ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 6 (505)

УДК 517.988

*И.В. ШРАГИН*

# КЛАССИФИКАЦИЯ ТИПА БЭРА ИЗМЕРИМЫХ И СТАНДАРТНЫХ ФУНКЦИЙ

## Введение

Пусть $(T, \mathcal{T})$ — измеримое пространство, $X$ и $Y$ — метрические пространства, $\mathcal{B}(X)$ и $\mathcal{B}(Y)$ — семейства всех борелевских множеств в $X$ и $Y$ соответственно. Функция $f : T \times X \to Y$ называется суперпозиционно измеримой, если для любой $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(X))$-измеримой функции $\varphi : T \to X$ функция $\Phi : T \to Y$, где $\Phi(t) = f(t, \varphi(t))$, $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(Y))$-измерима.

В монографии ([1], п. 17.8) по образцу известных классов Бэра борелевских функций определены классы $B(\alpha)$ суперпозиционно измеримых вещественных функций при всех счетных ординалах $\alpha$. При этом класс $B(0)$ состоит из функций, удовлетворяющих известным условиям Каратеодори.

В работах [2] и [3] исследован широкий класс суперпозиционно измеримых функций, так называемых стандартных функций. В частности, показано, что если пространство $X$ сепарабельно, то все классы $B(\alpha)$ из [1] состоят из стандартных функций (см. также [4], § 1.4). При этом оставался открытым вопрос, охватываются ли классами $B(\alpha)$ все вещественные стандартные функции ([3], § 4). Положительный ответ на этот вопрос дан в [5].

В данной работе проблема бэровской классификации решена в абстрактной ситуации, в которой рассматриваются функции $f : L \to Y$, где $L$ — пространство с $\sigma$-алгеброй $\Lambda$, а $Y$ — метрическое пространство.

В разделе 1 по образцу классификации борелевских множеств в метрических пространствах ([6], § 11) вводятся классы множеств, принадлежащих $\sigma$-алгебре $\Lambda$.

В разделах 2 и 3 рассматривается понятие $\Gamma$-измеримости функции $f : L \to Y$, более общее, чем обычная измеримость, и определяются классы типа Бэра $\mathcal{B}_\xi$ (при всех счетных ординалах $\xi \geq 1$), охватывающие при сепарабельном $Y$ все $\Gamma$-измеримые функции.

В разделе 4 полученные результаты применяются к ситуации, когда $L = T \times X$, $\Lambda = \mathcal{T} \times \mathcal{B}(X)$, а $\Gamma$-измеримость функций означает их стандартность. Тем самым устанавливается (при сепарабельном $Y$), что функция $f : T \times X \to Y$ стандартна тогда и только тогда, когда она принадлежит некоторому классу $\mathcal{B}_\xi$. Кроме того, при некоторых дополнительных условиях доказано, что все классы $\mathcal{B}_\xi$ стандартных функций различны.

## 1. Классификация измеримых множеств

Пусть $(L, \Lambda)$ — измеримое пространство, т. е. $L$ — непустое множество, $\Lambda$ — $\sigma$-алгебра на $L$. Обозначим, как обычно, через $\omega_1$ первый несчетный ординал, а через $W$ — множество всех счетных ординалов, кроме нуля, т. е. $W = \{\xi : 1 \leq \xi < \omega_1\}$.

Определим рекурсивно классы $\Sigma_\xi$ и $\Pi_\xi$ ($\xi \in W$) множеств, принадлежащих $\sigma$-алгебре $\Lambda$, в духе известной классификации борелевских множеств в метрическом пространстве. При этом воспользуемся методикой из ([6], § 11). Итак, пусть некоторое семейство $\Sigma_1 \subset \Lambda$ обладает следующими свойствами: 1) $\Sigma_1$ порождает $\sigma$-алгебру $\Lambda$; 2) семейство $\Sigma_1$ конечно-аддитивно и конечно-мультипликативно (откуда следует, что $\{\emptyset, L\} \subset \Sigma_1$); 3) если $A \in \Sigma_1$, то существуют такие множества $C_n$, $n = 1, 2, \ldots$, что $(\forall n)\ L \setminus C_n \in \Sigma_1$ и $A = \bigcup\limits_n C_n$.

Тривиальным примером такого семейства служит сама $\sigma$-алгебра $\Lambda$. Если $L$ — метрическое пространство, а $\Lambda$ — $\sigma$-алгебра его борелевских множеств, то в качестве $\Sigma_1$ можно взять семейство всех открытых множеств в $L$.

Пусть далее $\Pi_1$ — семейство дополнений (по отношению к $L$) всех множеств из $\Sigma_1$ (значит, в условии 3) $(\forall n)\ C_n \in \Pi_1$). Очевидно, $\Pi_1$ обладает теми же свойствами 1) и 2), что и $\Sigma_1$, а вместо условия 3) имеем свойство: 3а) каждое множество из $\Pi_1$ представимо в виде счетного пересечения множеств из $\Sigma_1$.

Возьмем $\xi > 1$ и предположим, что определены все классы $\Sigma_\alpha$ и $\Pi_\alpha$, где $1 \le \alpha < \xi$. Тогда по определению

$$\Sigma_\xi = \Big\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n : (\forall n)\ C_n \in \bigcup_{1 \le \alpha < \xi} \Pi_\alpha \Big\}, \tag{1.1}$$

$$\Pi_\xi = \Big\{ \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n : (\forall n)\ D_n \in \bigcup_{1 \le \alpha < \xi} \Sigma_\alpha \Big\}. \tag{1.2}$$

Применяя индукцию, получаем $(\forall \xi \in W)\ \Pi_\xi = \{L \setminus C : C \in \Sigma_\xi\}$. Кроме того, очевидно, классы $\Sigma_\xi$ при $\xi > 1$ счетно-аддитивны, а $\Pi_\xi$ счетно-мультипликативны. Положим

$$\Delta_\xi = \Sigma_\xi \cap \Pi_\xi, \quad \xi \in W.$$

Ясно, что $(\forall \xi)\ \{\emptyset, L\} \subset \Delta_\xi$.

**Лемма 1.1.** *Если $\xi < \eta$, то $\Sigma_\xi \cup \Pi_\xi \subset \Delta_\eta$.*

**Доказательство.** Из (1.1) и (1.2) следует, что $\Pi_\xi \subset \Sigma_\eta$ и $\Sigma_\xi \subset \Pi_\eta$. Остается показать, что $\Sigma_\xi \subset \Sigma_\eta$, откуда, переходя к дополнениям, получим $\Pi_\xi \subset \Pi_\eta$.

Если $\eta > \xi + 1$, то, как уже показано, $\Sigma_\xi \subset \Pi_{\xi+1} \subset \Sigma_\eta$. При $\eta = \xi + 1$ применим индукцию. Из условия 3) и равенства (1.1) следует $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$. Далее, пусть $\xi > 1$ и $(\forall \alpha < \xi)\ \Sigma_\alpha \subset \Sigma_{\alpha+1}$, откуда $\Pi_\alpha \subset \Pi_{\alpha+1}$. Тогда если $A \in \Sigma_\xi$, то $A = \bigcup\limits_n C_n$, где $(\forall n \in \mathbb{N})\ C_n \in \Pi_{\alpha(n)}$ при некотором $\alpha(n) < \xi$. Так как $\Pi_{\alpha(n)} \subset \Pi_{\alpha(n)+1}$, то $A \in \Sigma_{\xi+1}$. Таким образом, $\Sigma_\xi \subset \Sigma_{\xi+1}$. $\square$

**Замечание 1.1.** Из леммы 1.1 и равенств (1.1) и (1.2) следует

$$\Sigma_{\xi+1} = \Big\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n : (\forall n)\ C_n \in \Pi_\xi \Big\}, \quad \Pi_{\xi+1} = \Big\{ \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n : (\forall n)\ D_n \in \Sigma_\xi \Big\} \ \ \forall \xi \in W.$$

**Лемма 1.2.** *Все классы $\Sigma_\xi$ конечно-мультипликативны, а $\Pi_\xi$ конечно-аддитивны.*

**Доказательство.** Ввиду свойства 2) классов $\Sigma_1$ и $\Pi_1$ будем считать, что $\xi > 1$. Пусть $A, B \in \Sigma_\xi$, т. е. $A = \bigcup\limits_m C_m$, $B = \bigcup\limits_n D_n$, где $(\forall m, n \in \mathbb{N})\ C_m \in \Pi_{\alpha(m)}$, $D_n \in \Pi_{\beta(n)}$ при некоторых $\alpha(m)$, $\beta(n) < \xi$. Тогда $A \cap B = \bigcup\limits_{m,n} (C_m \cap D_n)$. Пусть $\gamma(m,n) = \max(\alpha(m), \beta(n))$, так что $\gamma(m,n) < \xi$ и в силу леммы 1.1 $C_m, D_n \in \Pi_{\gamma(m,n)}$. Так как класс $\Pi_{\gamma(m,n)}$ конечно-мультипликативен, то $C_m \cap D_n \in \Pi_{\gamma(m,n)}$. Отсюда следует, что $A \cap B \in \Sigma_\xi$, т. е. класс $\Sigma_\xi$ конечно-мультипликативен. Переходя к дополнениям, получаем, что класс $\Pi_\xi$ конечно-аддитивен. $\square$

**Лемма 1.3.** *Все классы $\Delta_\xi$ являются алгебрами на $L$, а их объединение — $\sigma$-алгеброй.*

**Доказательство.** Очевидно, что $L \setminus C \in \Delta_\xi$, если $C \in \Delta_\xi$. Очевидна также конечная аддитивность класса $\Delta_\xi$. Остается показать, что семейство $\bigcup\limits_{\xi \in W} \Delta_\xi$ счетно-аддитивно.

Пусть $A_n \in \Delta_{\alpha(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, при некоторых $\alpha(n) \in W$. Как известно, $(\exists \beta \in W)\ (\forall n \in \mathbb{N})$ $\alpha(n) < \beta$. В силу леммы 1.1 $(\forall n)\ A_n \in \Sigma_\beta$, откуда $\bigcup\limits_n A_n \in \Sigma_\beta \subset \Delta_{\beta+1}$. $\square$

**Предложение 1.1.** *Справедливы равенства* $\cup\Sigma_\xi = \cup\Pi_\xi = \cup\Delta_\xi = \Lambda$, *где все объединения берутся по* $\xi \in W$.

**Доказательство.** Из леммы 1.1 следует

$$\cup\Delta_\xi \subset \cup\Sigma_\xi \subset \cup\Pi_\xi \subset \Lambda.$$

Но т. к. класс $\Sigma_1$ порождает $\sigma$-алгебру $\Lambda$ и $\Sigma_1 \subset \cup\Delta_\xi$, то в силу леммы 1.3 $\Lambda \subset \cup\Delta_\xi$. $\square$

Заметим, что построенная классификация множеств, входящих в $\Lambda$, полностью определяется выбором исходного класса $\Sigma_1$.

Следующие две леммы будут использованы в разделе 3 (ср. [7], § 30, VII, теорема 1 и IX, теоремы 1 и 2).

**Лемма 1.4** (лемма редукции). *Пусть* $C_k \in \Sigma_\xi$, $k = \overline{1,p}$, *при некотором* $\xi > 1$, *причем* $\bigcup\limits_k C_k \in \Delta_\xi$. *Тогда существуют такие попарно непересекающиеся множества* $D_k \in \Delta_\xi$, $k = \overline{1,p}$, *что* $(\forall k)$ $D_k \subset C_k$ *и* $\bigcup\limits_k D_k = \bigcup\limits_k C_k$.

**Доказательство.** Согласно (1.1) $C_k = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_{k,n}$, где $(\forall n)$ $C_{k,n} \in \bigcup\limits_{\alpha<\xi} \Pi_\alpha$, $k = \overline{1,p}$. Тогда в силу леммы 1.1 $\forall (k,n)$ $C_{k,n} \in \Delta_\xi$.

Рассмотрим биекцию $\varphi : \{1,2,\ldots,p\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, где $\varphi(k,n) = (n-1)p+k$, и положим $B_m = C_{k,n}$, $m = 1,2,\ldots$, где $\varphi(k,n) = m$. Тогда

$$\bigcup_{k=1}^{p} C_k = \bigcup_{k=1}^{p} \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{k,n} = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m,$$

где $(\forall m)$ $E_m = B_m \setminus \bigcup\limits_{i<m} B_i$. Очевидно, множества $E_m$ попарно не пересекаются и в силу леммы 1.3 $(\forall m)$ $E_m \in \Delta_\xi$. Положим

$$D_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{\varphi(k,n)}, \quad k = \overline{1,p}.$$

Тогда $(\forall k)$ $D_k \in \Sigma_\xi$ и множества $D_k$ попарно не пересекаются. При этом т. к. $(\forall n)$ $E_{\varphi(k,n)} \subset B_{\varphi(k,n)} = C_{k,n} \subset C_k$, то $D_k \subset C_k$, $k = \overline{1,p}$, и $\bigcup\limits_{k=1}^{p} D_k = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m = \bigcup\limits_{k=1}^{p} C_k \in \Delta_\xi$. Отсюда следует, что

$$(\forall k)\ D_k = \bigcup_{i=1}^{p} D_i \cap [L \setminus \bigcup_{i\neq k} D_i] \in \Pi_\xi,$$

поэтому $D_k \in \Delta_\xi$, $k = \overline{1,p}$. $\square$

**Лемма 1.5.** *Если* $A \in \Delta_{\xi+1}$, *где* $\xi > 1$, *то существуют такие множества* $A_n \in \Delta_\xi$, $n \in \mathbb{N}$, *что* $A = \lim A_n$. *Кроме того, если* $\xi$ — *предельный ординал, то* $(\forall n)$ $A_n \in \bigcup\limits_{\alpha<\xi} \Delta_\alpha$.

**Доказательство.** Так как $A \in \Sigma_{\xi+1}$ и $\xi > 1$, то в силу замечания 1.1 и равенства (1.2)

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{\infty} B_{k,i},$$

где $\forall (k,i)$ $B_{k,i} \in \Sigma_{\alpha(k,i)}$ при некоторых $\alpha(k,i) < \xi$, откуда по лемме 1.1 $B_{k,i} \in \Delta_\xi$.

Далее, т. к. $A \in \Pi_{\xi+1}$, то $A = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} E_i$, где $(\forall i)$ $E_i \in \Sigma_\xi$. Положим $(\forall i)$ $D_i = \bigcap\limits_{j=1}^{i} E_j$. Тогда $A = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} D_i$ и $(\forall i)$ $D_{i+1} \subset D_i$, причем по лемме 1.2 $D_i \in \Sigma_\xi$.

Так как $\xi > 1$, то в силу (1.1) $(\forall i \in \mathbb{N})$ $D_i = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} C_{k,i}$, где $\forall (k,i)$ $C_{k,i} \in \Pi_{\beta(k,i)}$ при некоторых $\beta(k,i) < \xi$, откуда $C_{k,i} \in \Delta_\xi$. Следовательно,

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} C_{k,i},$$

причем $(\forall i)$ $\bigcup\limits_k C_{k,i+1} \subset \bigcup\limits_k C_{k,i}$.

Воспользуемся теперь леммой Серпинского ([7], § 30, IX). Если

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{\infty} B_{k,i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} C_{k,i},$$

причем $(\forall i)\ \bigcup_k C_{k,i+1} \subset \bigcup_k C_{k,i}$, то $A = \lim A_n$, где

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{n} \Big[ \Big( \bigcap_{i=1}^{n} B_{k,i} \Big) \cap \Big( \bigcup_{i=1}^{n} C_{i,k} \Big) \Big], \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1.3}$$

Так как все условия этой леммы выполнены, то $A = \lim A_n$, где множества $A_n$ определены в (1.3). Так как $\forall (i,k)\ B_{k,i}, C_{i,k} \in \Delta_\xi$, то по лемме 1.3 $(\forall n)\ A_n \in \Delta_\xi$. Если $\xi$ — предельный ординал, то положим

$$\gamma_n = \max_{1 \le i,k \le n} [\max(\alpha(k,i), \beta(i,k))] + 1, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Тогда $(\forall n)\ \gamma(n) < \xi$, и в силу леммы 1.1 $A_n \in \Delta_{\gamma(n)}$. $\square$

## 2. Γ-измеримые функции

Пусть $(L, \Lambda)$ — измеримое пространство. Будем считать построенными классы $\Sigma_\xi$ и $\Pi_\xi$, $\xi \in W$, при некотором выборе класса $\Sigma_1$.

Пусть далее $Y$ — метрическое пространство с метрикой $\rho$, $\mathcal{B}(Y)$ — семейство всех борелевских множеств в $Y$. Как обычно, назовем функцию $f : A \to Y$, где $A \subset L$, $(\Lambda, \mathcal{B}(Y))$-измеримой, если $(\forall B \in \mathcal{B}(Y))\ f^{-1}(B) \in \Lambda$.

Введем несколько более общее понятие. С этой целью зафиксируем некоторое счетно-мультипликативное семейство $\Gamma \subset \Delta_1 \setminus \{\emptyset\}$, так что $L \in \Gamma$.

**Определение 2.1.** Функция $f : L \to Y$ называется $\Gamma$-измеримой, если существует такое множество $\mathcal{K} \in \Gamma$, что функция $f|_{\mathcal{K}}$ (сужение $f$ на $\mathcal{K}$) $(\Lambda, \mathcal{B}(Y))$-измерима.

Множество всех $\Gamma$-измеримых функций обозначим через $\Phi_\Gamma$.

Так как $L \in \Gamma$, то всякая $(\Lambda, \mathcal{B}(Y))$-измеримая функция $f : L \to Y$ $\Gamma$-измерима. Отметим еще, что если $\Gamma = \{L\}$, то $\Gamma$-измеримость совпадает с $(\Lambda, \mathcal{B}(Y))$-измеримостью.

**Определение 2.2.** Последовательность функций $f_n : L \to Y$ называется $\Gamma$-сходящейся к $f : L \to Y$, если существует такое $L_0 \in \Gamma$, что $(\forall l \in L_0)\ f_n(l) \underset{n}{\to} f(l)$.

**Лемма 2.1.** *Если последовательность функций $f_n \in \Phi_\Gamma$ $\Gamma$-сходится к функции $f$, то $f \in \Phi_\Gamma$.*

**Доказательство.** Пусть функции $f_n|_{L_n}$, где $(\forall n)\ L_n \in \Gamma$, $(\Lambda, \mathcal{B}(Y))$-измеримы, и при некотором $L_0 \in \Gamma$ $f_n(l) \underset{n}{\to} f(l)$, $l \in L_0$. Положим $\mathcal{K} = \bigcap_{n=0}^{\infty} L_n$. Тогда $\mathcal{K} \in \Gamma$ и для любого замкнутого множества $F \subset Y$

$$(f|_{\mathcal{K}})^{-1}(F) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} \{l \in \mathcal{K} : f_{n+i}(l) \in G_n\}, \tag{2.1}$$

где $(\forall n)\ G_n = \{y \in Y : \rho(y, F) < 1/n\}$. Из (2.1) следует, что $(f|_{\mathcal{K}})^{-1}(F) \in \Lambda$, т. е. $f \in \Phi_\Gamma$. $\square$

**Определение 2.3.** Функция $f : L \to Y$ называется $\Sigma_\xi$-измеримой, если существует такое $\mathcal{K} \in \Gamma$, что $(f|_{\mathcal{K}})^{-1}(U) \in \Sigma_\xi$ для любого открытого множества $U \subset Y$.

Множество всех $\Sigma_\xi$-измеримых функций обозначим через $\Phi_\xi$.

Если $\xi < \eta$, то в силу леммы 1.1 $\Phi_\xi \subset \Phi_\eta$, а т. к. $\Sigma_\xi \subset \Lambda$, то $(\forall \xi \in W)\ \Phi_\xi \subset \Phi_\Gamma$.

Легко показать, что $f \in \Phi_\xi$ тогда и только тогда, когда существует такое $\mathcal{K} \in \Gamma$, что $(f|_{\mathcal{K}})^{-1}(F) \in \Pi_\xi$ при любом замкнутом множестве $F \subset Y$.

**Предложение 2.1.** *Если пространство $Y$ сепарабельно, то $\Phi_\Gamma \subset \bigcup_{\xi \in W} \Phi_\xi$.*

**Доказательство.** Пусть $f \in \Phi_\Gamma$ и пусть $\{U_n\}$ — счетная база открытых множеств в $Y$. Тогда $\exists \mathcal{K} \in \Gamma$

$$(f|_{\mathcal{K}})^{-1}(U_n) \in \Lambda, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

а т. к. $\Lambda = \bigcup\limits_{\xi \in W} \Sigma_\xi$, то $(\forall n)$ $(\exists \xi(n) \in W)$

$$(f|_{\mathcal{K}})^{-1}(U_n) \in \Sigma_{\xi(n)}.$$

Возьмем такое $\xi \in W$, что $(\forall n)$ $\xi(n) < \xi$ (так что $\xi > 1$). Так как $\Sigma_{\xi(n)} \subset \Sigma_\xi$, то $(\forall n)$ $(f|_{\mathcal{K}})^{-1}(U_n) \in \Sigma_\xi$. Но класс $\Sigma_\xi$ счетно-аддитивен, так что $(f|_{\mathcal{K}})^{-1}(U) \in \Sigma_\xi$ для любого открытого множества $U \subset Y$, т. е. $f \in \Phi_\xi$. $\square$

Таким образом, если пространство $Y$ сепарабельно, то $\Phi_\Gamma = \bigcup\limits_{\xi \in W} \Phi_\xi$.

## 3. Классификация типа Бэра Γ-измеримых функций

Сохраняя исходные данные из раздела 2 и, в частности, фиксированное семейство Γ, рассмотрим классы Γ-измеримых функций, аналогичные классам Бэра борелевских функций ([6], § 24).

**Определение 3.1.** Функция $f : L \to Y$ принадлежит классу $\mathcal{B}_1$, если она $\Sigma_2$-измерима. Пусть $1 < \xi < \omega_1$ и определены все классы $\mathcal{B}_\alpha$ при $1 \le \alpha < \xi$. Тогда функция $f : L \to Y$ по определению принадлежит классу $\mathcal{B}_\xi$, если к $f$ Γ-сходится некоторая последовательность функций $f_n \in \bigcup\limits_{\alpha < \xi} \mathcal{B}_\alpha$.

Очевидно, $\mathcal{B}_\xi \subset \mathcal{B}_\eta$ при $\xi < \eta$. Положим $\mathcal{B} = \bigcup\limits_{\xi \in W} \mathcal{B}_\xi$. Так как согласно лемме 2.1 семейство $\Phi_\Gamma$ замкнуто относительно Γ-сходимости и $\mathcal{B}_1 \subset \Phi_\Gamma$, то $\mathcal{B} \subset \Phi_\Gamma$. Уточним это утверждение в следующем предложении.

**Предложение 3.1.** *$\mathcal{B}_\xi \subset \Phi_{\xi+1}$ при любом $\xi \in W$.*

**Доказательство.** Применим индукцию. Согласно определению 3.1 $\mathcal{B}_1 = \Phi_2$. Предположим, что $\mathcal{B}_\alpha \subset \Phi_{\alpha+1}$ при всех $\alpha < \xi$, где $\xi > 1$, и возьмем $f \in \mathcal{B}_\xi$. Тогда некоторая последовательность функций $f_n \in \mathcal{B}_{\alpha(n)}$, где $(\forall n)$ $\alpha(n) < \xi$, Γ-сходится к $f$, т. е. при некотором $L_0 \in \Gamma$ $f_n(l) \underset{n}{\to} f(l)$, $l \in L_0$. По предположению $(\forall n)$ $f_n \in \Phi_{\alpha(n)+1}$, т. е. для некоторого $L_n \in \Gamma$

$$\{l \in L_n : f_n(l) \in U\} \in \Sigma_{\alpha(n)+1} \subset \Sigma_\xi$$

при любом открытом множестве $U \subset Y$. Положим $\mathcal{K} = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} L_n$. Тогда $\mathcal{K} \in \Gamma$ и имеет место (2.1) для любого замкнутого множества $F \subset Y$. Так как $\Gamma \subset \Sigma_1$, то $\mathcal{K} \in \Sigma_\xi$, так что $\forall (i, n)$ $\{l \in \mathcal{K} : f_{n+i}(l) \in G_n\} \in \Sigma_\xi$. Тогда в силу счетной аддитивности класса $\Sigma_\xi$ из (2.1) следует $\{l \in \mathcal{K} : f(l) \in F\} \in \Pi_{\xi+1}$, т. е. $f \in \Phi_{\xi+1}$. $\square$

Для доказательства обратного включения $\Phi_{\xi+1} \subset \mathcal{B}_\xi$ (при сепарабельном $Y$) потребуется несколько вспомогательных предложений (ср. [5], § 31, VIII).

**Лемма 3.1.** *Пусть функция $f : L \to Y$ имеет конечное множество значений $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_p\}$, причем $f^{-1}\{z_k\} \in \Delta_{\xi+1}$, $k = \overline{1,p}$, при некотором $\xi > 1$. Тогда существуют такие функции $f_n \in \Phi_\xi$, $n = 1, 2, \ldots$, что $(\forall n)$ $f_n(L) \subset Z$ и $(\forall l \in L)$ $f_n(l) \underset{n}{\to} f(l)$. Кроме того, если $\xi$ — предельный ординал, то $(\forall n)$ $f_n \in \Phi_{\alpha(n)}$ при некотором $\alpha(n) < \xi$.*

**Доказательство.** Положим $C_k = f^{-1}\{z_k\}$, $k = \overline{1,p}$, так что $\bigcup_{k=1}^{p} C_k = L$, причем множества $C_k$ попарно не пересекаются. По лемме 1.5 существуют такие множества $C_{k,n} \in \Delta_\xi$, $n = 1, 2, \ldots$, что $(\forall k)$ $C_k = \lim_n C_{k,n}$. При этом если $\xi$ — предельный ординал, то $\forall (k,n)$ $C_{k,n} \in \bigcup_{\alpha<\xi} \Delta_\alpha$.

Положим $\forall n$ $D_{k,n} = C_{k,n} \setminus \bigcup_{i<k} C_{i,n}$, $k = \overline{1,p}$. Очевидно, $\forall n$ множества $D_{k,n}$, $k = \overline{1,p}$, попарно не пересекаются и в силу леммы 1.3 $\forall (k,n)$ $D_{k,n} \in \Delta_\xi$. При этом если $\xi$ — предельный ординал, то, как очевидно, $\forall (k,n)$ $D_{k,n} \in \bigcup_{\alpha<\xi} \Delta_\alpha$.

Покажем, что $C_k = \lim_n D_{k,n}$, $k = \overline{1,p}$. Действительно, т. к. $D_{k,n} \subset C_{k,n}$, то $\underline{\lim}\, D_{k,n} \subset \overline{\lim}\, D_{k,n} \subset \lim C_{k,n} = C_k$, $k = \overline{1,p}$. Остается показать, что $C_k \subset \underline{\lim}\, D_{k,n}$, $k = \overline{1,p}$. При этом можно считать, что $k > 1$, т. к. $(\forall n)$ $D_{1,n} = C_{1,n}$. Итак, пусть $l \in C_k$. Тогда $(\exists n_0)$ $(\forall n \geq n_0)$ $l \in C_{k,n}$. Но т. к. $l \notin C_i$ при $i < k$, то $(\exists n_i)$ $(\forall n \geq n_i)$ $l \notin C_{i,n}$, $1 \leq i < k$. Тогда при $n \geq \max\{n_i : 0 \leq i < k\}$ $l \in D_{k,n}$, т. е. $l \in \underline{\lim}\, D_{k,n}$.

Положим при $n = 1, 2, \ldots$

$$f_n(l) = \begin{cases} z_k, & l \in D_{k,n}, \quad k = \overline{1,p}; \\ z_1, & l \in L \setminus \bigcup_{k=1}^{p} D_{k,n}. \end{cases}$$

Так как $(\forall n)$ $D_{k,n} \in \Delta_\xi$, $k = \overline{1,p}$, то $f_n \in \Phi_\xi$. При этом если $\xi$ — предельный ординал, то $\forall (k,n)$ $D_{k,n} \in \Delta_{\alpha(k,n)}$ при некотором $\alpha(k,n) < \xi$. Положим $\alpha(n) = \max\{\alpha(k,n) : 1 \leq k \leq p\}$. Тогда $(\forall n)$ $D_{k,n} \in \Delta_{\alpha(n)}$, $k = \overline{1,p}$, так что $(\forall n)$ $f_n \in \Phi_{\alpha(n)}$, причем $\alpha(n) < \xi$.

Покажем наконец, что $(\forall l \in L)$ $f_n(l) \underset{n}{\to} f(l)$. Пусть $l \in L$. Тогда $l \in C_k$, т. е. $f(l) = z_k$ при некотором $k$. Так как $C_k = \lim_n D_{k,n}$, то $(\exists m_k)$ $(\forall n \geq m_k)$ $l \in D_{k,n}$. Следовательно, $(\forall n \geq m_k)$ $f_n(l) = z_k = f(l)$, т. е. $f_n(l) \underset{n}{\to} f(l)$. $\square$

**Лемма 3.2.** *Пусть $\forall n \in \mathbb{N}$ функции $f_n$ и $g_n$ $\Sigma_{\alpha(n)}$-измеримы, имеют конечные множества значений и $\forall l \in L$*

$$f_n(l) \underset{n}{\to} f(l), \quad g_n(l) \underset{n}{\to} g(l).$$

*Тогда если $(\exists \mathcal{K} \subset L)$ $(\forall l \in \mathcal{K})$ $\rho(f(l), g(l)) < a$, то $\forall n$ существует такая функция $h_n \in \Phi_{\alpha(n)}$ с конечным множеством значений, что $(\forall l \in \mathcal{K})$ $h_n(l) \underset{n}{\to} g(l)$ и $\forall l \in L$*

$$\rho(f_n(l), h_n(l)) < a, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.1}$$

**Доказательство.** Положим при $n = 1, 2, \ldots$ и $l \in L$

$$h_n(l) = \begin{cases} g_n(l), & \text{если } \rho(f_n(l), g_n(l)) < a; \\ f_n(l) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Ясно, что $\forall l \in L$ неравенства (3.1) выполняются и $\forall n$ множество $h_n(L)$ конечно. Очевидно также, что $(\forall l \in \mathcal{K})$ $h_n(l) \underset{n}{\to} g(l)$.

Пусть далее при фиксированном $n$

$$f_n(L) \cup g_n(L) = \{y_1, y_2, \ldots, y_p\}.$$

Так как $\{f_n, g_n\} \subset \Phi_{\alpha(n)}$, то существует такое множество $M \in \Gamma$, что $C_i, D_i \in \Pi_{\alpha(n)}$, $i = \overline{1,p}$, где $C_i = (f_n|_M)^{-1}\{y_i\}$, $D_i = (g_n|_M)^{-1}\{y_i\}$.

Положим $P = \{(i,j) : C_i \cap D_j \neq \emptyset\}$, $Q = \{(i,j) \in P : \rho(y_i, y_j) < a\}$. Тогда $M = \bigcup_{(i,j)\in P} (C_i \cap D_j)$ и $\forall l \in C_i \cap D_j$

$$h_n(l) = \begin{cases} y_j, & \text{если } (i,j) \in Q; \\ y_i, & \text{если } (i,j) \in P \setminus Q. \end{cases}$$

Так как $\forall (i,j)$ $C_i \cap D_j \in \Pi_{\alpha(n)}$, то $h_n \in \Phi_{\alpha(n)}$. $\square$

**Лемма 3.3.** *Пусть пространство $Y$ сепарабельно. Тогда если $f \in \Phi_{\xi+1}$ при некотором $\xi>1$, то к $f$ $\Gamma$-сходится некоторая последовательность функций $\varphi_n \in \Phi_{\alpha(n)}$, где $\alpha(n) < \xi$, если $\xi$ — предельный ординал, и $\alpha(n) = \xi$ в противном случае.*

**Доказательство.** Так как сепарабельное метрическое пространство гомеоморфно вполне ограниченному пространству ([7], § 22, II, следствие 1a), то без ограничения общности будем считать пространство $Y$ вполне ограниченным. Значит, $\forall p \in \mathbb{N}$ в $Y$ существует такое множество $Y_p = \{y_{p,i} : 1 \le i \le m_p\}$, что $Y = \bigcup_{i=1}^{m_p} U_{p,i}$, где

$$U_{p,i} = \{y : \rho(y, y_{p,i}) < 2^{-p}\}, \quad i = \overline{1, m_p}.$$

Так как $f \in \Phi_{\xi+1}$, то $(\exists \mathcal{K} \in \Gamma)$ $\forall p \in \mathbb{N}$

$$C_{p,i} := (f|_{\mathcal{K}})^{-1}(U_{p,i}) \in \Sigma_{\xi+1}, \quad i = \overline{1, m_p}.$$

При этом $\bigcup_{i=1}^{m_p} C_{p,i} = \mathcal{K} \in \Delta_1 \subset \Delta_{\xi+1}$. Тогда по лемме 1.4 существуют такие попарно непересекающиеся множества $D_{p,i} \in \Delta_{\xi+1}$, что $D_{p,i} \subset C_{p,i}$, $i = \overline{1, m_p}$, и $\bigcup_{i=1}^{m_p} D_{p,i} = \mathcal{K}$.

Определим функции $f_p : L \to Y$, $p = 1, 2, \ldots$, положив

$$f_p(l) = \begin{cases} y_{p,i}, & l \in D_{p,i}, \quad i = \overline{1, m_p}; \\ y_{p,1}, & l \in L \setminus \mathcal{K}. \end{cases}$$

Легко проверить, что $\forall l \in \mathcal{K}$

$$\rho(f(l), f_p(l)) < 2^{-p}, \tag{3.2}$$

откуда $\rho(f_p(l), f_{p+1}(l)) < 2^{1-p}$, $p = 1, 2, \ldots$

По лемме 3.1 $\forall p$ существуют такие функции $f_{p,n} \in \Phi_{\alpha(p,n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, что $(\forall n)$ $f_{p,n}(L) \subset Y_p$ и $(\forall l \in L)$ $f_{p,n}(l) \underset{n}{\to} f_p(l)$. При этом $\alpha(p,n) < \xi$, если $\xi$ — предельный ординал, и $\alpha(p,n) = \xi$ в противном случае.

Далее следует построение путем индукции по $p$ таких функций $h_{p,n} \in \Phi_{\beta(p,n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, с конечными множествами значений, что $\forall (l \in \mathcal{K},\, p \in \mathbb{N})$ $h_{p,n}(l) \underset{n}{\to} f_p(l)$ и

$$\rho(h_{p+1,n}(l), h_{p,n}(l)) < 2^{1-p}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.3}$$

При этом $\beta(p,n) < \xi$, если $\xi$ — предельный ординал, и $\beta(p,n) = \xi$ в противном случае.

Полагая $(\forall n)$ $h_{1,n} = f_{1,n}$ и $\beta(1,n) = \alpha(1,n)$, предположим, что при некотором $p$ определены требуемые функции $h_{p,n}$, $n = 1, 2, \ldots$ Применим лемму 3.2, где роли $f_n$, $g_n$, $f$, $g$, $a$ играют $h_{p,n}$, $f_{p+1,n}$, $f_p$, $f_{p+1}$, $2^{1-p}$ соответственно. Тогда получим такие функции $h_{p+1,n}$, $n = 1, 2, \ldots$, с конечными множествами значений, что $(\forall l \in \mathcal{K})$ $h_{p+1,n}(l) \underset{n}{\to} f_{p+1}(l)$ и имеет место (3.3). Кроме того, $(\forall n)$ $h_{p+1,n} \in \Phi_{\beta(p+1,n)}$, где $\beta(p+1,n) = \max(\alpha(p+1,n), \beta(p,n))$.

Положим $(\forall l \in L)$ $\varphi_n(l) = h_{n,n}(l)$ и $\alpha(n) = \beta(n,n)$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда $(\forall n)$ $\varphi_n \in \Phi_{\alpha(n)}$, причем $\alpha(n) < \xi$, если $\xi$ — предельный ординал, и $\alpha(n) = \xi$ в противном случае. Покажем, что $(\forall l \in \mathcal{K})$ $\varphi_n(l) \underset{n}{\to} f(l)$. С этой целью, зафиксировав $l \in \mathcal{K}$, $\varepsilon > 0$ и $p \in \mathbb{N}$, при котором $2^{-p} < \varepsilon$, возьмем такое $n_0 \ge p$, что $(\forall n > n_0)$

$$\rho(h_{p,n}(l), f_p(l)) < \varepsilon. \tag{3.4}$$

Тогда при $n > n_0$ в силу (3.3), (3.4) и (3.2)

$$\begin{aligned} \rho(\varphi_n(l), f(l)) \le \rho(h_{n,n}(l), h_{n-1,n}(l)) + \cdots + \rho(h_{p+1,n}(l), h_{p,n}(l)) + \\ + \rho(h_{p,n}(l), f_p(l)) + \rho(f_p(l), f(l)) < 2^{2-n} + \cdots + 2^{1-p} + \varepsilon + 2^{-p} < 2^{2-p} + 2\varepsilon < 6\varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, требуемая последовательность $\{\varphi_n\}$ построена. $\square$

Следующая теорема обобщает теорему 24.3 из [6], относящуюся к классам борелевских функций.

**Теорема 3.1.** *Если пространство $Y$ сепарабельно, то* $(\forall \xi \in W)\ \Phi_{\xi+1} \subset \mathcal{B}_\xi$.

**Доказательство.** Если $f \in \Phi_2$, то $f \in \mathcal{B}_1$ согласно определению 3.1. Предположим, что теорема верна при всех $\alpha < \xi$, где $\xi > 1$. Тогда если $f \in \Phi_{\xi+1}$, то в силу леммы 3.3 к функции $f$ Г-сходится последовательность функций $\varphi_n \in \Phi_{\alpha(n)}$, где $(\forall n)\ \alpha(n) = \xi$, если $\xi$ имеет вид $\xi = \alpha + 1$, и $\alpha(n) < \xi$, если $\xi$ — предельный ординал.

В первом случае, т. к. $\varphi_n \in \Phi_{\alpha+1}$, то по предположению $(\forall n)\ \varphi_n \in \mathcal{B}_\alpha$. Во втором случае, т. к. $\varphi_n \in \Phi_{\alpha(n)+1}$, то $\varphi_n \in \mathcal{B}_{\alpha(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$ В обоих случаях согласно определению 3.1 $f \in \mathcal{B}_\xi$. $\square$

Из теоремы 3.1 и предложения 3.1 вытекает

**Следствие 3.1.** Если пространство $Y$ сепарабельно, то $(\forall \xi \in W)\ \mathcal{B}_\xi = \Phi_{\xi+1}$.

Отсюда и из предложения 2.1 вытекает

**Следствие 3.2.** Если пространство $Y$ сепарабельно, то множество всех Г-измеримых функций совпадает с объединением всех классов $\mathcal{B}_\xi$, $\xi \in W$, т. е. $\Phi_\Gamma = \mathcal{B}$.

## 4. Классификация гибридных множеств и стандартных функций

Пусть $(T, \mathcal{T})$ — измеримое пространство, $X$ — метрическое пространство, $\mathcal{B}(X)$ — $\sigma$-алгебра всех борелевских множеств в $X$. Положим $L = T \times X$ и обозначим через $\Lambda$ $\sigma$-алгебру $\mathcal{T} \times \mathcal{B}(X)$ на $L$, порожденную семейством $\{A \times B : A \in \mathcal{T},\ B \in \mathcal{B}(X)\}$. Элементы $\sigma$-алгебры $\Lambda$ назовем гибридными множествами.

Обозначим через $\mathcal{G}(X)$ и $\mathcal{F}(X)$ семейства всех открытых и соответственно замкнутых множеств в $X$, а через $\mathcal{T} \times \mathcal{G}(X)$ — $\sigma$-алгебру на $L$, порожденную семейством $\{A \times U : A \in \mathcal{T},\ U \in \mathcal{G}(X)\}$. Аналогично определяется $\sigma$-алгебра $\mathcal{T} \times \mathcal{F}(X)$. Так как каждое из семейств $\mathcal{G}(X)$ и $\mathcal{F}(X)$ порождает $\sigma$-алгебру $\mathcal{B}(X)$, то, как нетрудно проверить, имеет место

**Лемма 4.1.** $\mathcal{T} \times \mathcal{G}(X) = \mathcal{T} \times \mathcal{F}(X) = \Lambda$.

Применим результаты из раздела 1 к изучаемому здесь измеримому пространству $(L, \Lambda)$. С этой целью возьмем в качестве $\Sigma_1$ семейство всех конечных объединений множеств вида $A \times U$, где $A \in \mathcal{T}$, $U \in \mathcal{G}(X)$. Из леммы 4.1 следует свойство 1) семейства $\Sigma_1$. Конечная аддитивность класса $\Sigma_1$ очевидна, а конечная мультипликативность легко проверяется, т. е. $\Sigma_1$ обладает свойством 2). Для доказательства свойства 3) установим предварительно следующую лемму.

**Лемма 4.2.** *Совокупность дополнений (по отношению к $L$) всех множеств из класса $\Sigma_1$ совпадает с семейством всех конечных объединений множеств вида $A \times F$, где $A \in \mathcal{T}$, $F \in \mathcal{F}(X)$.*

**Доказательство.** Пусть $D \in \Sigma_1$, т. е. $D = \bigcup\limits_{k=1}^{p}(A_k \times U_k)$, где $(\forall k)\ A_k \in \mathcal{T}$, $U_k \in \mathcal{G}(X)$. Положим $\mathcal{P} = \{1, 2, \ldots, p\}$. Тогда

$$L \setminus D = \bigcup_{J \subset \mathcal{P}} \Big[\Big(T \setminus \bigcup_{i \in J} A_i\Big) \times \Big(X \setminus \bigcup_{i \in \mathcal{P} \setminus J} U_i\Big)\Big] = \bigcup_{J \subset \mathcal{P}} (C_J \times F_J),$$

где $(\forall J \subset \mathcal{P})\ C_J \in \mathcal{P}$, $F_J \in \mathcal{F}(X)$.

Обратно, если $C = \bigcup\limits_{k=1}^{p}(A_k \times F_k)$, где $(\forall k)\ A_k \in \mathcal{T}$, $F_k \in \mathcal{F}(X)$, то $L \setminus C = \bigcup\limits_{J \subset \mathcal{P}}(D_J \times U_J)$, где $(\forall J \subset \mathcal{P})\ D_J \in \mathcal{T}$, $U_J \in \mathcal{G}(X)$, т. е. $L \setminus C \in \Sigma_1$. $\square$

Докажем теперь свойство 3) класса $\Sigma_1$. Пусть $D \in \Sigma_1$, т. е. $D = \bigcup\limits_{k=1}^{p}(A_k \times U_k)$, где $(\forall k)$ $A_k \in \mathcal{T}$, $U_k \in \mathcal{G}(X)$. Так как $U_k = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} F_{kj}$, где $(\forall j)$ $F_{kj} \in \mathcal{F}(X)$, то $D = \bigcup\limits_{k=1}^{p}\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}(A_k \times F_{kj} = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} C_j$, где $C_j = \bigcup\limits_{k=1}^{p}(A_k \times F_{kj})$, так что по лемме 4.2 $(\forall j)$ $L \setminus C_j \in \Sigma_1$.

Таким образом, данный класс $\Sigma_1$ обладает свойствами 1)–3) из раздела 1. Следовательно, к изучаемой ситуации применимы все результаты из раздела 1. В частности, определены классы $\Sigma_\xi$, $\Pi_\xi$ и $\Delta_\xi$ гибридных множеств при всех $\xi \in W$, причем $\Lambda = \cup\Sigma_\xi = \cup\Pi_\xi = \cup\Delta_\xi$.

Перейдем к применению результатов из разделов 2, 3. С этой целью рассмотрим семейство

$$\mathcal{J} := \{A \subset T : (B \subset A) \Rightarrow (B \in \mathcal{T})\}.$$

Очевидно, $\mathcal{J} \subset \mathcal{T}$ и является $\sigma$-идеалом на $T$ (т. е. семейство $\mathcal{J}$ счетно-аддитивно, и если $A \in \mathcal{J}$, а $B \subset A$, то $B \in \mathcal{J}$), причем максимальным из идеалов, содержащихся в $\mathcal{T}$.

Исключим теперь случай, когда $\mathcal{T}$ состоит из всех подмножеств множества $T$. Другими словами, будем предполагать, что $T \notin \mathcal{J}$. Положим $\mathcal{R} = \{T_0 \subset T : T \setminus T_0 \in \mathcal{J}\}$, $\Gamma = \{T_0 \times X : T_0 \in \mathcal{R}\}$. Очевидно, семейства $\mathcal{R}$ и $\Gamma$ счетно-мультипликативны. Кроме того, $\Gamma \subset \Delta_1 \setminus \{\emptyset\}$, т. е. $\Gamma$ удовлетворяет условиям из раздела 2. Значит, применимы все результаты из разделов 2, 3 относительно $\Gamma$-измеримых функций $f : L \to Y$, где $Y$ — метрическое пространство.

В данной ситуации (т. е. когда $L = T \times X$, $\Lambda = \mathcal{T} \times \mathcal{B}(X)$) $\Gamma$-измеримые функции называются [2], [3] стандартными. Ввиду важности этого понятия дадим ему прямое

**Определение 4.1.** Функция $f : T \times X \to Y$ называется стандартной, если при некотором $T_0 \in \mathcal{R}$ функция $f|_{T_0 \times X}$ $(\Lambda, \mathcal{B}(Y))$-измерима.

Обозначим через $S$ множество всех стандартных функций (при данных $T$, $\mathcal{T}$, $X$ и $Y$), т. е. $S$ — другое обозначение для $\Phi_\Gamma$. В силу леммы 2.1 семейство $S$ замкнуто относительно $\Gamma$-сходимости.

Для функций $f : L \to Y$ согласно определению 2.3 (где $\Gamma = \{T_0 \times X : T_0 \in \mathcal{R}\}$) вводится понятие $\Sigma_\xi$-измеримости. Из раздела 2 следует, что $(\forall \xi \in W)$ $\Phi_\xi \subset S$, а если пространство $Y$ сепарабельно, то $S = \bigcup\limits_{\xi \in W} \Phi_\xi$.

Перейдем к классификации типа Бэра стандартных функций, а именно, определим при всех $\xi \in W$ классы $\mathcal{B}_\xi$ функций $f : L \to Y$ согласно определению 3.1. Все эти классы состоят из стандартных функций, т. е. $\mathcal{B} \subset S$. Точнее говоря (см. предложение 3.1) $(\forall \xi \in W)$ $\mathcal{B}_\xi \subset \Phi_{\xi+1}$, а при сепарабельности пространства $Y$ верно и обратное включение (теорема 3.1). Таким образом, если пространство $Y$ сепарабельно, то функция $f : T \times X \to Y$ стандартна тогда и только тогда, когда она принадлежит некоторому классу $\mathcal{B}_\xi$, т. е. $S = \mathcal{B}$.

В заключение покажем, что при некоторых естественных условиях все классы $\mathcal{B}_\xi$ стандартных функций различны. При этом мы используем теорему 22.4 из [6], в которой, в частности, установлено, что если $X$ — несчетное польское пространство, то $(\forall \xi \in W)$ $\Sigma_\xi(X) \neq \Delta_{\xi+1}(X)$. Здесь под $\Sigma_1(X)$ $(\Pi_1(X))$ понимается класс всех открытых (соответственно, замкнутых) множеств в $X$, а при $\xi > 1$ классы $\Sigma_\xi(X)$ и $\Pi_\xi(X)$ определяются рекурсивно по формулам (1.1) и (1.2).

В связи с этим впредь будем обозначать классы гибридных множеств через $\Sigma_\xi(L)$, $\Pi_\xi(L)$, $\Delta_\xi(L)$, где, как и прежде, $L = T \times X$.

Следующие две леммы легко доказываются индукцией по $\xi \in W$.

**Лемма 4.3.** *Пусть $A \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$, $B \subset X$. Тогда если $A \times B \in \Sigma_\xi(L)$ $(\Pi_\xi(L))$ при некотором $\xi \in W$, то $B \in \Sigma_\xi(X)$ (соответственно $\Pi_\xi(X)$).*

**Лемма 4.4.** *Если $B \in \Sigma_\xi(X)$ $(\Pi_\xi(X))$ при некотором $\xi \in W$, то $T \times B \in \Sigma_\xi(L)$ (соответственно $\Pi_\xi(L)$).*

**Теорема 4.1.** *Пусть $X$ — несчетное польское пространство, а $Y$ содержит более одной точки. Тогда $(\forall \xi \in W)$ $\Phi_{\xi+1} \neq \Phi_\xi$.*

**Доказательство.** Зафиксируем $\xi \in W$. В силу леммы 1.1 и теоремы 22.4 из [6] существует множество $D \in \Delta_{\xi+1}(X) \setminus \Sigma_\xi(X)$. Возьмем в $Y$ две точки $y$ и $z$ и определим функцию $f : L \to Y$, положив

$$f(t,x) = \begin{cases} y, & (t,x) \in T \times D; \\ z, & (t,x) \in L \setminus (T \times D). \end{cases}$$

Так как $D \in \Delta_{\xi+1}(X)$, то по лемме 4.4 $T \times D \in \Delta_{\xi+1}(L)$. Тогда и $L \setminus (T \times D) \in \Delta_{\xi+1}(L)$. Так что

$$(\forall \mathcal{V} \in \mathcal{G}(Y)) \ \ f^{-1}(\mathcal{V}) \in \Sigma_{\xi+1}(L),$$

т. е. $f \in \Phi_{\xi+1}$. Покажем, что $f \notin \Phi_\xi$. С этой целью возьмем произвольное $T_0 \in \mathcal{R}$ (т. к. $T \notin \mathcal{J}$, то $T_0 \neq \emptyset$). Тогда $(f|_{T_0 \times X})^{-1}(Y \setminus \{z\}) = T_0 \times D \notin \Sigma_\xi(L)$, т. к. в противном случае по лемме 4.3 получим, что $D \in \Sigma_\xi(X)$, а это противоречит выбору множества $D$. $\square$

**Следствие 4.1.** Если в условиях теоремы 4.1 пространство $Y$ сепарабельно, то все классы $\mathcal{B}_\xi$ стандартных функций различны.

**Доказательство.** Достаточно показать, что $(\forall \xi \in W)$ $\mathcal{B}_\xi \neq \mathcal{B}_{\xi+1}$, но это следует из теоремы 4.1 и следствия 3.1. $\square$

## Литература


1. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций.* – М.: Наука, 1966. – 500 с.
2. Шрагин И.В. *Условия измеримости суперпозиций* // ДАН СССР. – 1971. – Т. 197. – № 2. – С. 295–298.
3. Шрагин И.В. *Суперпозиционная измеримость* // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 1. – С. 82–92.
4. Appell J., Zabrejko P.P. *Nonlinear superposition operators.* – Cambridge: Camb. Univ. Press, 1990. – 312 p.
5. Shragin I.V. *Baire-Carathéodory classification of the real-valued standard functions* // Funct. Different. Equations. – 2002. – V. 9. – № 3–4. – P. 521–525.
6. Kechris A.S. *Classical descriptive set theory.* – New York: Springer-Verlag, 1995. – V. XVIII. – 420 p.
7. Куратовский К. *Топология.* Т. 1. – М.: Мир, 1966. – 595 с.



*Пермский государственный университет*



*Поступила* 18.07.2002