ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 3 (526)

УДК 517.948

Г.В. КОВАЛЕВА, Н.Я. ТИХОНЕНКО

РАСШИРЕНИЕ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ВЫРОЖДАЮЩИМСЯ СИМВОЛОМ

Работа посвящена нормализации матричных сингулярных операторов (СИО) и СИО со сдвигом Карлемана, изменяющим ориентацию, символы которых вырождаются.

1. Пусть Γ — простая замкнутая кривая Ляпунова, а D^+ — область, ограниченная Γ. Не ограничивая общности, будем считать, что точка $z = 0 \in D^+$. Через D^- будем обозначать дополнение множества $D^+ \cup \Gamma$ до расширенной комплексной плоскости.

Рассмотрим оператор

$$T = aP_+ + bP_- + K : L_p^m(\Gamma) \to L_p^m(\Gamma), \quad 1 < p < \infty, \tag{1}$$

где $a(t)$ и $b(t)$, $t \in \Gamma$, — ограниченные измеримые матрицы-функции (м. ф.) порядка m; $P_\pm$ — проекторы Рисса, $P_\pm = 0{,}5(I \pm S)$, где I — единичный оператор, а S — оператор сингулярного интегрирования $(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau$; оператор $(K\varphi)(t) = \int\limits_\Gamma k(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau : L_p^m(\Gamma) \to L_p^m(\Gamma)$ компактен.

Как известно ([1], с. 320; [2], с. 121), необходимым условием нормальной разрешимости СИО (1) является невырожденность на Γ м. ф. $a(t)$ и $b(t)$. Если же определитель хотя бы одной из м. ф. $a(t)$ или $b(t)$ обращается в нуль на контуре Γ, то необходимо нормализовать оператор T, т. е. строить такие пространства X и Y, чтобы оператор $T : X \to Y$ являлся нормально разрешимым. В данной работе задачу нормализации СИО (1) решаем путем расширения области определения оператора T с сохранением пространства образов, т.е. будем строить пространство X, полагая $Y = L_p^{(m)}(\Gamma)$.

Впервые подобная нормализация СИО была проведена в ([1], с. 346). В ней был рассмотрен случай, когда определители м. ф. $a(t)$ и $b(t)$ имеют конечное число нулей целого порядка на Γ. В [3] осуществлена нормализация СИО, символ которого мог иметь бесконечное множество нулей, в предположении, что лишь коэффициент $b(t)$ вырождается на Γ, причем $\ln|b(t)|$ интегрируем на Γ.

Ниже предполагается, что обе м. ф. $a(t)$ и $b(t)$ могут иметь бесконечное множество точек вырождения таких, что функции $\ln|\det a(t)|$, $\ln|\det b(t)|$, $\ln|a_{ij}(t)|$, $\ln|b_{ij}(t)|$, $i,j = \overline{1,m}$, интегрируемы на Γ. Здесь $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$, $i,j = \overline{1,m}$, — элементы соответственно м.ф. $a(t)$ и $b(t)$.

В дальнейшем через $u(t)$ и $v(t)$ обозначаются м. ф. порядка m, определители которых не равны тождественно нулю на Γ, а их элементы $u_{ij}(t)$ и $v_{ij}(t)$, $i,j = \overline{1,m}$, либо тождественно равны нулю, либо являются вещественнозначными неотрицательными ограниченными на Γ функциями такими, что $\ln u_{ij}(t)$, $\ln v_{ij}(t)$, $\ln\det u(t)$ и $\ln\det v(t)$ интегрируемы на Γ.

Замечание 1. Указанным свойством обладают, например, функции $|t-a|^\alpha$ и $\exp\{-|t-b|^{-\beta}\}$, где a и b — точки контура Γ, $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$, а также произведение любого конечного числа таких функций. Нетрудно также построить пример функции $\rho(t)$, имеющей бесконечное множество нулей на Γ, логарифм которой интегрируем на Γ. Для этого достаточно задать последовательность точек контура $\Gamma\{s_k\}_{k=1}^\infty$ такую, что дуга контура $\Gamma(s_k, s_{k+1})$ не содержит точек этой последовательности для любого $k = 1, 2, \dots$, и потребовать, чтобы функция $\rho(t)$ имела в точках s_k, $k=1,2,\dots$, нули такого порядка, чтобы ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}}\ln\rho(t)dt$ был бы сходящимся. При этом функции вида $f(t)\rho(t)$ будут обладать этим свойством для любой измеримой ограниченной положительной функции $f(t)$.

Через $u_{ij}^{+}(t)$ $(v_{ij}^{-}(t))$ будем обозначать функции, совпадающие со значениями функций $u_{ij}(t)$ $(v_{ij}(t))$, $i,j=\overline{1,m}$, почти всюду на Γ, и допускающие аналитическое продолжение в область D^{+} (D^{-}), не обращающееся в нуль в этой области. Через $u_{+}(t)$ и $v_{-}(t)$ будем обозначать м. ф., элементами которых являются функции $u_{ij}^{+}(t)$ и $v_{ij}^{-}(t)$ соответственно. Далее предполагается, что определители м. ф. $u_{+}(t)$ и $v_{-}(t)$ не обращаются в нуль в области D^{+} и D^{-} соответственно. Как обычно, через $L_p^{+,m}$ и $\mathring{L}_p^{-,m}$ обозначаются образы операторов $P_{\pm}$ в пространстве $L_p^m(\Gamma)$.

Введем пространство вектор-функций (в. ф.) размерности m, совпадающее по совокупности элементов с множеством значений оператора $u_{+}^{-1}P_{+}+u_{-}^{-1}P_{-}$, действующего на в. ф., принадлежащие пространству $L_p^{(m)}(\Gamma)$:

$$L_p^{+,m}(u)\dotplus\mathring{L}_p^{-,m}(v)=\{\varphi_{+}+\varphi_{-}\mid u_{+}\varphi_{+}\in L_p^{+,m},\ v_{-}\varphi_{-}\in\mathring{L}_p^{-,m}\}$$

с нормой

$$\|\varphi_{+}+\varphi_{-}\|_{L_p^{+,m}(u)\dotplus\mathring{L}_p^{-,m}(v)}=\|u_{+}\varphi_{+}\|_{L_p^{+,m}}+\|v_{-}\varphi_{-}\|_{L_p^{-,m}}.$$

Согласно определению пространства $L_p^{+,m}(u)\dotplus\mathring{L}_p^{-,m}(v)$, в. ф. $\varphi_{+}(t)$ допускает аналитическое продолжение в область D^{+}, а в. ф. $\varphi_{-}(t)$ — в область D^{-}.

Замечание 2. Если м. ф. $u_{+}(t)$ и $v_{-}(t)$ диагональны, т. е. $u_{+}(t)=\operatorname{diag}\{u_1^{+}(t),\dots,u_m^{+}(t)\}$, $v_{-}(t)=\operatorname{diag}\{v_1^{-}(t),\dots,v_m^{-}(t)\}$, то j-я компонента в. ф. $\varphi_{+}+\varphi_{-}$ пространства $L_p^{+,m}(u)\dotplus\mathring{L}_p^{-,m}(v)$ принадлежит пространству $L_p^{+}(u_j)+\mathring{L}_p^{-}(v_j)$.

Доопределим проекторы Рисса в пространстве $L_p^{+,m}(u)\dotplus\mathring{L}_p^{-,m}(v)$ следующим образом: $P_{\pm}(\varphi_{+}+\varphi_{-})=\varphi_{\pm}$.

Теорема 1. *Пусть ограниченные измеримые на Γ м. ф. $a(t)$ и $b(t)$ не имеют общих точек вырождения на Γ и допускают представления*

$$a(t)=c(t)u_{+}(t),\quad b(t)=d(t)v_{-}(t),\tag{2}$$

где $c(t)$ и $d(t)$ — ограниченные на Γ м. ф. Пусть, кроме того, оператор $K:L_p^{+,m}(u)\dotplus\mathring{L}_p^{-,m}(v)\to L_p^m(\Gamma)$ допускает компактное замыкание. Тогда СИО

$$\overline{T}=T:L_p^{+,m}(u)\dotplus\mathring{L}_p^{-,m}(v)\to L_p^m(\Gamma)$$

нормально разрешим тогда и только тогда, когда нормально разрешим СИО

$$T_1=cP_{+}+dP_{-}:L_p^m(\Gamma)\to L_p^m(\Gamma),$$

причем их индексы совпадают.

Доказательство. В условиях теоремы оператор (1) допускает представление

$$aP_{+}+bP_{-}+K=(cP_{+}+dP_{-})(u_{+}P_{+}+v_{-}P_{-})+K.$$

Оператор $u_{+}P_{+}+v_{-}P_{-}$ взаимнооднозначно отображает пространство $L_p^{+,m}(u)\dotplus\mathring{L}_p^{-,m}(v)$ на пространство $L_p^m(\Gamma)$ в силу определения пространства $L_p^{+,m}(u)\dotplus\mathring{L}_p^{-,m}(v)$. Учитывая, что компактное слагаемое не влияет на нормальную разрешимость и индекс оператора (напр., [1], с. 43), получаем утверждения теоремы.

Замечание 3. Для м. ф. $a(t)$ и $b(t)$, определители которых имеют конечное число нулей целого порядка, процесс получения представлений (2) описан, например, в ([1], с. 326, или [4]). Если же определители м. ф. $a(t)$ и $b(t)$ имеют бесконечные множества точек вырождения описанного характера, то представления (2) существуют в силу замечания 1.

Напомним, что нормально разрешимый оператор называется нетеровым, если оба его дефектных числа конечны. Если же только одно из дефектных чисел нормально разрешимого оператора конечно, то такой оператор называется полунетеровым.

Теорема 2. *Пусть м. ф. $b(t)v_-^{-1}(t)$ ограничена на Γ, а оператор*

$$T_0 = u_+P_+ + bP_- : \ L_p^{+,m}(u) \dotplus \mathring{L}_p^{-,m}(v) \to L_p^m(\Gamma)$$

является полунетеровым. Тогда м. ф. $b(t)v_-^{-1}(t)$ невырождена на Γ. Если же оператор T_0 нетеров, то м. ф. $b(t)v_-^{-1}(t)$ допускает факторизацию

$$b(t)v_-^{-1}(t) = b_+(t)\Lambda(t)b_-(t), \tag{3}$$

где $\Lambda(t) = \operatorname{diag}\{t^{k_1}, \dots, t^{k_m}\}$, $k_1 \geqslant \dots \geqslant k_m$ — целые числа, $b_+ \in L_p^{+,m\times m}$, $b_- \in L_q^{-,m\times m}$, $b_+^{-1} \in L_q^{+,m\times m}$, $b_-^{-1} \in L_p^{-,m\times m}$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, и операторы $b_-^{-1}\Lambda^{-1}P_-b_+^{-1}$ и $b_+P_+b_+^{-1}$ ограничены в пространстве $L_p^m(\Gamma)$.

Доказательство. Действительно, оператор T_0 можно записать следующим образом: $T_0 = u_+P_+ + bP_- = (P_+ + bv_-^{-1}P_-)(u_+P_+ + v_-P_-)$. Поскольку оператор $u_+P_+ + v_-P_-$ взаимнооднозначно отображает пространство $L_p^{+,m}(u) \dotplus \mathring{L}_p^{-,m}(v)$ на пространство $L_p^m(\Gamma)$, то из полунетеровости или нетеровости оператора T_0 следует полунетеровость или нетеровость оператора

$$P_+ + bv_-^{-1}P_- : L_p^m(\Gamma) \to L_p^m(\Gamma). \tag{4}$$

Тогда согласно ([2], с. 121) м. ф. bv_-^{-1} невырождена на Γ. В случае нетеровости оператора T_0, а тем самым, и оператора (4), м. ф. bv_-^{-1} допускает факторизацию (3) ([2], с. 117).

Замечание 4. Если м. ф. $k(t,\tau)$ такова, что элементы м. ф. $k(t,\tau)\ u^{-1}(t)$ и $k(t,\tau)v^{-1}(t)$ являются ядрами со слабыми особенностями, то оператор $K : L_p^{+,m}(u) \dotplus \mathring{L}_p^{-,m}(v) \to L_p^m(\Gamma)$ компактен [5].

2. Пусть $\Gamma = \Gamma_0$ — единичная окружность с центром в начале координат, а $\alpha(t)$ — дробно-линейный сдвиг Карлемана на Γ_0, изменяющий ориентацию

$$\alpha(t) = \frac{t-\beta}{\overline{\beta}t - 1}, \quad |\beta| > 1.$$

Легко видеть, что функция $\alpha(t)$ допускает факторизацию $\alpha(t) = \alpha_+(t)t^{-1}\alpha_-(t)$, где $\alpha_+(t) = -i(t-\beta)/\sqrt{|\beta|^2-1}$, $\alpha_-(t) = it\sqrt{|\beta|^2-1}/(\overline{\beta}t-1)$. Определим теперь взвешенный оператор сдвига $(U\varphi)(t) = t^{-1}\alpha_-(t)\varphi[\alpha(t)]$. Легко видеть, что оператор U обладает свойством $UP_\pm = P_\mp U$. Рассмотрим СИО со сдвигом (СИОС)

$$T_0 = aP_+ + UP_+ + cP_- + dUP_- + K : L_p^m(\Gamma) \to L_p^m(\Gamma), \quad 1 < p < +\infty, \tag{5}$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ – ограниченные измеримые м. ф. размерности m, K — компактный оператор.

Известно ([6], с. 59), что от СИОС (5) можно перейти к эквивалентному СИО без сдвига

$$AP_+ + BP_- + \mathcal{K} : L_p^{2m}(\Gamma) \to L_p^{2m}(\Gamma), \tag{6}$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & d(t) \\ b[\alpha(t)] & c[\alpha(t)] \end{pmatrix}, \quad B(t) = eA[\alpha(t)]e, \tag{7}$$
$$e = \begin{pmatrix} O & E_m \\ E_m & O \end{pmatrix}, \quad \mathcal{K} = \begin{pmatrix} K & O \\ O & UKU \end{pmatrix},$$

O — нулевая матрица размерности m, а E_m — единичная матрица размерности m.

Если определитель м. ф. $A(t)$ обращается в нуль на контуре Γ_0, то СИО (6) и, тем самым СИОС (5) не является нормально разрешимым.

Пусть м. ф. $A(t)$ допускает представление

$$A(t) = C(t)W_+(t), \tag{8}$$

где $C(t)$ — ограниченная и невырожденная на Γ_0 м. ф., а м. ф. $W_+(t)$ обладает следующими свойствами: м. ф. $W_+(t)$ и $W_+^{-1}(t)$ аналитически продолжимы в область D^+, м. ф. $W_+(t)$ ограничена, $\ln|\det W_+(t)|$ и $\ln|w_{ij}^+(t)|$ интегрируемы на Γ, где $w_{ij}^+(t)$ — не равные тождественно нулю элементы м. ф. $W_+(t)$. Заметим, что если определитель м. ф. $A(t)$ имеет конечное число нулей целого порядка, то алгоритм построения представления (8) дан в ([1], с. 326; [4]). Если же определитель м. ф. $A(t)$ вырождается на описаном выше бесконечном множестве точек контура Γ, то согласно замечанию 1 представление (8) существует.

Обозначим

$$T_1 = w_1^+ P_+ + w_3^+(\alpha)UP_+ + w_4^+(\alpha)P_- + w_2^+ UP_-, \tag{9}$$

где $w_j^+(t)$ — блоки порядка m м. ф. $W_+(t)$, т. е.

$$W_+(t) = \begin{pmatrix} w_1^+(t) & w_2^+(t) \\ w_3^+(t) & w_4^+(t) \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Через $X(W_+)$ обозначим пространство, совпадающее по совокупности элементов с образом оператора T_1^{-1}:

$$X(W_+) = \{\varphi_+ + \varphi_- \mid \Psi_+ = w_1^+\varphi_+ + w_2^+U\varphi_- \in L_p^{+,m},\ \Psi_- = w_3^+(\alpha)U\varphi_+ + w_4^+(\alpha)\varphi_- \in \mathring{L}_p^{+,m}\}$$

с нормой $\|\varphi_+ + \varphi_-\|_{X(W_+)} = \|\Psi_+ + \Psi_-\|_{L_p^m}$. Если м. ф. $W_+(t)$ диагональна, т. е. $W_+(t) = \operatorname{diag}\{w_{11}^+(t), w_{22}^+(t), \ldots, w_{2m2m}^+(t)\}$, то j-я компонента в. ф. $\varphi_+ + \varphi_-$, принадлежащей пространству $X(W_+)$, принадлежит пространству $L_p^+(|w_{jj}^+|) \dotplus \mathring{L}_p^-(|w_{m+j}^+(\alpha)|)$.

Теорема 3. *Пусть $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ — м. ф. порядка m, принадлежащие пространству L_∞ на Γ_0, и м. ф. $A(t)$, определяемая равенством* (7)*, допускает представление* (8)*, причем м. ф. $C^{-1}eC(\alpha)e$ допускает факторизацию вида* (3)*, а м. ф. $W_+(t)$ и $eW_+(\alpha)e$ не имеет общих точек вырождения на Γ_0. Пусть также оператор $\mathcal{K}: X(W_+) \to L_p^m(\Gamma_0)$ допускает компактное замыкание. Тогда оператор*

$$\overline{T_0} = T_0 : X(W_+) \to L_p^m(\Gamma_0)$$

является нормально разрешимым и его индекс равен $-0{,}5 \operatorname{ind}\det C(t)$.

Доказательство. Рассмотрим СИО (6), эквивалентный оператору T (5). Согласно условиям теоремы он допускает представление

$$AP_+ + BP_- + \mathcal{K} = (CP_+ + eC(\alpha)eP_-)(W_+P_+ + eW_+(\alpha)eP_-) + \mathcal{K}.$$

Таким образом, переходя опять к СИОС, приходим к выводу, что оператор, соответствующий характеристической части СИОС (5), можно представить в следующем виде: $aP_+ + bUP_+ +$

$cP_- + dUP_- = T_2T_1$, где T_1 — оператор, определенный равенством (9), а $T_2 = a_2P_+ + b_2(\alpha)UP_+ + c_2(\alpha)P_- + d_2UP_-$, где $a_2(t)$, $b_2(t)$, $c_2(t)$, $d_2(t)$ — блоки порядка m м.ф. $C(t)$, т.е.

$$C(t) = \begin{pmatrix} a_2(t) & d_2(t) \\ b_2(t) & c_2(t) \end{pmatrix}.$$

В силу определения пространства $X(W_+)$ оператор $T_1 : X(W_+) \to L_p^m(\Gamma_0)$ непрерывно обратим. Оператор $T_2 : L_p^m(\Gamma_0) \to L_p^m(\Gamma_0)$ нетеров в силу Ф-факторизуемости м.ф. $C^{-1}eC(\alpha)e$, и его индекс равен $-0{,}5\,\mathrm{ind}\det C(t)$ ([2], с. 117; [6], с. 72). Поскольку компактное слагаемое не влияет на нормальную разрешимость оператора и его индекс ([1], с. 43), то из этого факта следуют утверждения теоремы.

Замечание 5. Пусть оператор K определен следующим образом:

$$(K\varphi)(t) = \int_{\Gamma_0} k(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau,$$

где $k(t,\tau)$ — м.ф. порядка m. Если м.ф. $k(t,\tau)$ такова, что элементы м.ф. $k(t,\tau)(w_1^+)^{-1}(\tau)$, $k(t,\tau)(w_2^+)^{-1}(\tau)$, $k(t,\tau)(w_3^+)^{-1}(\alpha(t))$, $k(t,\tau)(w_4^+)^{-1}(\alpha(\tau))$ являются ядрами со слабыми особенностями, то оператор $K : X(W_+) \to L_p^m(\Gamma_0)$ компактен ([5], с. 427). Здесь $w_j^+(t)$ — блоки порядка m м.ф. $W_+(t)$ (10).

Литература

1. Прёсдорф З. *Некоторые классы сингулярных уравнений.* – М.: Мир, 1979. – 493 с.
2. Litvinchuk G.S., Spitkovskii I.M. *Factorization of measurable matrix functions.* – Berlin: Akademie-Verlag, 1987. – 376 p.
3. Кравченко В.Г. *О нормализации сингулярных интегральных операторов* // ДАН СССР. – 1985. – Т. 285. – № 6. – С. 1314–1317.
4. Хайкин М.И. *К теории особого случая краевой задачи Римана для нескольких пар функций и систем сингулярных интегральных уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 1986. – № 7. – С. 69-76.
5. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1977. – 742 с.
6. Литвинчук Г.С. *Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом.* – М.: Наука, 1977. – 448 с.

Одесский национальный университет (Украина)

Поступила 22.04.2004