ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 7 (458)

УДК 517.958 : 519.2

А.Ф. КРЮЧКОВ, В.А. СИРЕНЕК

ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ МАССОПЕРЕНОСА С КОНВЕКТИВНЫМ ЧЛЕНОМ

Математическое моделирование интенсивных процессов нестационарного массо-энергопереноса с наличием релаксационных эффектов приводит к необходимости решения уравнения

$$\sigma(\partial^2 c/\partial t^2) + \partial c/\partial t = D(\partial^2 c/\partial x^2) + S(\partial c/\partial x), \tag{1}$$

называемого гиперболическим уравнением массопереноса с конвективным членом [1], и различных его аналогов. Здесь $c(x,t)$ — переносимое физическое поле, σ — время релаксации среды, D — коэффициент диффузии, S — скорость сноса. Собственно конвективным членом в (1) называют выражение $S(\partial c/\partial x)$. Если он отсутствует ($S = 0$), то с помощью (1) описывают, в частности, волновой процесс распространения в среде возмущений некоторого вещества (с конечной скоростью w), причем имеет место соотношение $w = \sqrt{D/\sigma}$. В этом случае, если положить $a = 1/(2\sigma)$, уравнение (1) может быть переписано в виде

$$\partial^2 c/\partial t^2 + 2a(\partial c/\partial t) = w^2(\partial^2 c/\partial x^2). \tag{2}$$

Обычно (2) называют телеграфным уравнением; несколько последних десятилетий оно находилось под пристальным вниманием многих математиков. Дело в том, что (2) — одно из простейших уравнений гиперболического типа, а при решении последних традиционным методом конечных разностей возникают трудности, связанные с искажениями концентрационного фронта при переходе от дифференциального уравнения к разностному. Принципиально другой подход к этой проблеме доставляют вероятностные методы, успешное применение которых к эллиптическим и параболическим уравнениям хорошо известно [2]. Этот подход, как правило, основан на связи уравнений со скачкообразными марковскими процессами, однако для гиперболических уравнений столь явной связи не существует.

Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — достаточно регулярные функции. В дальнейшем будем различать следующие три вида начальных условий:

$$c(x,0) = \varphi(x), \quad (\partial c/\partial t)|_{t=0} \equiv 0; \tag{3}$$

$$c(x,0) \equiv 0, \quad (\partial c/\partial t)|_{t=0} = \psi(x); \tag{4}$$

$$c(x,0) = \varphi(x), \quad (\partial c/\partial t)|_{t=0} = \psi(x). \tag{5}$$

Началом вероятностного исследования уравнения (2) принято считать классическую работу М. Каца [3], где рассматривается стохастическая модель, связанная с (2), — случайное блуждание материальной точки (частицы) по прямой с постоянной скоростью w, причем направление движения изменяется с постоянной интенсивностью a. В [3] приведена также вероятностная формула для решения задачи Коши (2), (3). В [4] Дж. Кизинский, используя теорию однопараметрических групп и полугрупп линейных операторов, обобщил формулу Каца на случай задачи

(2), (5); этому результату после некоторых преобразований можно придать следующую форму:

$$c(x,t) = \mathbf{E}\{\varphi(x+\varepsilon w\bar{t})\} + \mathbf{E}\Big\{(\varepsilon/w)\int_0^{x+\varepsilon w\bar{t}} \psi(\tau)d\tau\Big\}, \tag{6}$$

где $\bar{t}$ — рандомизированное время $\Big(\bar{t} = \int\limits_0^t (-1)^{N(\tau)}d\tau$, $N(\tau)$ — однородный процесс Пуассона с параметром $a\Big)$, ε — независимая от $N(\tau)$ случайная величина, принимающая значения ± 1 с вероятностью $1/2$, $\mathbf{E}$ — операция математического ожидания.

Целью данной работы является получение формулы, аналогичной (6), для решения задачи Коши (1), (5).

Перейдем к построению вероятностной модели, позволяющей получить решение уравнения (1). Выделим на плоскости (x,v), $x \in \mathbf{R}^1$, v — скорость, две параллельные прямые (x,w) и $(x,-w)$, объединение которых примем за фазовое пространство состояний X. Рассмотрим на X следующий скачкообразный марковский процесс. Потребуем, чтобы его состояние в момент времени t, обозначаемое через $z_t = (x_t, v_t)$, $v_t = \pm w$, за бесконечно малый промежуток времени $[t, t+dt]$ с вероятностью $1 - a_i dt + o(dt)$ переходило в состояние $(x_t + v_t dt, v_t)$, а с вероятностью $a_i dt + o(dt)$ совершало скачок в область $(x_t + O(1), -v_t)$ на другой прямой $(i = 1,2)$. Интенсивность соскока a_i зависит, вообще говоря, от прямой: с прямой (x,w) примем ее за a_1, а с $(x,-w)$ — за a_2. Функцию F на X здесь удобно задавать парой функций f_1, f_2, определенных на $\mathbf{R}^1$, причем $f_1(x) = F(x,w)$, $f_2(x) = F(x,-w)$. Тогда соответствующая этому процессу полугруппа также представляется в виде пары

$$U_t(z) = (u_1(x,t), u_2(x,t)) = (\mathbf{E}_{(x,w)}\{F(z_t)\}, \mathbf{E}_{(x,-w)}\{F(z_t)\}),$$

при этом $U_0(z) = (f_1(x), f_2(x))$. Непосредственно по определению находим инфинитезимальный оператор A нашего процесса. Этому оператору можно придать следующую матричную форму:

$$A = \begin{pmatrix} w(\partial/\partial x) - a_1 & a_1 \\ a_2 & -w(\partial/\partial x) - a_2 \end{pmatrix}.$$

Если теперь воспользоваться известным соотношением для полугруппы (обратным уравнением Колмогорова) $\partial U_t(z)/\partial t = AU_t(z)$, то относительно компонент $U_t(z)$ получим систему двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\partial u_i/\partial t = \delta_i[w(\partial u_i/\partial x) + a_i(u_2 - u_1)]; \quad i = 1,2; \quad \delta_1 = 1, \quad \delta_2 = -1. \tag{7}$$

Из (7) вытекает, что функции $\widehat{c}_i = (u_1 + \delta_i u_2)/2$ являются решениями уравнения

$$\partial^2 c/\partial t^2 + (a_1 + a_2)(\partial c/\partial t) = w^2(\partial^2 c/\partial x^2) + (a_2 - a_1)w(\partial c/\partial x), \tag{8}$$

причем (1) является частным случаем (8) при $a_i = (w - \delta_i S)/(2\sigma w)$, $i = 1,2$. Понятно, что асимметричность процесса $(a_1 \neq a_2)$ приводит к преимущественному движению в одном направлении (дрейфу), а при $a_1 = a_2 = a$ (8) переходит в (2). Ввиду неотрицательности a_1, a_2 замечаем также, что предлагаемая модель приемлема при $|S| \le w$, что согласуется с физикой процесса.

Можно показать, что первое слагаемое в правой части (6) есть не что иное, как решение задачи Коши (2), (3), а второе — задачи (2), (4). Так как $(\partial u_i/\partial t)|_{t=0} = \delta_i[w(df_i/dx) + a_i(f_2 - f_1)]$, $i = 1,2$, находим, что $\widehat{c}_i(x,0) = (f_1(x) + \delta_i f_2(x))/2$; $(\partial \widehat{c}_i/\partial t)|_{t=0} = (w/2)(d(f_1 - \delta_i f_2)/dx) + (a_1 - \delta_i a_2)(f_2 - f_1)/2$. Из последних двух соотношений видно, что если $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$, то

$$\widehat{c}_1(x,0) = f(x), \quad (\partial \widehat{c}_1/\partial t)|_{t=0} \equiv 0; \tag{9}$$

$$\widehat{c}_2(x,0) \equiv 0, \qquad (\partial \widehat{c}_2/\partial t)|_{t=0} = w(df/dx). \tag{10}$$

Понятно, что такие $\widehat{c}_1$ и $\widehat{c}_2$ являются решениями некоторых задач (8), (3) и (8), (4) соответственно. Однако в (9) и (10) $f(x)$ можно выбирать по-разному. Положим в (9) $f(x) = \varphi(x)$, а в (10) — $w(df/dx) = \psi(x)$, т. е.

$$f(x) = (1/w)\int_0^x \psi(\tau)d\tau + \text{const}\,.$$

Тогда получаемая при этом функция $c(x,t) = \widehat{c}_1 + \widehat{c}_2$ будет, как легко видеть, решением задачи (8), (5); ему и придадим искомую вероятностную форму. Пусть $\widetilde{t} = \int\limits_0^t (-1)^{N(\tau,\omega)}d\tau$ — случайное время, соответствующее описанному выше марковскому процессу, здесь $N(\tau,\omega)$ — скачкообразный процесс Пуассона с переменной интенсивностью, равной a_1 после четного числа скачков и a_2 после нечетного их числа, ω — элемент пространства событий (счетного множества состояний). Тогда по определению $\widehat{c}_i(x,t) = (\mathbf{E}_{(x,w)}\{F(z_t)\} + \delta_i \mathbf{E}_{(x,-w)}\{F(z_t)\})/2$, $i = 1,2$, откуда при наших выборах $f(x)$ $\widehat{c}_1 = \mathbf{E}\{\varphi(x+\varepsilon w\widetilde{t})\}$, $\widehat{c}_2 = \mathbf{E}\Big\{(\varepsilon/w)\int\limits_0^{x+\varepsilon w\widetilde{t}} \psi(\tau)d\tau\Big\}$. Таким образом, формула вероятностного представления решения задачи Коши (8), (5) получается аналогичной (6): в (6) необходимо лишь заменить $\overline{t}$ на $\widetilde{t}$.

В заключение отметим, что к полученной формуле можно применять метод Монте-Карло аналогично тому, как это делается в работе авторов [5] (там же описано, как оценивать погрешность). Повышению эффективности такого метода посвящен § 5 работы [6]. Зависимость коэффициентов a, a_1, a_2 от времени не является непреодолимым препятствием [7]: нужно воспользоваться результатами [8]–[9] и несколько модифицировать скачкообразный процесс Пуассона. По поводу приложений полученных в настоящей статье результатов мы отсылаем к [10]–[11], рассмотренные же выше математические модели встречались в работах [12]–[14], посвященных некоторым техническим задачам.

Литература

1. Таганов И.Н. *Моделирование процессов массо- и энергопереноса. Нелинейные системы.* – Л.: Химия, 1979. – 204 с.
2. Ермаков С.М., Некруткин В.В., Сипин А.С. *Случайные процессы для решения классических уравнений математической физики.* – М.: Наука, 1984. – 208 с.
3. Кац М. *Несколько вероятностных задач физики и математики.* – М.: Наука, 1967. – 176 с.
4. Kisynski J. *On M. Kac's probabilistic formula for the solution of the telegraphist's equations* // Ann. Polonici Math. – 1974. – V. 29. – № 3. – P. 259–272.
5. Крючков А.Ф., Сиренек В.А. *О численно-вероятностных методах решения трехмерного гиперболического уравнения диффузии* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1998. – Т. 38. – № 1. – С. 107–114.
6. Сиренек В.А., Крючков А.Ф. *Вероятностное решение начально-краевой задачи для гиперболического уравнения массопереноса* // Матем. моделир. – 1998. – Т. 10. – № 6. – С. 107–117.
7. Сиренек В.А., Крючков А.Ф. *О вероятностном решении гиперболического уравнения массопереноса с конвективным членом* // Математика в вузе. Тр. межд. научно-метод. конф. – С.-Петербург: Технологич. ун-т, 1998. – С. 238–239.
8. Kaplan S. *Differential equations in which the Poisson process plays a role* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1964. – V.70. – P. 264–268.
9. Coleman W.A. *Mathematical verification of a certain Monte Carlo sampling technique and applications of the technique to radiation transport problems* // Nucl. Sci. and Engng. – 1968. – V. 32. – P. 78–81.
10. Сиренек В.А., Черемисин В.И., Кузичкин Н.В. *Применение метода Монте-Карло для решения гиперболических моделей гетерогенного катализа* // Гетерогенные каталитические процессы. – Л.: ЛТИ им. Ленсовета, – 1986. – С. 27–31.

11. Сиренек В.А., Кузичкин Н.В. *Вероятностное решение гиперболических моделей гетерогенного катализа* // Каталитические процессы и катализаторы. – Л.: ЛТИ им. Ленсовета, 1987. – С. 122–128.
12. Сиренек В.А., Таганов И.Н. *Математическая модель нестационарного выщелачивания стекла* // Физ. и хим. стекла. – 1981. – Т. 7. – № 5. – С. 637–640.
13. Сиренек В.А., Комаров Е.В., Иоффе И.В. *К теории выщелачивания стекла* // Физ. и хим. стекла. – 1984. – Т. 10. – № 1. – С. 106–109.
14. Sirenek V.A., Cholodnov V.A., Taganov I.N. *Mathematische Modellierung des nichtstationären Auslaugens von Glas unter Beachtung der Verzögerung der Diffusionsströme* // Wiss. Zeitschr. TH Leuna-Merseburg. – 1987. – Bd. 29. – № 4. – S. 470–478.

Санкт-Петербургский государственный технологический институт (*технический университет*)

Поступили
первый вариант 08.07.1996
окончательный вариант 12.11.1999