

В.Г. ИЛЬИЧЕВ

ДЕЛЬТА-ФУНКЦИИ И ИССЛЕДОВАНИЕ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ  
МОДЕЛЕЙ ВОЛЬТЕРРА В ПЕРЕМЕННОЙ СРЕДЕ

## Введение

Количество результатов о поведении экологических систем в переменной среде невелико. Это связано с серьезными трудностями при исследовании глобальной динамики систем нелинейных, неавтономных дифференциальных уравнений. В данной работе предлагается метод, основанный на использовании периодических дельта-функций в качестве скоростей роста популяций.

## 1. Предварительные сведения

Распространенная в математической экологии модельная схема динамики одной популяции имеет вид

$$\dot{x} = xf(x, \beta(t)), \quad (1.1)$$

где  $x$  — численность и  $\beta$  — физиологический параметр популяции;  $x(0) = x^0 > 0$ . Гладкая функция  $f$  характеризует действие внутренней конкуренции и поэтому  $f$  строго убывает по переменной  $x$ . Пусть условия среды (температура и т. д.) периодически изменяются, тогда  $\beta(t)$  — периодическая функция. Рассмотрим специальный класс  $T$ -периодических дельта-функций: при фиксированном параметре  $\tau$  для каждой переменной  $t$  из  $[0, T]$  положим  $\beta(t) = \delta(t - \tau)$  и далее будем считать  $\beta(t + mT) = \beta(t)$  для всех целых  $m$ . Удобно выбрать параметр  $\tau$  из интервала  $(0, T)$ . Напомним [1], что под решением уравнения

$$\dot{x} = xf(x, \delta(\tau - t))$$

на  $[0, T]$  подразумевается поточечный предел последовательности решений

$$\dot{x}_n = x_n f(x_n, \delta_n(t - \tau)),$$

где  $x_n^0 = x^0$  для всех  $n$ , а  $\{\delta_n\}$  — произвольная дельтаобразная последовательность гладких функций, удовлетворяющих условиям:

- а) каждая  $\delta_n$  положительна на малом отрезке  $[\tau - a_n, \tau + b_n] = I_n$  и равна нулю вне его. Величины  $a_n, b_n$  положительны и стремятся к 0 при  $n \rightarrow \infty$ ;
- б) интеграл от функции  $\delta_n$  на отрезке  $I_n$  равен 1.

При каждом  $t$  величина  $x(t)$  считается корректно определенной, если однозначно существует

$$\lim x_n(t) \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty$$

независимо от выбора дельтаобразной последовательности  $\{\delta_n\}$ .

В данной работе ограничимся весьма узким классом моделей, когда функция  $f$  представляется в форме

$$f(x, \beta(t)) = g(x) + \beta(t)h(x),$$

---

Данные исследования поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований (код проекта 94-01-01145).

где  $g(x)$  — невозрастающая и  $h(x)$  — знакоопределенная строго убывающая гладкие функции;  $h'(x) < 0$  при  $x > 0$ . Справедлива простая

**Лемма 1.1.** *При всех  $t \neq mT + \tau$  решение уравнения*

$$\dot{x} = x[g(x) + \delta(t - \tau)h(x)] \quad (1.2)$$

*определено корректно. В точках разрыва существуют пределы слева и справа.*

Отметим, что в точке разрыва  $t = \tau$  значение  $x$  может зависеть от выбора дельтаобразной последовательности  $\{\delta_n\}$  [1], [2].

Теперь выведем формулу для вычисления скачка в точке разрыва, т. е. при  $t = \tau$ . Действуя формально, проинтегрируем обе части преобразованного уравнения (1.2)

$$\frac{\dot{x}_n}{x_n h(x_n)} - \frac{g(x_n)}{h(x_n)} = \delta_n(t - \tau) \quad (1.3)$$

на малом отрезке  $[\tau - a_n, \tau + b_n]$ . Левая часть (1.3) при всех  $n$  равна 1. В правой части (1.3) значение интеграла от непрерывной и ограниченной функции  $g/h$  мало и стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Переходя к пределу в (1.3), окончательно получаем уравнение разрыва

$$\varphi(x_+) - \varphi(x_-) = 1, \quad (1.4)$$

где  $\varphi(x)$  — первообразная от функции  $1/[xh(x)]$ ,

$$x_+ = x(\tau + 0) \quad \text{и} \quad x_- = x(\tau - 0).$$

Поскольку  $h(x) \neq 0$ , то  $h(x)$  сохраняет знак для всех  $x > 0$ . Значит,  $\varphi$  — монотонная функция с особенностью в нуле. Положим  $x_+ = 0$  при  $x_- = 0$ . Из выражения (1.4) значение  $x_+$  определяется единственным образом и является некоторой гладкой функцией от  $x_-$ .

Обозначим  $Y^m = x(mT + \tau + 0)$  для целых  $m$ . Построим в явном виде отображение Пуанкаре для уравнения (1.2). Пусть  $\gamma$  — сдвиг-отображение за время  $T$  по траекториям уравнения

$$\dot{x} = xg(x).$$

Очевидно,  $\gamma(0) = 0$  и  $\gamma$  — монотонно возрастающая функция. С учетом (1.4) получаем рекуррентную последовательность

$$\varphi(Y^{m+1}) = 1 + \varphi(\gamma(Y^m)). \quad (1.5)$$

Нетрудно показать, что явная зависимость  $Y^{m+1} = P(Y^m)$  задает монотонно возрастающую функцию, при этом  $P(0) = 0$ . Пусть в уравнении (1.5) имеется положительное равновесие  $Y^*$ , т. е.

$$\varphi(Y^*) = 1 + \varphi(\gamma(Y^*)).$$

Тогда в модели (1.2) существует положительное  $T$ -периодическое решение, в котором  $x(\tau + 0) = x(\tau + T + 0) = Y^*$ .

**Теорема 1.** *Если в модели (1.2) существует положительное  $T$ -периодическое решение, то оно единственно и глобально устойчиво в  $R_+$ .*

**Доказательство.** Достаточно показать, что отображение Пуанкаре, индуцированное уравнением (1.2), является в некотором смысле сжимающим. Пусть  $t$  принадлежит отрезку  $[0, T]$ . Рассмотрим последовательность аппроксимирующих (1.2) уравнений

$$\dot{x}_n = x_n[g(x_n) + \delta_n(t - \tau)h(x_n)]. \quad (1.6)$$

В силу допущения о невозрастании функций  $g$  и  $f$ , для решений уравнения (1.6) находим оценку

$$\dot{x}_n \leq x_n[g(0) + \delta_n(t - \tau)h(0)].$$

Отсюда легко получаем, что для каждого  $n$  решение  $x_n(t)$  на  $[0, T]$  равномерно ограничено сверху некоторой величиной  $M(X^0)$ , зависящей от начального значения  $x_n^0 = x^0 > 0$ . Разумеется, решения (1.6) равномерно ограничены и снизу (нулем).

Теперь установим естественное свойство монотонности (1.6). А именно, пусть  $x_n$  и  $y_n$  — решения (1.6), соответствующие разным положительным начальным условиям  $x^0$  и  $y^0$ . В силу теоремы единственности эти две траектории не пересекаются. Значит, при  $x^0 < y^0$  имеем  $x_n^t < y_n^t$  для всех  $t$ .

Пусть конкретно  $y^0 - x^0 = \varepsilon > 0$ . Очевидно, при  $t$  из  $[0, T]$  переменные  $y_n$  и  $x_n$  изменяются в ограниченном множестве  $D = [0, \max\{M(y^0), M(x^0)\}]$ . Из (1.6) следует

$$\dot{y}_n/y_n - \dot{x}_n/x_n = [g(y_n) - g(x_n)] + \delta_y(t - \tau)[h(y_n) - h(x_n)].$$

Первое выражение в квадратных скобках неположительно, а второе — отрицательно при  $y_n > x_n$ . Пусть  $H = \max h'(\theta)$  по всем  $\theta$  из  $D$ . Тогда  $h(y_n) - h(x_n) < \varepsilon H$  для всех  $t$  из  $[0, T]$ . С учетом этого неравенства для уравнения (1.6) находим

$$\ln\left(\frac{y_n^T}{x_n^T}\right) - \ln\left(\frac{y_n^0}{x_n^0}\right) < \varepsilon HT.$$

Поскольку  $H < 0$ , то для предельного уравнения (1.2) выполняется строгое неравенство

$$\ln y^T - \ln x^T < \ln y^0 - \ln x^0.$$

Иными словами, “логарифмическая разность” убывает на орбитах уравнения (1.2). Отсюда вытекает единственность и глобальная устойчивость  $T$ -периодического решения.  $\square$

Построим в явной форме отображение Пуанкаре для некоторых конкретных моделей, содержащих дельта-функцию в правой части.

**Пример 1.** Рассмотрим Вольтерровскую схему [3]

$$\dot{x} = x[1 - \mu\delta(t - \tau)(x + c)],$$

где  $\mu$  и  $c$  — положительные константы. Очевидно, при  $t \neq \tau + mT$  решение является возрастающей экспонентой. В точках разрыва выполняется соотношение  $\varphi(x_+) = \varphi(x_-) - \mu c$ , где  $\varphi(z) = \ln z - \ln(z + c)$ , а отображение Пуанкаре имеет вид

$$\frac{1}{Y^{m+1}} = \frac{\exp(\mu c) - 1}{c} + \frac{\exp(\mu c - T)}{Y^m}. \quad (1.7)$$

При  $\mu c < T$  последовательность (1.7) сходится к единственной положительной предельной точке  $Y^* = c[1 - \exp(\mu c - T)]/[\exp(\mu c) - 1]$ .

**Пример 2.** Модель Хатчинсона [4] имеет вид

$$\dot{x} = x[1 - \mu x(t - a)] \quad (1.8)$$

при заданной непрерывной начальной функции  $x^0$  на  $[-a, 0]$  и  $\mu > 0$ ,  $a > 0$ . Когда  $a > \pi/2$ , равновесие  $x^* = 1/\mu$  оказывается неустойчивым, и поэтому реализуются колебания ограниченной амплитуды. Формально это уравнение с запаздывающим аргументом не принадлежит классу моделей (1.1), но и здесь возможно использование  $T$ -периодической дельта-функции

$$\dot{x} = x[1 - \mu\delta(t - \tau)x(t - a)], \quad t \geq 0, \quad (1.9)$$

при заданной непрерывной начальной функции  $x^0$  на  $[-a, 0]$ . Пусть сначала  $0 < a < T$ . Решение уравнения (1.9) является возрастающей экспонентой за исключением дискретного набора точек разрыва. Определим величину скачка в точке  $t = \tau + mT$  при заданном значении  $Y^{m-1} = x(mT - T + \tau + 0)$ . Предварительно отметим следующие соотношения:

$$x(mT + \tau + 0) = Y^{m-1} \exp T \quad \text{и} \quad x(mT + \tau - a) = Y^{m-1} \exp(T - a).$$

Далее, поскольку  $\tau \neq a$ , то в точке  $t = mT + \tau - a$  функция  $x$  непрерывна. Поэтому в “бесконечно малой окрестности”  $[mT + \tau - 0, mT + \tau + 0]$  уравнение (1.9) преобразуется к форме

$$\frac{\dot{x}}{x} = 1 - \mu\delta(t - \tau)Y^{m-1} \exp(T - a).$$

После замены  $Z^m = \mu Y^m \exp(T - a)$  отсюда находим

$$Z^m = Z^{m-1} \exp(T - Z^{m-1}). \quad (1.10)$$

Заметим, что эта рекурсия совпадает с так называемой последовательностью Риккера, которая была подробно исследована Якобсоном [5]. Так, с увеличением параметра  $T$  от 0 до  $\approx e$  происходит бесконечная серия бифуркаций удвоения циклов; затем для  $T$  из  $[\approx e, \approx 2.77]$  устанавливается хаотический режим; при дальнейшем увеличении  $T$  могут реализовываться устойчивые циклы. В частности, при  $T = 3.14$  существует (устойчивый) цикл длины три

$$(8.475 \rightarrow 0.041 \rightarrow 0.909 \rightarrow 8.475)$$

и по теореме Шарковского [6] имеются (здесь неустойчивые) циклы любого периода. Таким образом, среди решений (1.9) содержатся самые разнообразные динамические режимы.

Пусть теперь  $a > T$  и  $k = [a/T] + 1$ , тогда отображение Пуанкаре для уравнения (1.9) принимает вид

$$Z^m = Z^{m-1} \exp(T - Z^{m-k}). \quad (1.11)$$

Приведем некоторые свойства последовательности (1.11). Так, характеристический многочлен для линеаризованного уравнения (1.11) в окрестности равновесия  $Z^* \equiv T$  имеет вид

$$\lambda^k - \lambda^{k-1} + T = 0. \quad (1.12)$$

При  $0 < T < T_{кр} = 2 \sin(\pi/(4k-2))$  все корни (1.12) лежат внутри единичного круга комплексной плоскости, а при  $T = T_{кр}$  первая пара комплексно-сопряженных корней

$$\lambda_{1,2} = \cos \omega \pm i \sin \omega \quad \text{с} \quad \omega = \pi/(2k-1)$$

пересекает единичную окружность и рождается устойчивый цикл периода  $4k-2$ . Нетривиальные глобальные свойства (1.11) проявляются уже при  $k = 2$ . Компьютерные расчеты показали следующее: при увеличении  $T$  в интервале  $(1, 3)$  в данном уравнении возникают (“резонансные”?) колебания большой амплитуды, а при  $T > 3$  некоторый элемент  $Z^{m-k}$  становится достаточно большим и тогда  $Z^m$  согласно (1.11) обращается в “машинный нуль”. Не вполне ясно, является ли это “катастрофическое событие” следствием ограниченности возможностей компьютера или все-таки траектории (1.11) не отделены от нуля. Поэтому представляет интерес *проблема исследования динамики уравнения Риккера с запаздыванием* (1.11).

Рассмотрим теперь сообщество взаимодействующих популяций

$$\dot{x}_k = x_k f_k(x_1, \dots, x_n, \beta_k(t)),$$

где  $k = 1, \dots, n$ ;  $x_k^0 \geq 0$ ; гладкие функции  $f_k$  в зависимости от характера экологических отношений (конкуренция, хищничество и т. д.) удовлетворяют определенным ограничениям [3]. Предполагается, что каждая  $\beta_k(t)$  является  $T$ -периодической дельта-функцией. В дальнейшем такие модели будем называть  $D$ -системами.

## 2. Теория конкуренции в $D$ -системе Вольтерра

В рамках данной схемы динамика близких конкурирующих популяций представляется в форме [7]

$$\dot{x}_k = x_k[1 - \mu_k \delta(t - \tau_k)(x_1 + \dots + x_n)], \quad k = \overline{1, n}, \quad (2.1)$$

где  $\mu_k > 0$  и  $x_k^0 > 0$  для всех  $k$ ;  $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n < T$  и  $\delta$  является  $T$ -периодической дельта-функцией. Каждая переменная  $x_k$  в (2.1) на отрезке  $[0, T]$  является возрастающей экспонентой, за исключением “своей” точки  $\tau_k$ , в которой имеет место скачок (сверху вниз). Хотя в точке  $\tau_k$  значение  $x_k(\tau_k)$  не определено, тем не менее существуют пределы слева  $x_k(\tau_k - 0)$  и справа  $x_k(\tau_k + 0)$ . Поскольку все  $\{\tau_k\}$  различны, то это обстоятельство позволяет избежать трудностей, связанных с неопределенностью величины  $x_k$  в точке  $t = \tau_k$ . Например, в уравнении для  $x_1$  важны лишь значения  $x_2, \dots, x_n$  в точке  $t = \tau_1$ , в которой они непрерывны и, значит, однозначно определены. В целом роль дельта-функций сводится к тому, что “нелинейности” проявляются лишь в “бесконечно малые” интервалы времени, а для почти всех  $t$  система (2.1) оказывается линейной.

Отметим, что если  $\mu_k > T$ , то  $k$ -я популяция вымирает даже в отсутствие конкурентов. Поэтому ниже рассмотрим нетривиальный случай, когда  $\mu_k < T$  для всех  $k$ .

Положим  $y_k^m = x_k(mT + \tau_k + 0)$  и пусть заданы начальные величины  $\{y_1^m, \dots, y_n^m\}$ . Порядок чередования скачков  $\{\tau_k\}$  задает естественную последовательность вычислений — сначала  $y_1^{m+1}$ , затем  $y_2^{m+1}$  и т. д. Так, процедура вычисления  $y_1^{m+1} = x_1(t_1 + 0)$ , где  $t_1 = mT + T + \tau_1$ , опирается на соотношение (1.7), в котором параметр  $c$  является суммой переменных  $x_2, \dots, x_n$  в точке  $(t_1 + 0)$ . Легко видеть, что

$$x_j(t_1 + 0) = y_j^m \exp(T - \tau_j + \tau_1) \quad \text{для } j > 1.$$

Поскольку  $x_1(t_1 - 0) = y_1^m e^T$ , то можно определить величину  $x_1(t_1 + 0)$ . Так получаем

$$\frac{1}{y_1^{m+1}} = \frac{\exp(\mu_1 c_1^m) - 1}{c_1^m} + \frac{\exp(\mu_1 c_1^m - T)}{y_1^m}, \quad (2.2)$$

где  $c_1^m = \sum_{j=2}^n b_{1j} y_j^m$  и  $b_{1j} = \exp(T + \tau_1 - \tau_j)$ . Уравнение (2.2) определяет отображение, изменяющее только первую компоненту,

$$g_1 : (y_1^m, y_2^m, \dots, y_n^m) \rightarrow (y_1^{m+1}, y_2^m, \dots, y_n^m).$$

Для описания остальных переменных построим матрицу взаимодействий  $B_n = (b_{kj})$ :

$$b_{kj} = \begin{cases} \exp(\tau_k - \tau_j), & \text{если } \tau_k > \tau_j, \\ \exp(T + \tau_k - \tau_j), & \text{если } \tau_k < \tau_j, \\ 0, & \text{если } \tau_k = \tau_j. \end{cases}$$

При  $n = 3$  и равномерном расположении точек  $\{\tau_k\}$  на отрезке  $[0, T]$  имеем

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & a^2 & a \\ a & 0 & a^2 \\ a^2 & a & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } a = \exp(T/3).$$

Теперь для  $k > 1$  получаем аналогичные соотношения

$$\frac{1}{y_k^{m+1}} = \frac{\exp(\mu_k c_k^m) - 1}{c_k^m} + \frac{\exp(\mu_k c_k^m - T)}{y_k^m}, \quad (2.3)$$

где  $c_k^m = \sum_{j=1}^{k-1} b_{kj} y_j^{m+1} + \sum_{j=k+1}^n b_{kj} y_j^m$ . При  $k > 1$  уравнение (2.3) задает отображение  $g_k$ , которое действует только на  $k$ -ю переменную. Непосредственно проверяется

**Лемма 2.1.** Каждая функция  $g_k$  возрастает по переменной  $y_k$  и убывает по всем остальным переменным.

В целом отображение Пуанкаре  $P$  системы (2.1) допускает расщепление в композицию простых отображений  $g_n \cdot \dots \cdot g_1$ . На фазовой плоскости  $R_+^n$  определим (“равновесные” по  $k$ -й координате) множества  $E_k = \{Y \mid g_k(Y) = Y\}$ . Здесь важное значение имеют свойства элементарной функции

$$V(z) = \frac{z[1 - \exp(z - T)]}{\exp z - 1} \quad (2.4)$$

при  $T > 0$ . Справедлива

**Лемма 2.2.**  $V(z)$  — убывающая (при  $-\infty < z \leq T$ ) и выпуклая вниз (при  $0 \leq z \leq T$ ) функция.

Пусть точка  $Y$  принадлежит  $E_k$ , тогда выполняется соотношение

$$\mu_k y_k = V\left(\mu_k \sum_{j=1}^n b_{kj} y_j\right).$$

Следовательно,  $E_k$  — выпуклая вниз поверхность в  $R_+^n$ . Будем говорить: точка  $Y$  лежит ниже  $E_k$ , когда имеет место неравенство

$$\mu_k y_k < V\left(\mu_k \sum_{j=1}^n b_{kj} y_j\right).$$

Если выполняется строго противоположное неравенство, то точка  $Y$  лежит выше  $E_k$ . Очевидно,  $g_k(y_k) > y_k$ , когда точка  $Y$  лежит ниже  $E_k$ . Если точка  $Y$  лежит выше  $E_k$ , то  $g_k(y_k) < y_k$ . Справедлива

**Лемма 2.3.** Пусть точка  $Y$  лежит ниже (выше)  $E_k$ , тогда и точка  $g_k(Y)$  лежит ниже (выше)  $E_k$ .

**Доказательство.** Возьмем для примера  $k = 1$ . Пусть точка  $Y = (y_1, \dots, y_n)$  лежит ниже  $E_1$ , тогда при некотором  $y_1^* > y_1$  существует точка  $Z = (y_1^*, y_2, \dots, y_n)$ , принадлежащая  $E_1$ . В силу леммы 2.1 о монотонности  $g_1$  имеем  $g_1(y_1^*) > g_1(y_1)$ . Но  $g_1(y_1^*) = y_1^*$  и, значит, точка  $g_1(Y)$  по-прежнему лежит ниже  $E_1$ . Аналогично устанавливается справедливость и второго утверждения.  $\square$

Определим условия, при которых поверхность  $E_1$  располагается выше всех остальных  $E_k$ .

**Лемма 2.4.** Если поверхность  $E_k$  лежит ниже  $E_1$  на оси  $OY_k$ , то  $E_k$  лежит ниже  $E_1$  всюду в  $R_+^n$ .

**Доказательство.** Рассмотрим для примера поверхности  $E_1$  и  $E_2$  в  $R_+^3$ . Пересечение оси  $OY_2$  данными поверхностями происходит в точках  $y_2^* = T \exp(\tau_2 - \tau_1 - T)/\mu_1$  и  $y_2^{**} = [1 - \exp(-T)]/\mu_2$  соответственно.

По условию имеем  $y_2^* > y_2^{**}$ , т. е.

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} > \frac{\exp(\tau_1 - \tau_2)[\exp T - 1]}{T}. \quad (2.5)$$

В точке  $(0, y_2^*, 0)$  к  $E_1$  построим касательную плоскость  $(L_1)$ , уравнение которой имеет вид (см. рис. а)

$$\xi y_1 + b_{12} y_2 + b_{13} y_3 = \frac{T}{\mu_1},$$

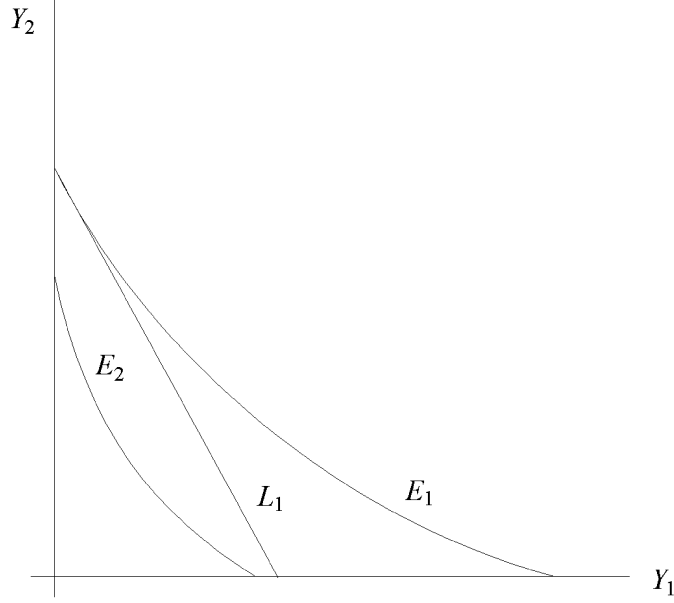


Рис. а

где  $\xi = (\exp T - 1)/T$  и  $b_{12} = \exp(T + \tau_1 - \tau_2)$ ,  $b_{13} = \exp(T + \tau_1 - \tau_3)$  — элементы матрицы взаимодействий. Ввиду выпуклости  $E_1$  плоскость  $L_1$  лежит ниже  $E_1$ . Самое главное, покажем, что  $L_1$  лежит выше  $E_2$ . Из-за выпуклости  $E_2$  достаточно установить, что точки пересечения  $E_2$  с осями координат лежат ниже точек пересечения  $L_1$  с соответствующими осями координат. Так  $L_1$  имеет точки пересечения

$$y_1^* = \frac{T^2}{\mu_1 \exp T - \mu_1} \quad \text{и} \quad y_3^* = \frac{T \exp(\tau_3 - \tau_1 - T)}{\mu_1}.$$

Поверхность  $E_2$  пересекает указанные оси при

$$y_1^{**} = \frac{T \exp(\tau_1 - \tau_2)}{\mu_2} \quad \text{и} \quad y_3^{**} = \frac{T \exp(\tau_3 - \tau_2 - T)}{\mu_2}.$$

В силу условия (2.5) получаем  $y_k^* > y_k^{**}$  для всех  $k$ .  $\square$

Пусть для всех  $k > 1$  имеет место соотношение запаса

$$\frac{\mu_k}{\mu_1} > \frac{\exp T - 1}{T}, \quad (2.6)$$

тогда на оси  $OY_k$  точка пересечения  $E_1$  лежит выше соответствующей точки пересечения  $E_k$ . Поэтому справедлива

**Лемма 2.5.** *Поверхность  $E_1$  лежит выше всех остальных  $\{E_k\}$  в  $R_+^n$ , если выполняется соотношение запаса (2.6).*

Пусть  $E_1$  расположена выше всех остальных  $E_k$ , тогда первая часть леммы 2.3 может быть усилена: если  $Y$  лежит ниже  $E_1$ , то для каждого  $k$  точка  $g_k(Y)$  лежит ниже  $E_1$ . В этой связи область  $R_+^n$ , ограниченная сверху  $E_1$ , является поглощающей для траекторий системы (2.2)+(2.3).

Обозначим через  $W$  функцию, обратную к  $V(z)$ . Так как при  $z \leq T$  функция  $V(z)$  изменяется на полуоси  $(0, \infty)$ , то  $W(z)$  определена при всех  $z \geq 0$ . Очевидно,  $W(z)$  — монотонно убывающая

функция. Теперь построим в  $R_+^n$  непрерывную, неотрицательную функцию (аналог функции Ляпунова)

$$L(Y) = \max \left\{ \frac{W(\mu_1 y_1)}{\mu_1}, \sum_{j=2}^n b_{1j} y_j \right\}.$$

Если  $Y = (y_1, 0, \dots, 0)$  и  $y_1 \geq [1 - \exp(-T)]/\mu_1$ , то  $L(Y) = 0$ . Величина  $L(Y)$  во многом определяется положением точки  $Y$  относительно  $E_1$ . Так имеем

$$L = \begin{cases} W(\mu_1 y_1)/\mu_1, & \text{если } Y \text{ лежит ниже } E_1, \\ \sum_{j=2}^n b_{1j} y_j & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть выполняется условие запаса, тогда справедлива

**Лемма 2.6.** *На траекториях системы (2.2)+(2.3) функция  $L$  (нестрого) убывает. При этом  $L(PP(Y)) < L(Y)$  для  $Y$  из  $R_+^n$ .*

**Доказательство.** Введем обозначение  $g_k(Y) = Y^* = (y_1^*, \dots, y_n^*)$ . Воспользуемся расщеплением отображения Пуанкаре  $P = g_n \cdot \dots \cdot g_1$  и сравним значения  $L = L(Y)$  и  $L_k = L(g_k(Y))$  для каждой функции  $g_k$ . Возможны следующие три варианта.

1. Точка  $Y$  лежит ниже  $E_1$ , тогда  $L = W(\mu_1 y_1)/\mu_1$ . Согласно усиленной лемме 2.3 о поглощении точка  $Y^*$  также лежит ниже  $E_1$  и, значит,  $L_1 = W(\mu_1 y_1^*)/\mu_1$ . При  $k = 1$  имеем  $y_1^* > y_1$ , поэтому  $L_1 < L$ . При  $k > 1$  получаем  $y_1^* = y_1$  и  $L_k = L$ .

2. Точка  $Y$  лежит выше  $E_1$ , тогда  $L = \sum_{j=2}^n b_{1j} y_j$ . Пусть сначала  $k = 1$ . В силу леммы 2.3 точка  $Y^*$  также лежит выше  $E_1$  и, значит,  $L_1 = \sum_{j=2}^n b_{1j} y_j^*$ . Согласно определению  $g_1$  имеем  $y_1^* = y_1$  для всех  $j > 1$  и поэтому  $L_1 = L$ . Пусть теперь  $k > 1$ , тогда  $y_k^* < y_k$ , а остальные координаты точек  $Y^*$  и  $Y$  совпадают. При этом возможны два положения точки  $Y^*$ :

а)  $Y^*$  лежит ниже  $E_1$ , тогда  $L_k = \sum_{j=2}^n b_{1j} y_j^*$  и, значит,  $L_k < L$ ;

б)  $Y^*$  лежит выше  $E_1$ , тогда  $L_k = W(\mu_1 y_1^*)/\mu_1$  и, значит,  $L_k = L$ .

3. Точка  $Y$  лежит на  $E_1$ , тогда  $L_k = L$  для всех  $k$ .

В целом находим  $L(P(Y)) \leq L(Y)$ . Теперь рассмотрим более внимательно результаты проведенного выше анализа, которые для наглядности сведены в таблицу. Из таблицы видим: если  $Y$  не лежит на  $E_1$ , то  $L(P(Y)) < L(Y)$  и, следовательно,  $L(PP(Y)) < L(P(Y))$ . Если  $Y$  находится на  $E_1$ , то поскольку  $P(Y)$  оказывается ниже  $E_1$ , имеем  $L(PP(Y)) < L(P(Y)) = L(Y)$ .  $\square$

Положение $Y$ и $Y^*$ Отображение	$Y$ ниже $E_1$	$Y$ выше $E_1$		$Y$ на $E_1$
		$Y^*$ ниже $E_1$	$Y^*$ выше $E_1$	
$g_1$	$L_1 < L$	$L_1 = L$	$L_1 = L$	$L_1 = L$
$g_i$ при $i > 1$	$L_i = L$	$L_i < L$	$L_i = L$	$L_i = L$

Пусть точка  $Y^0$  принадлежит внутренности  $R_+^n$ , а  $\{Y^m\}$  — последовательность, заданная соотношением  $Y^{m+1} = P(Y^m)$ . При выполнении условия запаса имеет место основная

**Лемма 2.7.** *Последовательность  $\{Y^m\}$  сходится к точке  $(y_1^*, 0, \dots, 0)$ , где  $y_1^* = [1 - \exp(-T)]/\mu_1$ .*



**Доказательство.** Можно считать, что каждая точка  $Y^m$  находится в  $n$ -мерном симплексе

$$S = \{(y_1, \dots, y_n) \mid y_1 + \dots + y_n \leq M, y_1 \geq 0, \dots, y_n \geq 0\}$$

при достаточном большом  $M$ . Поскольку  $S$  — компакт, в нем существует точка  $Y^*$ , являющаяся одной из предельных для последовательности  $\{Y^m\}$ . Рассмотрим четыре возможных варианта расположения точки  $Y^*$ . При этом окажется, что первые три случая не могут быть реализованы из-за определенных свойств динамической системы (2.2)+(2.3).

1.  $Y^*$  — внутренняя точка  $R_+^n$ . В силу леммы 2.6 числовая последовательность  $\{L(Y^m)\}$  убывает и  $L(Y^*)$  — ее предельное значение. Далее,  $PP(Y^*)$  также является одной (той же самой или другой) из предельных точек последовательности  $\{Y^m\}$  и, значит,  $L(PP(Y^*)) = L(Y^*)$ . Но это равенство противоречит лемме 2.6. Поэтому в остальных трех случаях предполагается, что точка  $Y^*$  лежит на границе  $R_+^n$ .

2. Точка  $Y^*$  лежит выше  $E_1$ . Согласно усиленной лемме 2.3 о поглощении и вся последовательность  $\{Y^m\}$  лежит выше  $E_1$ . Значит, для каждого  $k = 1, \dots, n$  числовая последовательность  $\{y_k^m\}$  является убывающей. Обозначим через  $R$  малую окрестность точки  $Y^*$ , лежащую выше  $E_1$ . Пусть в момент  $q$  точка  $Y^q$  принадлежит  $R$ , тогда выполняется неравенство

$$y_k^q > \frac{V(\mu_k c)}{\mu_k} + \xi, \quad (2.7)$$

где  $c = \sum_{j=1}^n b_{kj} y_j^m$  и  $\xi$  — положительная константа, универсальная для всех векторов  $(y_1^m, \dots, y_n^m)$  из  $S$ . Удобно представить  $\xi$  в форме  $\varepsilon c / [\exp(\mu_k c) - 1]$ . Так как функция  $c / [\exp(\mu_k c) - 1]$  положительна и ограничена (сверху и снизу) на  $S$ , то  $\varepsilon$  можно считать положительной универсальной константой. Тогда соотношение (2.7) эквивалентно следующему

$$\frac{\exp(\mu_k c) - 1}{c} + \frac{\exp(\mu_k c - T)}{y_k^q} > \frac{1 + \varepsilon}{y_k^{q+1}}. \quad (2.8)$$

Далее, из формулы (2.3) и неравенства (2.8) находим соотношение “быстрого убывания”

$$\frac{1}{y_k^{q+1}} > \frac{1 + \varepsilon}{y_k^q}. \quad (2.9)$$

Очевидно, если убывающая последовательность  $\{y_k^{m+1}\}$  удовлетворяет для бесконечного множества моментов  $q$  неравенству (2.9), то она стремится к нулю. Итак, данная предельная точка имеет вид  $Y^* = (0, 0, \dots, 0)$  и, значит, лежит ниже  $E_1$ . Противоречие.

3. Точка  $Y^*$  лежит ниже  $E_1$ . Согласно усиленной лемме 2.3 о поглощении вся последовательность  $\{Y^m\}$  лежит ниже  $E_1$  (кроме, быть может, нескольких первых членов). Далее, используя здесь соответствующие изменения оценок (2.7) и (2.9), устанавливаем, что  $y_1^* = \infty$ . Поэтому точка  $Y^*$  находится выше  $E_1$ . Противоречие.

4. Точка  $Y^*$  лежит на  $E_1$ . Покажем, что  $Y^*$  имеет вид  $(y_1^*, 0, \dots, 0)$ . Если  $Y^0$  — внутренняя точка  $R_+^n$ , то на  $E_1$  может лежать не более одной точки  $Y^m$ . Далее, ввиду усиленной леммы 2.3 о поглощении для последовательности  $\{Y^m\}$  возможны две ситуации:

а) все  $Y^m$  лежат выше  $E_1$ . Тогда для каждого  $k$  последовательность  $\{y_k^m\}$  является убывающей. Используя схему рассуждений из 2, для  $k > 1$  устанавливаем  $y_k^m \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ . Значит,  $Y^* = (y_1^*, 0, \dots, 0)$ .

б) все  $Y^m$ , кроме, быть может, нескольких первых членов, лежат ниже  $E_1$ . Тогда последовательность  $\{y_1^m\}$  является возрастающей (для достаточно больших  $m$ ), поэтому  $y_1^* > 0$ . Более того, здесь, как и в а), все остальные координаты точки  $Y^*$  равны 0. Действительно, пусть часть остальных координат  $Y^*$  больше 0 (напр.,  $y_2^* > 0, \dots, y_k^* > 0$ ). Во вспомогательной  $D^*$ -системе,

включающей в себя только переменные  $\{x_1, \dots, x_k\}$ , также выполняется условие запаса и точка  $(y_1^*, \dots, y_k^*)$  является одной из предельных. Но данная точка принадлежит внутренности  $R_+^k$ , а в силу леммы 2.6 это невозможно.

Итак, для точки  $Y^*$ , лежащей на  $E_1$ , имеем  $y_2^* = \dots = y_n^* = 0$ . Поэтому  $y_1^* = V(0)/\mu_1 = [1 - \exp(-T)]/\mu_1$ . Поскольку предельная точка единственна, то она является глобально устойчивой в  $R_+^n$ .  $\square$

Из леммы 2.7 сразу следует, что если имеет место условие запаса, то первая популяция вытесняет остальные, т. е. справедлива

**Теорема 2.** Пусть в системе (2.1) выполняется условие запаса

$$\frac{\mu_k}{\mu_1} > \frac{\exp T - 1}{T} \quad \text{для всех } k > 1.$$

Тогда при  $k > 1$  каждая переменная  $x_k$  стремится к 0.

При  $n = 2$  определим геометрические условия существования положительного равновесия в системе (2.2)+(2.3). В силу леммы 2.4 каждая равновесная кривая должна лежать выше другой вблизи “своей” оси координат (см. рис. б). Отсюда видно, что единственная равновесная точка — седло. Вероятно, и в многомерном случае положительное равновесие (если оно существует) в  $D$ -системе Вольтерра будет неустойчивым.

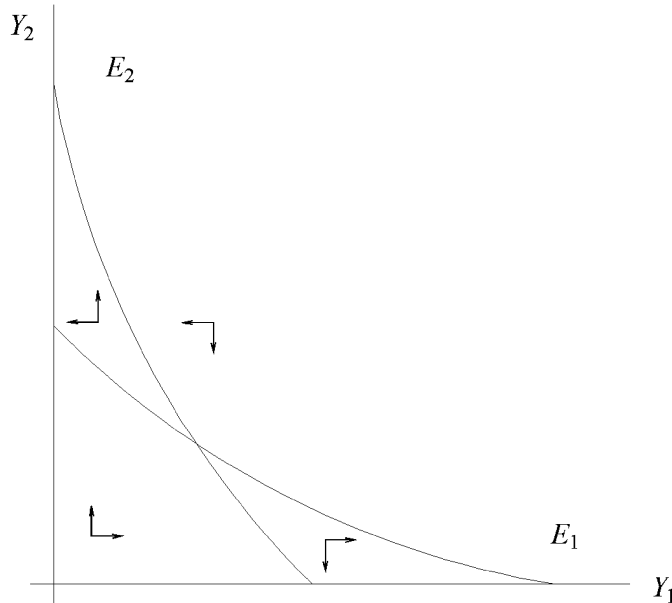


Рис. б

### 3. Заключение

В работах [8], [9] при описании конкурентных взаимодействий использовалась менее жесткая нелинейная зависимость (т. н. схема Контуа). При  $n = 2$  в  $D$ -системе Контуа, в отличие от  $D$ -системы Вольтерра, положительное равновесие является глобально устойчивым. Там же показано, что переменные в  $D$ -системе Контуа мажорируют (как сверху, так и снизу) соответствующие переменные в обычной системе Контуа с гладкими  $T$ -периодическими коэффициентами и поэтому могут использоваться как универсальные оценки решений. Возможно, аналогичные экстремальные свойства  $D$ -систем имеют место и для других классов моделей.

Использование дельта-функций полезно и при анализе других нелинейных экологических взаимодействий. Для иллюстрации рассмотрим неавтономную модель Вольтерра “хищник–жертва”

$$\dot{x} = \delta(t - \tau_1)xy - x, \quad \dot{y} = y - \delta(t - \tau_2)xy,$$

где  $0 < \tau_1 < \tau_2 < T$  и  $\delta$  является  $T$ -периодической дельта-функцией. После элементарных вычислений отображение Пуанкаре данной системы может быть преобразовано к следующему простому виду

$$\ln x^{m+1} = \ln x^m - T + y^m, \quad \ln y^{m+1} = \ln y^m + T - x^{m+1}. \quad (3.1)$$

Для всех  $T > 0$  в системе (3.1) равновесие  $x^* = y^* = T$  неустойчиво, и при  $T < 2$  здесь реализуются колебательные режимы. Так при  $T = 1$  возникает локально устойчивый цикл длины 6. При  $T > 2$  некоторая переменная  $x$  становится достаточно большой и после этого переменная  $y$  обращается в “машинный нуль”. Такое “взрывное” поведение обусловлено жесткими нелинейностями, характерными для вольтерровского типа систем (см. выше уравнение Риккера с запаздыванием). Для полноты картины возникающих здесь явлений следует рассмотреть и другие модели с более “мягкими нелинейностями”. В этой связи представляет интерес исследование динамики моделей типа “хищник–жертва”, в которых коэффициенты представлены периодическими дельта-функциями.

## Литература

1. Филиппов А.Ф. *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью*. – М.: Наука, 1985. – 224 с.
2. Ильичев В.Г., Брискин И.Л. *О динамике конкурирующих биологических видов в переменной среде* // Изв. Сев.-Кавказск. научн. центра высш. школы. Сер. естеств. наук. – 1989. – № 3. – С. 102–109.
3. Вольтерра В. *Математическая теория борьбы за существование*. – М.: Наука, 1976. – 286 с.
4. Hutchinson G.E. *Circular causal system in ecology* // Ann. New York Acad. Sci. – 1948. – V. 50. – P. 221–246.
5. Якобсон М.В. *О свойствах однопараметрического семейства динамических систем  $x \rightarrow Ax \exp(-x)$*  // УМН. – 1976. – Т. 31. – № 2 – С. 239–240.
6. Шарковский А.И. *Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя* // Укр. матем. журн. – 1964. – Т. 16. – № 1. – С. 61–71.
7. Розоноэр Л.И., Седых Е.И. *О механизмах эволюции самовоспроизводящихся систем. I* // Автоматика и телемеханика. – 1979. – № 2. – С. 110–119.
8. Ильичев И.Г. *Фрагмент математической теории конкуренции биологических видов в переменной среде* // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27. – № 3. – С. 437–447.
9. Ильичев И.Г. *Неожиданные свойства конкуренции биологических видов в переменной среде* // Автоматика и телемеханика. – 1990. – № 9. – С. 34–44.

*Научно-исследовательский  
институт механики и прикладной  
математики Ростовского  
государственного университета*

*Поступили  
первый вариант 31.03.1995  
окончательный вариант 12.07.1996*