ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 6 (493)

УДК 517.537:539.3

Е.С. АСТАПОВА, Н.С. АСТАПОВ

НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ КВАДРАТИЧНОГО СУММИРОВАНИЯ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Введение

Представление функций выражениями, включающими невысокие степени аргумента, оказывается полезным в приближенных вычислениях и часто позволяет упростить расчетные формулы. В качестве аппроксимации суммы ряда обычно берутся два или три первых члена ряда, т.к. вычисление следующих членов требует значительных затрат, например, при решении задач методом малого параметра. Однако ценность полученной таким образом аппроксимации снижается из-за того, что получаемое решение является локальным.

Рассматриваемый здесь способ квадратичного суммирования, пока еще слабо освещенный в литературе, является модификацией метода рациональной аппроксимации Паде [1] и позволяет значительно расширить границы применимости метода малого параметра [2], [3]. На примерах тригонометрических функций $\sin x$, $\arcsin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arctg} x$ и эллиптических интегралов первого и второго рода обсуждаются преимущества квадратичной аппроксимации по сравнению с другими способами. С помощью приближенных выражений модуля полного эллиптического интеграла первого рода через значение интеграла получены простые формулы для максимального прогиба шарнирно опертого продольно сжатого гибкого стержня.

Рациональной аппроксимацией Паде степенного ряда $S(x)$ ([1], с. 31) называется отношение двух многочленов $A_n(x)/B_m(x) = R_m^n(x)$, если эти многочлены степеней n и m соответственно удовлетворяют условию

$$A_n(x) - B_m(x)S(x) = O(x^{n+m+1}), \quad B_m(0) = 1. \tag{1}$$

Заметим, что $S(x)$ входит в (1) лишь в первой степени. Аппроксимацию Паде можно также применять для приближенного суммирования числовых рядов и для уточнения полученных с помощью рядов решений дифференциальных уравнений. Несколько примеров успешного использования рациональной аппроксимации Паде в теории оболочек можно найти в [2].

1. Квадратичная аппроксимация функции, заданной степенным рядом

Обозначим через $S(x)$ степенной ряд, первые несколько членов которого известны. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, из соотношения

$$a_0 + b_0x + c_0x^2 + (a_1 + b_1x + c_1x^2)S(x) + (a_2 + b_2x + c_2x^2)S^2(x) = O(x^8) \tag{2}$$

получим систему линейных однородных уравнений для определения a_i, b_i, c_i. Тогда функция $C(x)$, удовлетворяющая уравнению (назовем его определяющим)

$$a_0 + b_0x + c_0x^2 + (a_1 + b_1x + c_1x^2)C + (a_2 + b_2x + c_2x^2)C^2 = 0, \tag{3}$$

является квадратичной аппроксимацией Паде функции $S(x)$ ([1], с. 319). Основное отличие квадратичной аппроксимациии от рациональной состоит в том, что $S(x)$ входит в (2) во второй степени. Одним из преимуществ данной аппроксимации является обращаемость: пользуясь одним и тем же уравнением, можно выразить C через x или наоборот, x через C. Выбор соответствующей ветви обычно определяется из постановки задачи.

Рассмотрим модификацию аппроксимации Паде для полного эллиптического интеграла первого рода

$$F = F(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{dz}{\sqrt{1-k^2\sin^2 z}}. \tag{4}$$

Так как ряд Маклорена

$$F = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\right)^2 k^{2n}\right\}$$

сходится абсолютно при $|k| < 1$ ([3], с. 59), то, пользуясь разложением $p = (2F(k)/\pi)^2$ в ряд, также сходящийся абсолютно при $|k| < 1$, имеем

$$p = 1 + \frac{k^2}{2} + \frac{11k^4}{32} + \frac{17k^6}{64} + \cdots = 1 + \frac{k^2}{2}\left(1 + \frac{k^2}{2} + \frac{11k^4}{32} + \cdots\right) + \\ + \frac{3k^4}{32}(1 + k^2 + \cdots) + \cdots = 1 + \frac{k^2}{2}p + \frac{3k^4}{32}p^2 + \cdots .$$

Поэтому, ограничиваясь тремя членами разложения и разрешая относительно k вместо бикубического уравнения $p = 1 + k^2/2 + 11k^4/32 + 17k^6/64$ биквадратное уравнение

$$p = 1 + k^2p/2 + 3k^4p^2/32, \tag{5}$$

в котором неявным образом учтен член $17k^6/64$, получим значение k с не меньшей точностью. Так, при $p = 1{,}5$ получим $k = 0{,}784$ для бикубического уравнения, $k = 0{,}758$ для биквадратного уравнения и $k = 0{,}759$ для точного выражения (4); при $p = 2$ получим $k = 0{,}971$, $k = 0{,}880$ и $k = 0{,}885$ соответственно.

Известно [4], [5], что наибольший безразмерный (отнесенный к длине) прогиб f продольно сжатого безразмерной нагрузкой p (отнесенной к нагрузке Эйлера) шарнирно опертого упругого стержня задается формулой $f = 2k/(\pi\sqrt{p})$. Кроме того, k и p связаны соотношением $F(k) = \pi\sqrt{p}/2$, $F(k)$ из (4). Выражая k из (5), получим формулу для наибольшего прогиба

$$f \approx \frac{4\sqrt{\sqrt{6p-2}-2}}{\sqrt{3}\pi p} \tag{6}$$

или при $p - 1 \ll 1$

$$f \approx \frac{2\sqrt{2}}{\pi p}\sqrt{p-1}. \tag{7}$$

Результаты расчетов убеждают, что формула (7) грубее (6), хотя точнее формулы, приведенной в ([6], с. 32), и отличается от нее лишь множителем p в знаменателе [7].

2. Примеры квадратичной аппроксимации тригонометрических функций

Функции $y = \cos x$ и $x = \arccos y$ в окрестности $y = 1$ приближенно удовлетворяют семикоэффициентному определяющему уравнению

$$x^4(28y - 361) + 3x^2(256y + 2789) - 3(59y^2 - 6208y + 6149) = 0 \tag{8}$$

и трехкоэффициентному уравнению

$$x^2(y^2 - 4y) - 3(y^2 - 1) = 0. \tag{9}$$

Численный эксперимент показывает, что, используя (9), можно получить формулу $\arcsin y \approx \pi/2 - \sqrt{3(y^2-1)/(y^2-4y)}$, по которой $\arcsin y$ вычисляется с четырьмя верными знаками на промежутке [0,9; 1]. Заметим, что из (8) выводятся формулы, позволяющие вычислять $\arcsin y$ и $\arccos y$ с десятью верными знаками на [0,8; 1] и с пятью — на [0; 1]. Разложение в цепную дробь ([8], с. 203)

$$\frac{\arcsin y}{\sqrt{1-y^2}} \approx \frac{y}{1} \, {}_{-} \, \frac{2y^2}{3} \, {}_{-} \, \frac{2y^2}{5} \, {}_{-} \, \frac{12y^2}{7} \, {}_{-} \, \frac{12y^2}{9} \, {}_{-} \, \frac{30y^2}{11}$$

с учетом равенства

$$\arcsin y = \frac{\pi}{2} - 2\arcsin\sqrt{\frac{1-y}{2}},$$

рекомендуемого в ([9], с. 202) для вычисления $\arcsin y$ при $\frac{1}{2} < y \leqslant 1$, приводит к девятикоэффициентной формуле

$$\arcsin y \approx \frac{\pi}{2} - \frac{7(7y^2+66y+92)\sqrt{1-y^2}}{5(2y^3+36y^2+111y+82)},$$

которая является менее точной, чем генерируемая уравнением (8). Вычисления по предлагаемой в ([10], с. 72) формуле

$$\arcsin y \approx \sum_{n=0}^{4} a_n T_{2n+1}(\sqrt{2}x),$$

где T_i — полиномы Чебышева, также оказываются менее точными. Пользуясь разложением функции $\sin x$ в цепную дробь ([11], с. 165; [12], с. 263), получим аппроксимацию Паде порядка $(3,4)$

$$\sin x \approx \frac{5880x - 620x^3}{5880 + 360x^2 + 11x^4},$$

которая для $0{,}6 \leqslant x \leqslant \pi/2$ тоже менее точна, чем генерируемая уравнением (8), и не является легко обращаемой.

Для аппроксимации функций $y = \operatorname{tg} x$, $x = \operatorname{arctg} y$ в качестве определяющего уравнения можно использовать уравнение

$$3x^2 + 9xy + (5x^2 - 12)y^2 = 0, \tag{10}$$

из которого получим формулу

$$y = \operatorname{tg} x \approx \frac{x(\sqrt{225-60x^2}-9)}{10x^2-24},$$

не уступающую по точности аппроксимации Паде $(3,3)$. Отметим, что аппроксимация $\operatorname{arctg} y$, генерируемая (10),

$$x = \operatorname{arctg} y \approx \frac{y(\sqrt{240y^2+225}-9)}{10y^2+6} \tag{11}$$

обсуждается в ([1], с. 320). Ряд Маклорена для (11)

$$y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{97y^7}{675} + \cdots \approx y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - 0{,}1437y^7 + 0{,}1131y^9 - 0{,}0941y^{11} + \cdots$$

отличается от ряда для $\operatorname{arctg} y$

$$y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + \cdots \approx y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - 0{,}1429y^7 + 0{,}1111y^9 - 0{,}0909y^{11} + \cdots$$

уже четвертым членом. Тем не менее, пользуясь приближением (11), имеем $\operatorname{arctg} 1 \approx 0{,}7852$ вместо точного значения $\operatorname{arctg} 1 = \pi/4 \approx 0{,}7854$, а для достижения той же точности прямым суммированием необходимо взять сумму 1200 членов ряда Маклорена.

Рациональная аппроксимация Паде получается из квадратичной, если в (2) положить $a_2 = b_2 = c_2 = 0$, следовательно, квадратичная аппроксимация является более точной. Например, для суммы ряда $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 - x^2/8 + x^3/16 - \cdots$ любая рациональная аппроксимация Паде оказывается приближенной, а квадратичная аппроксимация, генерируемая уравнением (3) при $a_0 = b_0 = -a_2 = 1$ и остальных коэффициентах равных нулю, т. е. полученная из уравнения $1 + x - C^2(x) = 0$, совпадает с самой функцией $C(x) = \sqrt{1+x}$.

3. Квадратичная аппроксимация эллиптических интегралов. Приложение в механике гибких стержней

При выводе определяющих заданную функцию уравнений часть коэффициентов a_i, b_i, c_i в (2) можно полагать равными нулю, причем различные уравнения могут генерировать одну и ту же аппроксимацию. Например, среди 84 трехкоэффициентных уравнений, определяющих полный эллиптический интеграл первого рода $F(k)$, лишь следующие восемь генерируют различные аппроксимации, расположенные в порядке убывания точности:

$$xy^2 - 4y + 4 = 0, \quad F \approx \frac{\pi}{1+\sqrt{1-k^2}}, \qquad f \approx \frac{4\sqrt{\sqrt{p}-1}}{\pi p}, \tag{12}$$

$$xy^2 - 2y^2 + 2 = 0, \quad F \approx \frac{\pi}{\sqrt{4-2k^2}}, \qquad f \approx \frac{2\sqrt{2p-2}}{\pi p}, \tag{13}$$

$$xy^2 - 4y^2 + 4y = 0, \quad F \approx \frac{2\pi}{4-k^2}, \qquad f \approx \frac{4\sqrt{\sqrt{p}-1}}{\pi \sqrt[4]{p^3}}, \tag{14}$$

$$xy - 2y^2 + 2 = 0, \quad F \approx \frac{\pi(k^2+\sqrt{k^4+16})}{8}, \quad f \approx \frac{2\sqrt{2p-2}}{\pi \sqrt[4]{p^3}}, \tag{15}$$

$$xy - 4y^2 + 4y = 0, \quad F \approx \frac{\pi(k^2+4)}{8}, \qquad f \approx \frac{4\sqrt{\sqrt{p}-1}}{\pi \sqrt{p}}, \tag{16}$$

$$x - 2y^2 + 2 = 0, \quad F \approx \frac{\pi\sqrt{2k^2+4}}{4}, \qquad f \approx \frac{2\sqrt{2p-2}}{\pi\sqrt{p}}, \tag{17}$$

$$x - 4y^2 + 4y = 0, \quad F \approx \frac{\pi(1+\sqrt{k^2+1})}{4}, \qquad f \approx \frac{4\sqrt{p-\sqrt{p}}}{\pi\sqrt{p}},$$

$$xy - x = 0, \quad F \approx \frac{\pi}{2}, \qquad f \approx 0,$$

где $x = k^2$, $y = 2F/\pi$. Здесь в каждой строке справа приведена соответствующая формула для максимального прогиба f шарнирно опертого продольно сжатого нагрузкой p гибкого стержня, самой точной является (12). Интересно отметить, что две группы формул (12), (14), (16) и (13), (15), (17) устроены похожим образом: формулы каждой группы отличаются одна от другой лишь множителем в знаменателе, а соответствующие формулы разных групп — числителями. Примечательно, что формулы (16) и (17) широко распространены в учебной литературе, однако более точные формулы (12)–(15) ускользнули от внимания исследователей, использовавших традиционные методы аппроксимации.

С помощью квадратичной аппроксимации полных эллиптических интегралов построено простое приближенное решение, позволяющее вычислять координаты $x(t)$, $y(t)$, $0 < t < 1$, упругой линии шарнирно опертого продольно сжатого нагрузкой p стержня ($p \geqslant 1$, $p = 1$ — нагрузка Эйлера):

$$7pk^4 + (81p - 102\sqrt{p} + 53)k^2 - 64p + 64 \approx 0, \quad q \approx \frac{1-\sqrt[4]{1-k^2}}{2(1+\sqrt[4]{1-k^2})}, \tag{18}$$

$$(348k^2 - 2688)E^2 + \pi(14k^4 - 436k^2 + 1664)E + \pi^2(3k^2 - 160) \approx 0, \tag{19}$$

$$x(t) \approx \left(\frac{4E}{\pi\sqrt{p}} - 1\right)t + \frac{8q}{\pi p}\left(\frac{\sin 2\pi t}{q^2 - 1} + q\sin 4\pi t - q^2 \sin 6\pi t\right),$$

$$y(t) \approx \frac{2}{\pi\sqrt{p}}\sqrt{k^2 - 1 + \sqrt{1-k^2}\left(\frac{1 - 2q\cos 2\pi t}{1 + 2q\cos 2\pi t}\right)^2}.$$

Заметим, что относительные погрешности вычисления полного эллиптического интеграла первого рода F по формуле (18) с учетом равенства $F = \pi\sqrt{p}/2$ и полного эллиптического интеграла второго рода E по (19) не превышают 0,04% вплоть до $k = 0{,}9$. Пользуясь (18), получим для F приближающую функцию, ряд Маклорена которой совпадает с разложением F в ряд до k^{10} включительно. Благодаря этому погрешность вычисления координат $x(t)$, $y(t)$ по приведенным здесь формулам составляет не более 3% от длины стержня вплоть до нагрузок, превышающих критическую нагрузку Эйлера в 3,5 раза (стержень образует петлю).

Литература

1. Бейкер Дж. (мл.), Грейвс-Моррис П. *Аппроксимации Паде.* – М.: Мир, 1986. – 509 с.
2. Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В., Андрианов И.В. *Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций.* – М.: Машиностроение, 1991. – 416 с.
3. Найфе А.Х. *Введение в методы возмущений.* – М.: Мир, 1984. – 535 с.
4. Крылов А.Н. *О формах равновесия сжатых стоек при продольном изгибе* // Избранные труды. – М.: Изд-во АН СССР, 1958. – С. 486–538.
5. Сикорский Ю.С. *Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике.* – М.: ОГИЗ, 1936. – 365 с.
6. Вольмир А.С. *Устойчивость деформируемых систем.* – М.: Наука, 1967. – 984 с.
7. Астапов Н.С. *Приближенные формулы для прогибов сжатых гибких стержней* // ПМТФ. – 1996. – Т. 37. – № 4. – С. 135–138.
8. Джоунс У., Трон В. *Непрерывные дроби: аналитическая теория и приложения.* – М.: Мир, 1985. – 414 с.
9. Иванов В.В. *Методы вычислений на ЭВМ. Справочное пособие.* – Киев.: Наук. думка, 1986. – 583 с.
10. Люк Ю. *Специальные математические функции и их аппроксимации.* – М.: Мир, 1980. – 608 с.
11. Хованский А.Н. *Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа.* – М.: ГИТТЛ, 1956. – 203 с.
12. Дзядык В.К. *Об асимптотике диагональных аппроксимаций Паде функций* $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ // Матем. сб. – 1979. – Т. 108. – № 2. – С. 247–267.

Амурский государственный университет
Институт гидродинамики Сибирского отделения Российской Академии наук

Поступила
20.11.2000