > 0$ множество $E_S(f,\varepsilon) \doteq \{\tau \in \mathbb{R} : d(f_\tau, f) < \varepsilon\}$ ее $\varepsilon$-п. п. относительно плотно.

Совокупность п. п. по Степанову функций из $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ обозначим $S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$. Так же, как в скалярном случае [13], можно показать, что всякая функция из $S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$ является $d$-ограниченной. Поэтому (см. замечание 3.1) $S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y}) \subset \mathbb{S}(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$.

**Лемма 3.5.** *Движение $t \mapsto g^t(f) \in \mathfrak{B}$ п. п. в том и только том случае, если $f \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$.*

**Доказательство.** Пусть движение $t \mapsto g^t(f)$ п. п. и $\tau$ такое, что $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \varrho(g^{t+\tau}(f), g^t(f)) < \varepsilon$. Поэтому (см. (3.1)) $\int\limits_t^{t+1} \rho(f_\tau(s), f(s))ds \le \max\limits_{|\xi|\le\varepsilon^{-1}} \int\limits_\xi^{\xi+1} \rho(g^{t+\tau}(f)(s), g^t(f)(s))ds < \varepsilon$ при каждом $t \in \mathbb{R}$. Следовательно, каждый $\varepsilon$-п. п. движения $t \mapsto g^t(f)$ принадлежит множеству $E_S(f,\varepsilon)$, а значит, $f \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$.

Обратно, если $f \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$, то из неравенства $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \varrho(g^{t+\tau}(f), g^t(f)) \le d(f_\tau, f)$, выполненного для любого фиксированного $\tau \in \mathbb{R}$ вытекает, что движение $t \mapsto g^t(f)$ п. п. $\square$

**Лемма 3.6.** *Пусть функция $f \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$. Тогда замыкание $\mathcal{H}(f)$ множества $\mathrm{orb}_g(f)$ в метрике $d$ совпадает с $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(f))$.*

**Доказательство.** Поскольку (см. замечание 3.1) $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_\varrho$, то $\mathcal{H}(f) \subset \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(f))$. Докажем, что верно и обратное включение. Действительно, по лемме 3.4 движение $t \mapsto g^t(f)$ п. п. Следовательно [15], движение $t \mapsto g^t(\widehat{f})$, отвечающее функции $\widehat{f} \in \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(f))$, является п. п. и поэтому $\widehat{f} \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$. Так как $f, \widehat{f} \in S(\mathbb{R}, \mathfrak{Y})$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $l > 0$, что при каждом $t \in \mathbb{R}$ найдется $\tau \in E_S(f, \varepsilon/3) \cap E_S(\widehat{f}, \varepsilon/3) \cap [-t, -t+1]$. Далее, т. к. $\widehat{f} \in \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(f))$, то найдется такая последовательность $\{t_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathbb{R}$, что $\lim\limits_{j\to\infty} \varrho(g^{t_j}(f), \widehat{f}) = 0$. Поэтому по лемме 3.1 найдется такое $j_0 \in \mathbb{N}$ (см. обозначение (3.3)), что для всех $j \ge j_0$ будет выполнено неравенство $\mathfrak{p}_l(g^{t_j}(f), \widehat{f}) < \varepsilon/3$. Но тогда при каждом $t \in \mathbb{R}$, учитывая выбор $\tau$, для всех $j \ge j_0$ получаем, что $\int\limits_t^{t+1} \rho(g^{t_j}(f)(s), \widehat{f}(s))ds \le d(g^\tau(\widehat{f}), \widehat{f}) + d(g^\tau(f), f) + \mathfrak{p}_l(g^{t_j}(f), \widehat{f}) < \varepsilon$. Отсюда следует, что $d(g^{t_j}(f), \widehat{f}) \le \varepsilon$ при всех $j \ge j_0$, т. е. $\widehat{f} \in \mathcal{H}(f)$. Таким образом, доказано, что $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(f)) \subset \mathcal{H}(f)$ и что совместно с обратным включением $\mathcal{H}(f) \subset \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(f))$ завершает доказательство леммы 3.6. $\square$

Приведем два примера при конкретном выборе пространства $\mathfrak{Y}$.

**Пример 3.1.** На множестве $\Phi \doteq \{(A, V) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n) \times \mathrm{conv}(\mathbb{R}^n) : 0 \in V\}$ определим расстояние $\rho_\Phi(\varphi_1, \varphi_2) \doteq |A_1 - A_2| + \mathrm{dist}(V_1, V_2)$, $\varphi_k = (A_k, V_k) \in \Phi$, $k = 1, 2$, где dist — метрика Хаусдорфа на $\mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $(\Phi, \rho_\Phi)$ — полное сепарабельное метрическое пространство. Рассмотрим множество $\mathbb{S}(\mathbb{R}, \Phi) \subset L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \Phi)$ (см. замечание 3.1). Как и в [22], [23], каждую функцию $t \mapsto \varphi(t) = (A(t), V(t))$ из $\mathbb{S}(\mathbb{R}, \Phi)$ отождествим с системой управления $\dot{x} = A(t)x + v$, $(x, v) \in \mathbb{R}^n \times V(t)$, в которой допустимыми управлениями служат измеримые сечения отображения $t \mapsto V(t)$, содержащего при п. в. $t \in \mathbb{R}$ нуль и при этом (см. определение множества $\Phi$) не исключается возможность того, что нуль при некоторых или п. в. $t$ принадлежит границе $V(t)$. (О целесообразности изучения такого класса систем см., напр., [10], [22], [24] и приведенную там библиографию.) Часть результатов данного раздела была анонсирована в [23], доказана в [25], когда в качестве $\mathfrak{B}$ рассматривалось пространство $(\mathbb{S}(\mathbb{R}, \Phi), \varrho)$, и свойства динамической системы сдвигов, используемые в указанных работах, доказывались с использованием структуры пространства $\mathbb{S}(\mathbb{R}, \Phi)$. Отметим, что в силу теоремы 3.1 требование $\lim\limits_{\tau\to 0} \rho(\varphi_\tau, \varphi) = 0$ для получения результатов, указанных в ([23], с. 467), излишне.

**Пример 3.2.** Рассмотрим случай, когда в качестве полного сепарабельного метрического пространства $(\mathfrak{Y}, \rho)$ берется (см. раздел 1) $(\mathrm{frm}(\mathfrak{U}), \rho_w)$, где $\rho_w$ — метрика, индуцированная нормой $|\cdot|_w$ на $\mathrm{frm}(\mathfrak{U})$. Отметим, что $\mathbb{M}(\mathbb{R}, \mathrm{frm}(\mathfrak{U})) \subset \mathbb{S}(\mathbb{R}, \mathrm{frm}(\mathfrak{U}))$ и (см. (3.1) при $\mathfrak{Y} = \mathrm{frm}(\mathfrak{U})$) на $\mathbb{M}(\mathbb{R}, \mathrm{frm}(\mathfrak{U}))$ определено расстояние

$$\varrho_w(\mu,\nu) \doteq \sup_{t\in\mathbb{R}} \left[ \min\left\{ \int_t^{t+1} \rho_w(\mu(s),\nu(s))ds,\ |t|^{-1} \right\} \right], \quad \mu,\nu \in \mathbb{M}(\mathbb{R}, \mathrm{frm}(\mathfrak{U})),$$

в котором (см. лемму 3.1) равенство $\lim\limits_{j\to\infty} \varrho_w(\mu,\mu_j) = 0$ равносильно тому, что

$$\lim_{j\to\infty} \int_{-\vartheta}^{\vartheta+1} \rho_w(\mu(s),\mu_j(s))ds = 0 \ \text{ при каждом } \vartheta > 0.$$

Поэтому с использованием определения нормы $\|\cdot\|_{w,\mathbb{T}}$ на $\mathbb{M}(\mathbb{T}, \mathrm{frm}(\mathfrak{U}))$ несложно доказывается

**Лемма 3.7.** *Пусть* $\mu, \mu_j \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$, $j \in \mathbb{N}$, *и* $\lim\limits_{j\to\infty} \varrho_w(\mu,\mu_j) = 0$. *Тогда при каждом* $\vartheta > 0$

$$\lim_{j\to\infty} \|\mu - \mu_j\|_{w,[-\vartheta,\vartheta+1]} = 0.$$

Отметим (см. замечание 3.1), что на $\mathbb{M}(\mathbb{R}, \mathrm{frm}(\mathfrak{U}))$ определено также $d_w$-расстояние

$$d_w(\mu,\nu) \doteq \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \rho_w(\mu(s),\nu(s))ds, \quad \mu,\nu \in \mathbb{M}(\mathbb{R}, \mathrm{frm}(\mathfrak{U})). \tag{3.6}$$

**4.** В этом разделе и далее рассматриваем метрическое пространство

$$\mathfrak{P} \doteq (C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}^n) \times \mathcal{M}_{\mathbb{R}}, \varrho_{\mathrm{c},w}), \tag{4.1}$$

где $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ — совокупность ограниченных функций из $C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ с метрикой $\varrho_{\mathrm{c},w}$, индуцированной (см. замечание 3.1 и пример 3.2) метриками $\varrho_{\mathrm{c}}$ и $\varrho_w$, определенными на $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ и подмножестве $\mathcal{M}_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{M}(\mathbb{R}, \mathrm{frm}(\mathfrak{U}))$ соответственно. Так как $\mathbb{R}^n$ и $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ — полные сепарабельные метрические пространства, то (см. [16] и теорему 3.1 при $\mathfrak{Y} \doteq \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$) пространство $\mathfrak{P}$, определенное в (4.1), также является полным сепарабельным метрическим пространством, и пара (см. [16] и теорему 3.2 при $\mathfrak{Y} \doteq \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$) $(\mathfrak{P}, g^t)$, где $g^t(x(\cdot),\mu(\cdot)) \doteq (x_t(\cdot),\mu_t(\cdot))$, $(x(\cdot),\mu(\cdot)) \in \mathfrak{P}$, является динамической системой. Отметим, что множество $\mathfrak{A}_c(\mathbb{R},X) \subset C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}^n) \times \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ инвариантно (относительно потока $g^t$).

Всюду далее $\mathrm{cl}\,P$ — замыкание множества $P \subset \mathfrak{P}$ и в следующих двух леммах $\varepsilon, \vartheta, \eta$-РЛУ в малом на $\mathrm{orb}(\widehat{x};[\tau_0,\infty))$ и $\varepsilon, \vartheta, \eta$-РЛД в малом с $\mathrm{orb}(\widehat{x};[\tau_0,\infty))$ означают, что выполнено свойство решений, указанное во второй части теоремы 2.1.

**Лемма 4.1.** *Пусть* $q(\cdot) \doteq (\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R},X)$ *и система* (1.1) $\varepsilon,\vartheta,\eta$*-РЛУ в малом на полутраекторию* $\mathrm{orb}(\widehat{x};[\tau_0,\infty))$. *Тогда для каждой пары* $(\mathfrak{x}(\cdot),\mathfrak{m}(\cdot)) \in \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(q(\cdot);[\tau_0,\infty)))$ *при любом фиксированном* $\varepsilon_1 \in (0,\varepsilon)$ *система* (1.1) $\varepsilon_1,\vartheta,\eta$*-РЛУ на* $\mathrm{orb}(\mathfrak{x};[\tau_0,\infty))$.

**Доказательство.** Так как $\mathfrak{p}(\cdot) \in \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(\widehat{q}(\cdot);[\tau_0,\infty)))$, то найдется такая последовательность $\{\tau_j\}_{j=1}^{\infty} \subset [\tau_0,\infty)$, что $\lim\limits_{j\to\infty} \varrho_{c,w}((\mathfrak{p}(\cdot), q_{\tau_j}(\cdot)))=0$. Фиксируем $\varepsilon_1 \in (0,\varepsilon)$, $\tau \geq \tau_0$ и $x_0 \in O_{\varepsilon_1}[\mathfrak{x}(\tau)]$. Из предыдущего предельного равенства и леммы 3.7 (см. также замечание 3.2) получаем

$$\lim_{j\to\infty} \big( \max_{t\in[\tau,\tau+\vartheta]} |\mathfrak{x}(t) - \widehat{x}_{\tau_j}(t)| + \|\mathfrak{m} - \widehat{\mu}_{\tau_j}\|_{w,[\tau,\tau+\vartheta]} \big) = 0. \tag{4.2}$$

Следовательно, существует $\widehat{j} \in \mathbb{N}$, начиная с которого $x_0 \in O_{\varepsilon}[\widehat{x}_{\tau_j}(\tau)]$. Далее, т. к. система (1.1) $\varepsilon,\eta,\vartheta$-РЛУ на $\mathrm{orb}(\widehat{x};[\tau_0,\infty))$, то для каждого $j \geq \widehat{j}$ найдется управление $\nu_j \in \mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$, удовлетворяющее неравенству

$$\|\widehat{\mu}_{\tau_j} - \nu_j\|_{w,[\tau,\tau+\vartheta]} \leq \eta |\widehat{x}_{\tau_j}(\tau) - x_0|, \tag{4.3}$$

при котором система (1.1) имеет решение (см. (2.2)) $y_j(t) = x_0 + \int\limits_\tau^t \langle \nu_j(s), f(y_j(s),u)\rangle ds \in K$, $t \in [\tau, \tau+\vartheta]$, такое, что

$$y_j(\tau) = x_0, \quad y_j(\tau+\vartheta) = x_{\tau_j}(\tau+\vartheta). \tag{4.4}$$

Рассмотрим последовательность $\{y_j(\cdot), \nu_j(\cdot)\}_{j=1}^\infty \subset \mathfrak{A}_c([\tau,\tau+\vartheta];K)$. По лемме 1.1 из нее можно выделить подпоследовательность $\{y_{j_i}(\cdot), \nu_{j_i}(\cdot)\}_{i=1}^\infty$, сходящуюся при $i \to \infty$ в пространстве $C[\tau,\tau+\vartheta] \times \mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$ к некоторому процессу $(y(\cdot),\nu(\cdot)) \subset \mathfrak{A}_c([\tau,\tau+\vartheta];K)$. Принимая во внимание (4.2)–(4.4), получаем, что для каждой точки $x_0 \in O_{\varepsilon_1}[\mathfrak{x}(\tau)]$ существует $\nu \in \mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$, удовлетворяющее неравенству $\|\mathfrak{m}-\nu\|_{w,[\tau,\tau+\vartheta]} \leq \eta|\mathfrak{x}(\tau)-x_0|$, при котором система (1.1) имеет решение $y(t) \in K$, $t \in [\tau,\tau+\vartheta]$, и такое, что $y(\tau) = x_0$, $y(\tau+\vartheta) = \mathfrak{x}(\tau+\vartheta)$. $\square$

Аналогично доказывается

**Лемма 4.2.** *Пусть* $q(\cdot) \doteq (\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R},X)$ *и система* (1.1) $\varepsilon,\vartheta,\eta$*-РЛД в малом с полутраектории* $\operatorname{orb}(\widehat{x};[\tau_0,\infty))$. *Тогда для каждой пары* $(\mathfrak{x}(\cdot),\mathfrak{m}(\cdot)) \in \operatorname{cl}(\operatorname{orb}_g(q(\cdot);[\tau_0,\infty)))$ *при любом фиксированном* $\varepsilon_1 \in (0,\varepsilon)$ *система (1.1)* $\varepsilon_1,\vartheta,\eta$*-РЛД с* $\operatorname{orb}(\mathfrak{x};[\tau_0,\infty))$.

**Лемма 4.3.** *Пусть* $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathcal{OP}(\mathbb{R})$. *Тогда* $(\widehat{x}_\tau(\cdot),\widehat{\mu}_\tau(\cdot)) \in \mathcal{OP}(\mathbb{R})$ *при каждом* $\tau \in \mathbb{R}$.

**Доказательство.** Допустим, что найдутся точки $t_0 < t_1$ и процесс $(y(\cdot),\nu(\cdot)) \in \mathfrak{A}[t_0,t_1]$ такие, что $y(t_0) = x_\tau(t_0)$, $y(t_1) = x_\tau(t_1)$ и $\mathfrak{T}(y(\cdot),\nu(\cdot);t_0,t_1) < \mathfrak{T}(\widehat{x}_\tau(\cdot),\widehat{\mu}_\tau(\cdot);t_0,t_1)$. Теперь, если рассмотреть $\widetilde{y}(t) \doteq y(t-\tau)$, $\widetilde{\nu}(t) \doteq \nu(t-\tau)$, $t \in [t_0+\tau, t_1+\tau]$, то получим $\mathfrak{T}(\widetilde{y}(\cdot),\widetilde{\nu}(\cdot);t_0+\tau, t_1+\tau) = \mathfrak{T}(y(\cdot),\nu(\cdot);t_0,t_1) < \mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot);t_0+\tau,t_1+\tau)$, а это противоречит (см. (1.4)) тому, что $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathcal{OP}(\mathbb{R})$. $\square$

**5.** Приведем основные утверждения работы.

**Теорема 5.1.** *Пусть функция* $f : G \times \mathfrak{U} \to \mathbb{R}^n$ *удовлетворяет условию* 1) *и на процессе* $q(\cdot) \doteq (\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R};X)$ *выполнено условие* 2). *Тогда, если система* (2.1) *РЛУ на* $[\tau_0,\infty)$ *и* $q(\cdot) \in \mathcal{OP}[T_1,\infty)$ $(T_1 \geq \tau_0)$, *то найдется такое* $T_0 > T_1$, *что всякий процесс* $\mathfrak{p}(\cdot) \doteq (\mathfrak{x}(\cdot),\mathfrak{m}(\cdot))$ *из* $\operatorname{cl}(\operatorname{orb}_g(q(\cdot);[T_1,\infty)))$ *принадлежит* $\mathcal{OP}[T_0,\infty)$.

**Доказательство.** По теореме 2.1 найдутся такие $\varepsilon,\vartheta,\eta > 0$, что система (1.1) будет $\varepsilon,\vartheta,\eta$-РЛУ в малом на $\operatorname{orb}(\widehat{x};[\tau_0,\infty))$, $\varepsilon,\vartheta,\eta$-РЛД в малом с $\operatorname{orb}(\widehat{x};[\tau_0,\infty))$ и будет, конечно, обладать этими же свойствами относительно $\operatorname{orb}_+(\widehat{x};[T_1,\infty))$. Поэтому по леммам 4.1 и 4.2 для каждого процесса $\mathfrak{p}(\cdot) \in \operatorname{cl}(\operatorname{orb}_g(q(\cdot);[T_1,\infty)))$ система (1.1) также будет $\varepsilon_1,\vartheta,\eta$-РЛУ на $\operatorname{orb}(\mathfrak{x};[T_1,\infty))$ и $\varepsilon_1,\vartheta,\eta$-РЛД с $\operatorname{orb}(\mathfrak{x};[T_1,\infty))$ при любом фиксированном $\varepsilon_1 \in (0,\varepsilon)$. Кроме того, найдется такая последовательность $\{\tau_j\}_{j=1}^\infty \subset [T_1,\infty)$, что

$$\lim_{j\to\infty} \varrho_{c,w}(q_{\tau_j}(\cdot),\mathfrak{p}(\cdot)) = 0. \tag{5.1}$$

При этом, поскольку $q(\cdot) \in \mathcal{OP}[T_1,\infty)$, то $q_{\tau_j}(\cdot) \in \mathcal{OP}[T_1,\infty)$ по лемме 4.3 при каждом $j \in \mathbb{N}$, следовательно, $q_{\tau_j}(\cdot)|_{\mathbb{T}} \in \mathcal{OP}(\mathbb{T})$ для каждого отрезка $\mathbb{T} \subset [T_1,\infty)$. Поэтому, зафиксировав любую систему отрезков $\mathbb{T}_1 \subset \mathbb{T}_2 \subset \cdots$, исчерпывающих $[T_1,\infty)$, в силу (5.1) и леммы 3.7 получаем, что на каждом отрезке $\mathbb{T}_i$, $i \in \mathbb{N}$, процесс $\mathfrak{p}(\cdot)$ является пределом в пространстве $C(\mathbb{T}_i) \times \mathcal{M}_{\mathbb{T}_i}$ последовательности $\{q_{\tau_j}(\cdot)|_{\mathbb{T}_i}\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{OP}(\mathbb{T}_i)$. Отсюда, учитывая, что система (1.1) является $\varepsilon_1,\vartheta,\eta$-РЛУ на $\operatorname{orb}(\mathfrak{x};[T_1,\infty))$ и $\varepsilon_1,\vartheta,\eta$-РЛД с $\operatorname{orb}(\mathfrak{x};[T_1,\infty))$, так же, как в теореме 2.2, получаем, что $\mathfrak{p}(\cdot) \in \mathcal{OP}[T_0,\infty)$ при $T_0 \doteq T_1 + \vartheta$.

Далее, в силу свойств динамической системы сдвигов, определенной на $(C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}^n),\varrho_c)$ (см. [16], с. 61), и теоремы 3.4 при $\mathfrak{Y} \doteq \operatorname{frm}(\mathfrak{U})$, принимая во внимание определение метрики $\varrho_{c,w}$ на $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}^n) \times \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ (см. (4.1)), получаем, что для каждого процесса $q(\cdot) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R};X)$, в котором $\mu(\cdot)$ является $d_w$-непрерывным, множество $\operatorname{cl}(\operatorname{orb}_g^+(q(\cdot)) \in \operatorname{comp}(\mathfrak{P}))$. Поэтому по теореме существования минимальных множеств ([15], с. 307) множество омега-предельных точек движения $t \mapsto g^t(q(\cdot))$, названных в [8], [21] магистральными процессами системы (1.1), а в [11] — асимптотическими достижимыми процессами этой системы, содержит минимальное компактное множество $\mathcal{P}(q(\cdot))$. Поскольку по теореме Биркгофа всякое движение динамической системы, начинающееся в минимальном компактном множестве, рекуррентно, то из теоремы 5.1 и леммы 3.4, принимая во внимание, что для каждого $\mathfrak{p}(\cdot) \in \mathcal{P}(q(\cdot))$ при любом фиксированном $T > 0$ $\mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(\mathfrak{p}(\cdot))) = \mathrm{cl}(\mathrm{orb}_g(\mathfrak{p}(\cdot); [T, \infty)))$, получаем

**Следствие 5.1.** Пусть в условиях теоремы 5.1 $\widehat{\mu}(\cdot)$ $d_w$-непрерывно. Тогда всякий процесс $\mathfrak{p}(\cdot) \in \mathcal{P}(q(\cdot))$ является рекуррентным и принадлежит $O\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

В $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ выделим подмножество $\mathrm{APM}_1$ [9], состоящее из таких измеримых отображений $\mu : \mathbb{R} \to \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$, что для любой функции $c \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ отображение $t \mapsto \langle \mu(t), c(u) \rangle \doteq \int\limits_{\mathfrak{U}} c(u)\mu(t)(du)$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ п. п. по Степанову функций [13], а в $\mathfrak{A}_c(\mathbb{R})$ (см. раздел 1) выделим подмножество $\mathcal{A}_c$, состоящее из таких пар $(x(\cdot), \mu(\cdot))$, в которых $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — п. п. по Бору [13] решение системы (1.1), отвечающее управлению $\mu(\cdot) \in \mathrm{APM}_1$.

В дальнейшем говорим, что процесс $\mathfrak{p}(\cdot) = (\mathfrak{x}(\cdot), \mathfrak{m}(\cdot)) \in \mathfrak{P}$ устойчив (по Ляпунову) относительно отрицательных сдвигов в положительном направлении, если для любого $\varepsilon < 0$ найдутся такие $\delta > 0$ и $T > 0$, что для каждого $\vartheta < 0$, при котором $\max\limits_{t \in [0,T]} \Big\{ |\mathfrak{x}_\vartheta(t) - \mathfrak{x}(t)| + \int\limits_t^{t+1} \rho_w(\mathfrak{m}_\vartheta(s), \mathfrak{m}(s))ds \Big\} < \delta$, при всех $t \geq T$ будет выполняться неравенство

$$|\mathfrak{x}_\vartheta(t) - \mathfrak{x}(t)| + \int_t^{t+1} \rho_w(\mathfrak{m}_\vartheta(s), \mathfrak{m}(s))ds < \varepsilon.$$

**Теорема 5.2.** *Пусть в условиях теоремы* 5.1 *управление* $\widehat{\mu}(\cdot)$ *в процессе* $q(\cdot) \doteq (\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot))$ *является* $d_w$*-непрерывным. Тогда всякий процесс* $\mathfrak{p}(\cdot) \doteq (\mathfrak{x}(\cdot), \mathfrak{m}(\cdot))$*, принадлежащий минимальному подмножеству* $\mathcal{P}(q(\cdot))$ *множества омега-предельных точек движения* $t \mapsto g^t(q(\cdot))$*, устойчивый относительно отрицательных сдвигов в положительном направлении, принадлежит* $\mathcal{A}_c$.

**Доказательство.** По следствию 5.1 отображение $t \mapsto \mathfrak{p}(t) = (\mathfrak{x}(t), \mathfrak{m}(t))$ рекуррентно. Следуя рассуждениям доказательства теоремы Маркова ([15], с. 416), принимая во внимание определение метрики $\varrho_{c,w}$ и устойчивости $\mathfrak{p}(\cdot)$ относительно отрицательных сдвигов в положительном направлении, как и в [26], можно показать, что для каждого $\varepsilon > 0$ множество (см. (3.6)) $\{\tau \in \mathbb{R} : \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} |\mathfrak{x}_\tau(t) - \mathfrak{x}(t)| + d_w(\mathfrak{m}_\tau, \mathfrak{m}) \leq \varepsilon\}$ относительно плотно. Следовательно, функция $t \mapsto \mathfrak{x}(t)$ п. п. по Бору, а отображение $\mathfrak{m}(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$. Последнее равносильно [9] тому, что $\mathfrak{m}(\cdot)$ принадлежит пространству $\mathrm{APM}_1$ мерозначных п. п. отображений. Таким образом, $\mathfrak{p}(\cdot) \in \mathcal{A}_c$. $\square$

**Замечание 5.1.** В теореме 5.2 приведено достаточное условие почти периодичности рекуррентного движения в терминах устойчивости $\mathfrak{p}(\cdot)$ относительно отрицательных сдвигов в положительном направлении. Действительно, с учетом свойств динамической системы сдвигов, определенной на $(C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \varrho_c)$ [15], [16], и приведенных в разделе 3 утверждений о ее свойствах для случая $\mathfrak{Y} \doteq \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$ можно указать для определенной динамической системы $(\mathfrak{P}, g^t)$ (см. (5.1)) и другие достаточные условия, используя достаточные условия почти периодичности движений заданной динамической системы $(\mathfrak{X}, f^t)$ (напр., [15], [16], [27]).

Поскольку в (1.2) $g \in C(G \times \mathfrak{U}, \mathbb{R})$, то [9] для каждой пары $(x(\cdot), \mu(\cdot)) \in \mathcal{A}_c$ отображение $t \mapsto \langle \mu(t), g(x(t), u) \rangle$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ п. п. по Степанову функций и, следовательно, корректно определена задача оптимального управления п. п. движениями (см., напр., [28])

$$\mathbb{I}(x(\cdot), \mu(\cdot)) = M\{\langle \mu(t), g(x(t), u) \rangle\} \doteq \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \langle \mu(t), g(x(t), u) \rangle dt \to \inf, \quad (x(\cdot), \mu(\cdot)) \in \mathcal{A}_c, \tag{5.2}$$

для которой $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in\mathcal{A}_c$ называется решением, если найдется такое $\gamma>0$, что для всякого процесса $(x(\cdot),\mu(\cdot))\in\mathcal{A}_c$ с условием $\|\widehat{x}-x\|_{C(\mathbb{R})}\le\gamma$ будет выполняться неравенство $\mathbb{I}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\le\mathbb{I}(x(\cdot),\mu(\cdot))$.

**Теорема 5.3.** *Указанный в теореме* 5.2 *п. п. процесс* $(\mathfrak{x}(\cdot),\mathfrak{m}(\cdot))$, *принадлежащий также* $O\mathcal{P}(\mathbb{R})$, *является решением задачи* (5.2).

**Доказательство.** По следствию 4.1 система (1.1) является РЛУ на $\mathrm{orb}_+(\mathfrak{x})$. Пусть далее $\gamma\doteq\varepsilon$, где $\varepsilon\in(0,r]$ — константа, входящая в определение РЛУ системы (1.1) на $\mathrm{orb}_+(\mathfrak{x})$. Теперь рассмотрим любой процесс $(x(\cdot),\mu(\cdot))\in\mathcal{A}_c$, в котором $\|x-\mathfrak{x}\|_{C(\mathbb{R})}\le\varepsilon$. Строя с помощью этого процесса большую вариацию [21] для $(\mathfrak{x}(\cdot),\mathfrak{m}(\cdot))$, получим, что при каждом $T>2\vartheta$ будет выполнено неравенство (см. (1.2)) $\frac{1}{T}\mathfrak{T}(\mathfrak{x}(\cdot),\mathfrak{m}(\cdot);0,T)\le\frac{4\mathfrak{g}\vartheta}{T}+\frac{1}{T}\mathfrak{T}(x(\cdot),\mu(\cdot);0,T)$, где (см. обозначение (2.2)), здесь и далее, $\mathfrak{g}\doteq\max\limits_{(x,u)\in K\times\mathfrak{U}}|g(x,u)|$. Отсюда, устремляя $T$ к бесконечности, получаем $\mathbb{I}(\mathfrak{x}(\cdot),\mathfrak{m}(\cdot))\le\mathbb{I}(x(\cdot),\mu(\cdot))$.

**Теорема 5.4.** *Пусть* $(\mathfrak{x}(\cdot),\mathfrak{m}(\cdot))\in\mathcal{A}_c$ — *указанный в теореме* 5.2 *процесс и* $O\mathcal{P}([0,T];X)$ — *совокупность решений*[1] *задачи* (1.3) *при* $X\doteq\overline{\mathrm{orb}}_+(\mathfrak{x})+O_\varepsilon[0]$, *где* $\varepsilon>0$ — *константа, входящая в определение РЛУ системы* (1.1) *на* $\mathrm{orb}_+(\mathfrak{x})$. *Тогда равномерно по* $(x_T(\cdot),\mu_T(\cdot))\in O\mathcal{P}([0,T];X)$ *существует* $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T\langle\mu_T(t),g(x_T(t),u)\rangle dt\doteq c_0$ *и* $c_0=\mathbb{I}(\mathfrak{x}(\cdot),\mathfrak{m}(\cdot))$.

**Доказательство.** Покажем, что равномерно по $(x_T(\cdot),\mu_T(\cdot))\in O\mathcal{P}([0,T];X)$

$$\mathbb{I}(\mathfrak{x}(\cdot),\mathfrak{m}(\cdot))\le\varliminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T\langle\mu_T(t),g(x_T(t),u)\rangle dt\doteq c_1. \tag{5.3}$$

Допустив противное, получим существование таких последовательностей $\{\tau_j\}_{j=1}^\infty\subset\mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{j\to\infty}\tau_j=\infty$, и $\{(x_j(\cdot),\mu_j(\cdot))\}_{j=1}^\infty$, $(x_j(\cdot),\mu_j(\cdot))\in O\mathcal{P}([0,\tau_j];X)$, что

$$c_1=\lim_{j\to\infty}\frac{1}{\tau_j}\int_0^{\tau_j}\langle\mu_j(t),g(x_j(t),u)\rangle dt<\mathbb{I}(\mathfrak{x}(\cdot),\mathfrak{m}(\cdot)). \tag{5.4}$$

Далее, для каждого $T\ge 2\vartheta$ по лемме 1 ([21], с. 85) найдется такая последовательность $\{\theta_j(T)\}_{j=1}^\infty$, что $0\le\theta_j(T)<\theta_j(T)+T\le\tau_j$, $j\in\mathbb{N}$, и

$$\lim_{j\to\infty}\left|\frac{1}{\tau_j}\int_0^{\tau_j}\langle\mu_j(t),g(x_j(t),u)\rangle dt-\frac{1}{T}\int_{\theta_j(T)}^{\theta_j(T)+T}\langle\mu_j(t),g(x_j(t),u)\rangle dt\right|=0. \tag{5.5}$$

Поскольку $x_j(t)\in X$, а система (1.1) $\varepsilon,\vartheta,\eta$-РЛУ на $\mathrm{orb}_+(\mathfrak{x})$ и $\varepsilon,\vartheta,\eta$-РЛД с $\mathrm{orb}_+(\mathfrak{x})$, то (см. определения 2.1 и 2.2) найдется управление $\nu_j^-\in\mathcal{M}_{[\theta_j,\theta_j+\vartheta]}$ ($\theta_j\doteq\theta_j(T)$), удовлетворяющее неравенству $\|\mathfrak{m}-\nu_j^-\|_{[\theta_j,\theta_j+\vartheta]}\le\eta\,|\mathfrak{x}(\theta_j+\vartheta)-x_j(\theta_j+\vartheta)|$, при котором система (1.1) имеет решение $y_j^-(t)$ такое, что

$$y_j^-(\theta_j)=\mathfrak{x}(\theta_j),\quad y_j^-(\theta_j+\vartheta)=x_j(\theta_j+\vartheta), \tag{5.6}$$

а также управление $\nu_j^+\in\mathcal{M}_{[\theta_j+T-\vartheta,\theta_j+T]}$, $\|\mathfrak{m}-\nu_j^+\|_{[\theta_j+T-\vartheta,\theta_j+T]}\le\eta|\mathfrak{x}(\theta_j+T-\vartheta)-x_j(\theta_j+T-\vartheta)|$, при котором система (1.1) имеет решение $y_j^+(t)$ такое, что

$$y_j^+(\theta_j+T-\vartheta)=x_j(\theta_j+T-\vartheta),\quad y_j^-(\theta_j+T)=\mathfrak{x}(\theta_j+T). \tag{5.7}$$

Теперь рассмотрим управление

$$\mathfrak{m}_j(t)\doteq\begin{cases}\nu_j^-(t), & t\in[\theta_j,\theta_j+\vartheta];\\ \mu_j(t), & t\in[\theta_j+\vartheta,\theta_j+T-\vartheta];\\ \nu_j^+(t), & t\in[\theta_j+T-\vartheta,\theta_j+T].\end{cases}$$

[1]См. лемму 1.2 и замечание 1.1.

Тогда отвечающее ему решение системы (1.1) (см. (5.6) и (5.7)) представимо в виде

$$y_j(t) \doteq \begin{cases} y_j^-(t), & t \in [\theta_j, \theta_j + \vartheta]; \\ x_j(t), & t \in [\theta_j + \vartheta, \theta_j + T - \vartheta]; \\ y_j^+(t), & t \in [\theta_j + T - \vartheta, \theta_j + T]. \end{cases}$$

Поскольку $(\mathfrak{x}(\cdot), \mathfrak{m}(\cdot)) \in O\mathcal{P}[\theta_j, \theta_j + T]$, а процесс $(y_j(\cdot), \mathfrak{m}_j(\cdot))$ служит большой вариацией для $(x_j(\cdot), \mu_j(\cdot))$, то (см. (5.6), (5.7))

$$\frac{1}{T}\int_{\theta_j}^{\theta_j+T} \langle \mathfrak{m}(t), g(\mathfrak{x}(t), u)\rangle dt \le \frac{1}{T}\int_{\theta_j}^{\theta_j+T} \langle \mathfrak{m}_j(t), g(y_j(t), u)\rangle dt \le \frac{4\mathfrak{g}\vartheta}{T} + \frac{1}{T}\int_{\theta_j}^{\theta_j+T} \langle \mu_j(t), g(x_j(t), u)\rangle dt.$$

Пусть далее $T_i \ge 2\vartheta$, $i \in \mathbb{N}$, и $\lim\limits_{i\to\infty} T_i = \infty$. В силу (5.5) для каждого $i \in \mathbb{N}$ найдется такое $j_i \in \mathbb{N}$, что будет выполнено неравенство

$$\left|\frac{1}{\tau_{j_i}}\int_0^{\tau_{j_i}} \langle \mu_{j_i}(t), g(x_{j_i}(t), u)\rangle dt - \frac{1}{T_i}\int_{\theta_{j_i}}^{\theta_{j_i}+T_i} \langle \mu_{j_i}(t), g(x_{j_i}(t), u)\rangle dt\right| < \frac{1}{T_i} \quad (\theta_{j_i} \doteq \theta_j(T_i)). \tag{5.8}$$

Поэтому $\frac{1}{T_i}\int\limits_{\theta_{j_i}}^{\theta_{j_i}+T_i} \langle \mathfrak{m}(t), g(\mathfrak{x}(t), u)\rangle dt \le \frac{4\mathfrak{g}\vartheta}{T_i} + \frac{1}{T_i} + \frac{1}{\tau_{j_i}}\int\limits_0^{\tau_{j_i}} \langle \mu_{j_i}(t), g(x_{j_i}(t), u)\rangle dt$, а т. к. (см. свойства среднего значения п. п. по Степанову функций [13], с. 231)

$$\lim_{i\to\infty}\frac{1}{T_i}\int_{\theta_{j_i}}^{\theta_{j_i}+T_i} \langle \mathfrak{m}(t), g(\mathfrak{x}(t), u)\rangle dt = M\{\langle \mathfrak{m}(t), g(\mathfrak{x}(t), u)\rangle\} \doteq \mathbb{I}(\mathfrak{x}(\cdot), \mathfrak{m}(\cdot)), \tag{5.9}$$

то $\mathbb{I}(\mathfrak{x}(\cdot), \mathfrak{m}(\cdot)) \le \lim\limits_{i\to\infty}\frac{1}{\tau_{j_i}}\int\limits_0^{\tau_{j_i}} \langle \mu_{j_i}(t), g(x_{j_i}(t), u)\rangle dt = c_1$. Последнее противоречит (5.4) и тем самым неравенство (5.3) доказано.

Аналогично методом от противного доказывается, что равномерно по $(x_T(\cdot), \mu_T(\cdot))$, принадлежащих $O\mathcal{P}([0, T]; X)$,

$$\mathbb{I}(\mathfrak{x}(\cdot), \mathfrak{m}(\cdot)) \ge \overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{T}\int_0^T \langle \mu_T(t), g(x_T(t), u)\rangle dt \doteq c_1. \tag{5.10}$$

Действительно, если это не так, то найдутся такие последовательности $\{\tau_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{j\to\infty}\tau_j = \infty$, и $\{(x_j(\cdot), \mu_j(\cdot))\}_{j=1}^\infty$, $(x_j(\cdot), \mu_j(\cdot)) \in O\mathcal{P}([0, \tau_j]; X)$, что

$$c_2 = \lim_{j\to\infty}\frac{1}{\tau_j}\int_0^{\tau_j} \langle \mu_j(t), g(x_j(t), u)\rangle dt > \mathbb{I}(\mathfrak{x}(\cdot), \mathfrak{m}(\cdot)). \tag{5.11}$$

Для каждого $T \ge 2\vartheta$ рассматриваем указанную выше последовательность $\{\theta_j(T)\}_{j=1}^\infty$ и для каждого $j \in \mathbb{N}$ фиксируем управление $\nu_j^+ \in \mathcal{M}_{[\theta_j, \theta_j+T]}$ $(\theta_j \doteq \theta_j(T))$, удовлетворяющее неравенству $\|\mathfrak{m} - \nu_j^-\|_{[\theta_j, \theta_j+\vartheta]} \le \eta|\mathfrak{x}(\theta_j) - x_j(\theta_j)|$, при котором система (1.1) имеет решение $y_j^+(t)$ такое, что

$$y_j^+(\theta_j) = x(\theta_j), \quad y_j^+(\theta_j + \vartheta) = \mathfrak{x}(\theta_j + \vartheta), \tag{5.12}$$

а также управление $\nu_j^- \in \mathcal{M}_{[\theta_j+T-\vartheta, \theta_j+T]}$, $\|\mathfrak{m} - \nu_j^-\|_{[\theta_j+T-\vartheta, \theta_j+T]} \le \eta|\mathfrak{x}(\theta_j + T) - x_j(\theta_j + T)|$, при котором система (1.1) имеет решение $y_j^-(t)$ такое, что

$$y_j^-(\theta_j + T - \vartheta) = x_j(\theta_j + T - \vartheta), \quad y_j^-(\theta_j + T) = \mathfrak{x}(\theta_j + T). \tag{5.13}$$

Рассмотрим управление

$$\mathfrak{m}_j(t) \doteq \begin{cases} \nu_j^+(t), & t \in [\theta_j, \theta_j + \vartheta]; \\ \mathfrak{m}(t), & t \in [\theta_j + \vartheta, \theta_j + T - \vartheta]; \\ \nu_j^-(t), & t \in [\theta_j + T - \vartheta, \theta_j + T]. \end{cases}$$

Тогда отвечающее ему решение системы (1.1) (см. (5.12) и (5.13)) представимо в виде

$$y_j(t) \doteq \begin{cases} y_j^-(t), & t \in [\theta_j, \theta_j + \vartheta]; \\ \mathfrak{x}(t), & t \in [\theta_j + \vartheta, \theta_j + T - \vartheta]; \\ y_j^+(t), & t \in [\theta_j + T - \vartheta, \theta_j + T]. \end{cases}$$

Поскольку $(x_j(\cdot), \mu_j(\cdot)) \in O\mathcal{P}[\theta_j, \theta_j + T]$, а процесс $(y_j(\cdot), \mathfrak{m}_j(\cdot))$ служит большой вариацией для $(\mathfrak{x}(\cdot), \mathfrak{m}(\cdot))$, то при каждом $T \geq 2\vartheta$ (см. (5.12), (5.13)) имеем следующие соотношения:

$$\frac{1}{T}\int_{\theta_j}^{\theta_j+T} \langle \mu_j(t), g(x_j(t), u)\rangle dt \leq \frac{1}{T}\int_{\theta_j}^{\theta_j+T} \langle \mathfrak{m}_j(t), g(y_j(t), u)\rangle dt \leq \frac{4\mathfrak{g}\vartheta}{T} + \frac{1}{T}\int_{\theta_j}^{\theta_j+T} \langle \mathfrak{m}(t), g(\mathfrak{x}(t), u)\rangle dt.$$

Поэтому в силу (5.8) $\frac{1}{\tau_{j_i}} \int\limits_0^{\tau_{j_i}} \langle \mu_{j_i}(t), g(x_{j_i}(t), u)\rangle dt < \frac{4\mathfrak{g}\vartheta}{T_i} + \frac{1}{T_i} + \frac{1}{T_i} \int\limits_{\theta_{j_i}}^{\theta_{j_i}+T_i} \langle \mathfrak{m}(t), g(\mathfrak{x}(t), u)\rangle dt$. Отсюда (см. (5.9)) получаем, что $\mathbb{I}(\mathfrak{x}(\cdot), \mathfrak{m}(\cdot)) \geq \lim\limits_{i\to\infty} \frac{1}{\tau_{j_i}} \int\limits_0^{\tau_{j_i}} \langle \mu_{j_i}(t), g(x_{j_i}(t), u)\rangle dt = c_2$, что в силу неравенства (5.11) невозможно.

Доказанные неравенства (5.3) и (5.10), выполняемые равномерно по $(x_T(\cdot), \mu_T(\cdot)) \in O\mathcal{P}([0,T]; X)$ завершают доказательство теоремы 5.4. $\square$

**Замечание 5.2.** Существование предела $c_0$, аналогичного в теореме 5.4, доказано в [8], [21] в предположениях, что множество решений задачи

$$\mathfrak{T}(x(\cdot), u(\cdot); 0, T) \doteq \int_0^T g(x(t), u(t))dt \to \min, \quad (x(\cdot), \mu(\cdot)) \in \mathfrak{A}([0,T]; X),$$

где $\mathfrak{A}([0,T]; X) \doteq \{(x(\cdot), u(\cdot)) : (x(\cdot), \delta_{u(\cdot)}) \in \mathfrak{A}_c([0,T]; X)\}$, непусто, а система $\dot{x} = f(x, u)$ обладает свойством равномерной управляемости на $X$, означающее, что найдется такое $\sigma > 0$, что для любых $x_0, x_1 \in X$ существует управление $u : [0, \sigma] \to \mathfrak{U}$, при котором система $\dot{x} = f(x, u(t))$ имеет решение $x(t) \in X$, $t \in [0, \sigma]$, удовлетворяющее условиям $x(0) = x_0$, $x(\sigma) = x_1$, и показано, что при этих условиях $c_0$ совпадает с точной нижней гранью средних значений $I(x(\cdot), u(\cdot))$ всевозможных периодических процессов $(x(\cdot), \mu(\cdot)) \in \mathfrak{A}([0,T]; X)$, чем и мотивировалось исследование задач периодической оптимизации. При этом обращалось внимание на целесообразность расширения в последней задаче множества ее $\mathbb{P}_c$ допустимых периодических процессов до п. п. процессов и ставились следующие задачи ([8], с. 531; [21], с. 84): определить п. п. магистраль и минимизировать усредненный по $T$ функционал $\frac{1}{T}\mathfrak{T}(x(\cdot), u(\cdot); 0, T)$ на множестве п. п. процессов, для которых предел $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathfrak{T}(x(\cdot), u(\cdot); 0, T)$ существует. Доказанная здесь теорема 5.4 (см. также теорему 5.1 в [10]) дают ответы на поставленные вопросы. Отметим также, что определение динамической системы сдвигов на множестве допустимых процессов этой системы позволяет привести достаточные условия, выделяющие в $O\mathcal{P}(\mathbb{R})$ п. п. процессы, являющиеся решениями задачи (5.2) оптимального управления п. п. движениями. При этом в отличие от достаточных условий в [8], [21] существование предела $c_0$ доказано лишь в предположении равномерной локальной управляемости линейной системы (2.1).

Заметим, наконец, что при доказательстве теоремы 5.3 п. п. процесса $(\mathfrak{x}(\cdot), \mathfrak{m}(\cdot))$ использована лишь в вопросе существования среднего. Поэтому, в точности повторив доказательство этой теоремы, получим, что указанный в следствии 5.1 рекуррентный процесс $(\mathfrak{x}(\cdot), \mathfrak{m}(\cdot))$ будет решением следующей задачи: $\varlimsup\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^T \langle \mu(t), g(x(t),u)\rangle dt \to \inf$, $(x(\cdot),\mu(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R};X)$. Однако структура п. п. управляемых процессов проще рекуррентных процессов, поэтому в работе и указаны достаточные условия, позволяющие использовать п.п. процессы для описания характера поведения магистральных процессов.

Выражаю искреннюю признательность Е.Л. Тонкову, инициировавшему исследования равномерной локальной управляемости систем из пространства $\mathbb{S}(\mathbb{R},\Phi)$ (см. пример 3.1) с помощью задания на нем динамической системы сдвигов с топологией сходимости в среднем на отрезках и принявшему заинтересованное участие в обсуждении результатов данной статьи.

## Литература


1. Арутюнов А.В. *Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи.* – М.: Изд-во Факториал, 1997. – 256 с.
2. Варга Дж. *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями.* – М.: Наука, 1977. – 623 с.
3. Гамкрелидзе Р.В. *Основы оптимального управления.* – Тбилиси: Изд-во Тбилисск. ун-та, 1975. – 230 с.
4. Дмитрук А.В. *Принцип максимума для общей задачи оптимального управления с фазовыми и регулярными смешанными ограничениями* // Оптимальность управляемых динамических систем. Вып. 14. – М.: ВНИИСИ, 1990. – С. 26–42.
5. Ченцов А.Г. *Приложения теории меры к задачам управления.* – Свердловск: Средн.-Урал. кн. изд-во, 1985. – 218 с.
6. Красовский Н.Н. *Управление динамической системой.* – М.: Наука, 1985. – 518 с.
7. Субботин А.И., Ченцов А.Г. *Оптимизация гарантии в задачах управления.* – М.: Наука, 1981. – 288 с.
8. Панасюк А.И., Панасюк В.И. *Оптимальное управление с усредненным вдоль траектории функционалом* // ПММ. – 1985. – Т. 49. – Вып. 4. – С. 526–536.
9. Иванов А.Г. *Элементы математического аппарата задач почти периодической оптимизации.* I // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 2002. – Вып. 1. – № 24. – С. 3–100.
10. Иванов А.Г. *Об одном свойстве решения задачи почти периодической оптимизации* // Изв. вузов. Математика. – 2005. – № 2. – С. 13–29.
11. Ченцов А.Г. *Топологические конструкции расширений и представления множеств притяжения* // Тр. ИММ УрО РАН. – 2000. – Т. 6. – № 1. – С. 247–276.
12. Люстерник Л.А., Соболев В.И. *Элементы функционального анализа.* – М: Наука, 1965. – 516 с.
13. Левитан Б.М. *Почти периодические функции.* – М.: Гостехиздат, 1953. – 287 с.
14. Бебутов М.В. *О динамических системах в пространстве непрерывных функций* // Бюллетень Моск. ун-та. Математика. – 1941. – Т. 2. – Вып. 5. – С. 1–52.
15. Немыцкий В.В., Степанов В.В. *Качественная теория дифференциальных уравнений.* – М: ГИТТЛ, 1949. – 550 с.
16. Щербаков Б.А. *Топологическая динамика и устойчивость по Пуассону решений дифференциальных уравнений.* – Кишинев: Штиинца, 1972. – 146 с.
17. Щербаков Б.А. *Многомерные динамические системы* // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30. – № 5. – С. 1797–1807.
18. Сибирский К.С. *Введение в топологическую динамику.* – Кишинев: Штиинца, 1970. – 146 с.
19. Миллионщиков В.М. *О связи между устойчивостью характеристических показателей и почти приводимостью систем с почти периодическими коэффициентами* // Дифференц. уравнения. – 1967. – Т. 3. – № 9. – С. 2127–2134.

20. Тонков Е.Л. *Динамическая система сдвигов и вопросы равномерной управляемости линейной системы* // ДАН СССР. – 1981. – Т. 21. – № 2. – С. 290–294.
21. Панасюк А.И., Панасюк В.И. *Асимптотическая магистральная оптимизация управляемых систем.* – Минск: Наука и техника, 1986. – 296 с.
22. Иванов А.Г., Тонков Е.Л. *О равномерной локальной управляемости линейной системы* // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28. – № 9. – С. 1499–1507.
23. Иванов А.Г., Тонков Е.Л. *Методы топологической динамики в задаче о равномерной локальной управляемости* //Докл. РАН. – 1995. – Т. 340. – № 4. – С. 467–469.
24. Тонков Е.Л. *Равномерная достижимость и ляпуновская приводимость билинейной управляемой системы* // Тр. ИММ УрО РАН. – 2000. – Т. 6. – № 1. – С. 210–238.
25. Иванов А.Г. *Линейные управляемые системы в пространстве Степанова* // Препринт Физико-технического ин-та УрО АН СССР. – Свердловск, 1985. – 32 с.
26. Миллионщиков В.М. *О рекуррентных и почти периодических предельных решениях неавтономных систем* // Дифференц. уравнения. – 1968. – Т. 4. – № 9. – С. 1556–1559.
27. Александров А.Ю. *Исследование рекуррентных колебаний динамических систем* // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34. – № 8. – С. 1011–1017.
28. Иванов А.Г. *К вопросу об оптимальном управлении почти периодическими движениями* // Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 4. – С. 40–56.

*Институт математики и информатики*
*Удмуртского государственного*
*университета*

*Поступила*
06.07.2004