ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 9 (496)

УДК 517.98

М.Р. ТИМЕРБАЕВ

ПРОСТРАНСТВА С НОРМОЙ ГРАФИКА И УСИЛЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА. II

1. Пространства вектор-функций со значениями в пространствах с нормой графика

Данная работа является продолжением статьи [1]. Напомним основные понятия и обозначения. Через Φ, Ψ обозначаются топологические векторные пространства (ТВП). Всюду, если не оговорено особо, для ТВП U включение $U \subset \Phi$ будет пониматься не только в теоретико-множественном, но и в топологическом смысле; таким образом, равенство $U = V$ для B-пространств будет означать также эквивалентность норм этих пространств. Отметим также следующее: если B-пространства $U, V \subset \Phi$ таковы, что V является подмножеством U, то V непрерывно вложено в U — это следует из теоремы Банаха о замкнутом графике, которую нужно применить к тождественному отображению.

Обозначим через $L(\Phi, \Psi)$ множество линейных непрерывных отображений из Φ в Ψ. Пусть $\gamma \in L(\Phi, \Psi)$ и $U \subset \Phi$. Тогда, очевидно, $\gamma \in L(U, \Psi)$ (сужение γ на U здесь и далее будет обозначаться тем же символом γ). Если $U \subset \Phi$ — B-пространство, то линейное множество $\gamma(U)$ (образ U при отображении γ), наделенное фактор-нормой

$$\|x\|_{\gamma(U)} = \inf\{\|u\|_U : u \in U,\ \gamma u = x\},$$

будет B-пространством, изометричным, очевидно, фактор-пространству $U/(\ker\gamma \cap U)$, причем $\gamma(U) \subset \Psi$ и $\gamma \in L(U, \gamma(U))$. Кроме того, если B-пространство X непрерывно вложено в Ψ, то, для того чтобы γ непрерывно отображало U в X, достаточно (и, разумеется, необходимо), чтобы $\gamma(U)$ было подмножеством пространства X. Если γ непрерывно отображает B-пространство U на B-пространство X, то фактор-норма пространства $\gamma(U)$ эквивалентна норме пространства X.

Оператор $\gamma \in L(U, X)$ называется ретракцией, если существует оператор $\beta \in L(X, U)$, называемый коретракцией, такой, что

$$\gamma\beta x = x \quad \forall x \in X.$$

Пусть $\gamma \in L(\Phi, \Psi)$ и пусть $U \subset \Phi$ и $X \subset \Psi$ — два B-пространства. Определим пространство

$$\gamma(U, X) \overset{\text{def}}{=} \{u \in U : \gamma u \in X\},$$

наделенное нормой графика

$$\|u\|_{\gamma(U,X)} = \|u\|_U + \|\gamma u\|_X. \tag{1}$$

Из определения нормы (1) и из полноты пространств U, X с очевидностью вытекает, что $\gamma(U, X)$ является B-пространством, непрерывно вложенным в пространство U, причем $\gamma(U, X) = U$ тогда и только тогда, когда $\gamma(U)$ является подмножеством пространства X.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 01-01-00616, 03-01-00380) и гранта № Е02-1.0-189 Министерства образования России по фундаментальным исследованиям в области естественных и точных наук.

Пусть (T, Σ, μ) — пространство с (полной конечной) мерой μ, заданной на σ-алгебре Σ подмножеств множества T. Для B-пространства $U \subset \Phi$ множество всех μ-измеримых функций $u : T \to U$ обозначается через $L_0(T, \Sigma, \mu; U) = L(T; U)$, или, короче, когда не возникает двусмысленности, через $L_0(U)$. Для простоты изложения ограничимся рассмотрением сепарабельных B-пространств $U \subset \Phi, X \subset \Psi$. Поэтому в силу критерия Петтиса измеримости функции ([2], с. 166) функция $u : T \to U$ будет измерима тогда и только тогда, когда она U^*-скалярно измерима, т. е. для каждого элемента $u^* \in U^*$ измерима скалярная функция $t \to \langle u(t), u^* \rangle_U$.

Пусть M — замкнутое подпространство пространства U. Функцию $t \in T \to f(t) \in U/M$ со значениями в фактор-пространстве можно рассматривать и как многозначную функцию $t \in T \to f(t) \in 2^U$. Как показано ниже, существование измеримого сечения $u(t) \in f(t)$ равносильно измеримости функции f.

Лемма 1.1. *Для функции $f : T \to U/M$ эквивалентны следующие утверждения*:

(i) *функция $f : T \to U/M$ измерима*;

(ii) *для любого $u \in U$ скалярная функция $t \in T \to \operatorname{dist}(u, f(t)) = \inf\{\|u - v\|_U : v \in f(t)\}$ измерима*;

(iii) *для любого $u \in U$ множество $\{t \in T : u \in f(t)\}$ μ-измеримо*;

(iv) *существует счетное множество измеримых функций $u_n : T \to U$ таких, что $u_n(t) \in f(t)$ почти всюду и при почти всех (п. в.) $t \in T$ множество $\{u_n(t) : n \geq 1\}$ плотно в $f(t)$*;

(v) *существует измеримая функция $u : T \to U$ такая, что $u(t) \in f(t)$.*

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Пусть $u \in U$ и $\widehat{u} = u + M \in U/M$. Если $f : T \to U/M$ измерима, то, очевидно, измерима и норма разности $t \in T \to \|\widehat{u} - f(t)\|_{U/M}$. Осталось заметить, что

$$\|\widehat{u} - f(t)\|_{U/M} = \operatorname{dist}(u, f(t)).$$

Эквивалентность утверждений (ii), (iii) и (iv) содержится в теореме Дебре–Кастена об измеримости многозначных отображений ([3], с. 74). Импликация (iv) $\Rightarrow$ (v) тривиальна. Осталось показать (v) $\Rightarrow$ (i).

Пусть существует измеримое сечение $u(t) \in f(t)$. Поскольку B-пространство U сепарабельно, то сепарабельно и фактор-пространство U/M. По теореме Петтиса об измеримости достаточно установить, что для любого линейного непрерывного функционала F на U/M измерима скалярная функция $t \in T \to \langle f(t), F \rangle_{U/M}$. Но каждый такой функционал $F \in (U/M)^*$ формулой $u \in U \to F(\widehat{u})$ определяет линейный непрерывный функционал $u^* \in U^*$ такой, что $M \subset \ker u^*$. Поэтому

$$\langle f(t), F \rangle_{U/M} = \langle \widehat{u}(t), F \rangle_{U/M} = \langle u(t), u^* \rangle_U,$$

последняя же функция измерима в силу измеримости функции $t \to u(t)$. $\square$

Лемма 1.2. *Пусть $f : T \to U/M$ измерима. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется измеримая функция $u_\varepsilon : T \to U$ такая, что $u_\varepsilon(t) \in f(t)$ и*

$$\|f(t)\|_{U/M} \leq \|u_\varepsilon(t)\|_U \leq (1 + \varepsilon)\|f(t)\|_{U/M} \quad \textit{п. в.}$$

Доказательство. Согласно лемме 1.1 (утверждение (iv)) существует счетное множество измеримых функций $u_n : T \to U$ таких, что $u_n(t) \in f(t)$ почти всюду и при п. в. $t \in T$ множество $\{u_n(t) : n \geq 1\}$ плотно в $f(t)$. Тогда при п.в. $t \in T$ $\|f(t)\|_{U/M} = \inf\{\|u_n(t)\|_U : n \geq 1\}$. Положим $T_0 = \{t \in T : 0 \in f(t)\}$ и при фиксированном $\varepsilon > 0$ $T_n = \{t \in T : \|u_n(t)\|_U \leq (1 + \varepsilon)\|f(t)\|_{U/M}\}$. Построенные множества T_n $(n \geq 0)$ измеримы и $\mu\Big(T \setminus \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} T_n\Big) = 0$. Далее строим последовательность непересекающихся множеств E_n, полагая при $n \geq 1$ $E_n = T_n \setminus \bigcup\limits_{j=0}^{n-1} T_j$. Функцию u_ε

определим формулой

$$u_\varepsilon(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}(t) u_n(t),$$

где $\chi_{E_n}(t)$ обозначает характеристическую функцию множества E_n. По построению $u_\varepsilon(t) \in f(t)$ при п. в. $t \in T$, а потому $\|f(t)\|_{U/M} \le \|u_\varepsilon(t)\|_U$. Кроме того, как следует из определения множеств T_0 и E_n, $\|u_\varepsilon(t)\|_U \le (1+\varepsilon)\|f(t)\|_{U/M}$. $\square$

Пусть $L_p = L_p(T, \Sigma, \mu)$. Как обычно, пространство U-значных функций класса L_p $(1 \le p < \infty)$ с соответствующей метрикой обозначаются через $L_p(T, \Sigma, \mu; U) = L_p(T; U)$ (коротко $L_p(U)$). Если $\gamma \in L(\Phi, \Psi)$ и $U \subset \Phi$, $X \subset \Psi$, то для любой функции $u \in L_p(U)$ функция $t \in T \to \gamma u(t) \in X$ будет принадлежать классу $L_p(X)$. Тем самым γ определяет отображение из $L_p(U)$ в $L_p(X)$, которое будем обозначать тем же символом γ.

Теорема 1.1. *Имеет место теоретико-множественное и метрическое равенство*

$$\gamma(L_p(U)) = L_p(\gamma(U)).$$

Доказательство. Положим $X = \gamma(U)$. Тогда по определению $\|\gamma\|_{U \to X} = 1$, откуда следует, что $\|\gamma\|_{L_p(U) \to L_p(X)} \le 1$ и $\gamma(L_p(U)) \subset L_p(X)$. Пусть $x \in L_p(X)$ — произвольная функция. Рассматривая γ^{-1} как изометрию из X в U/U_0, определим функцию $f(t) = \gamma^{-1}x(t) \in U/U_0$. По предыдущей лемме для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такая измеримая функция $u(t) \in f(t)$, что $\|f(t)\|_{U/U_0} \le \|u(t)\|_U \le (1+\varepsilon)\|f(t)\|_{U/U_0}$ почти всюду. Итак, для произвольного ε найдена функция u такая, что $x(t) = \gamma u(t)$ почти всюду и

$$\|x\|_{L_p(X)} = \|f\|_{L_p(U/U_0)} \le \|u\|_{L_p(U)} \le (1+\varepsilon)\|f\|_{L_p(U/U_0)} = (1+\varepsilon)\|x\|_{L_p(X)}.$$

В силу произвольности $x \in L_p(X)$ и $\varepsilon > 0$ это означает, что множества $\gamma(L_p(U))$ и $L_p(X)$ совпадают между собой и $\|x\|_{L_p(X)} = \|x\|_{\gamma(L_p(U))}$. $\square$

Теорема 1.2. *Имеет место теоретико-множественное и топологическое равенство*

$$\gamma(L_p(U), L_p(X)) = L_p(\gamma(U, X)).$$

Доказательство. Введем обозначения: $V = \gamma(U, X)$, $W = \gamma(L_p(U), L_p(X))$. Если $u \in W$, то $u(t) \in V$ почти всюду. Пусть $c_1, c_2 > 0$ такие постоянные (зависящие от p), для которых выполняются неравенства

$$c_1(|a|^p + |b|^p) \le (|a| + |b|)^p \le c_2(|a|^p + |b|^p)$$

(a, b — произвольные числа). Тогда для произвольной функции $u \in W \cup L_p(V)$ справедлива цепочка неравенств $c_1\|u\|_W^p \le \|u\|_{L_p(V)}^p \le c_2\|u\|_W^p$, откуда вытекает утверждение.

Для $1 \le p, q < \infty$ рассмотрим теперь усиленное пространство $W = \gamma(L_p(U), L_q(X))$. Ясно, что если $u \in W$, то $u(t) \in \gamma(U, X)$ при п.в. $t \in T$.

Лемма 1.3. *Множество простых (т. е. измеримых и принимающих конечное число значений) $\gamma(U, X)$-значных функций плотно в W.*

Доказательство этого утверждения проводится по той же схеме, что и для пространств типа L_p. Сначала докажем плотность в усиленном пространстве W подмножества счетнозначных измеримых функций из W: действительно, для любой функции $u \in W$ и произвольного $\varepsilon > 0$ найдется счетнозначная измеримая функция u_ε такая, что при п. в. $t \in T$ $\|u(t) - u_\varepsilon(t)\|_{\gamma(U,X)} < \varepsilon$, отсюда $u_\varepsilon \in W$ и $\|u - u_\varepsilon\|_W < c\varepsilon$ (c — постоянная, не зависящая от u и ε). Далее, т. к. норма пространства W абсолютно непрерывна, т. е.

$$\|\chi_E u\|_W \to 0 \quad \text{при} \quad \mu(E) \to 0,$$

найдется такое множество $E \in \Sigma$, что "срезка" $\chi_E u_\varepsilon$ функции u_ε будет конечнозначной и $\|u - \chi_E u_\varepsilon\|_W < c\varepsilon$, что доказывает утверждение.

Теорема 1.3. *Пусть множество скалярных функций $L \subset L_p \cap L_q$ плотно в $L_p \cap L_q$ и множество $M \subset \gamma(U,X)$ плотно в $\gamma(U,X)$. Тогда линейная оболочка множества функций $L \otimes M = \{\varphi u : \varphi \in L,\ u \in M\}$ плотна в пространстве $W = \gamma(L_p(U), L_q(X))$.*

Доказательство. Пусть $r = \max(p,q)$, $V = \gamma(U,X)$. Из условия теоремы вытекает плотность линейной оболочки множества функций $L \otimes M$ в $L_r(V)$. В свою очередь, из леммы 1.3 следует плотность $L_r(V)$ в W. $\square$

Следствие. Рассмотрим единичный интервал $T = (0,1)$ с лебеговой мерой. Если множество $M \subset \gamma(U,X)$ плотно в пространстве $\gamma(U,X)$, то линейная оболочка множества функций $\{\varphi u : \varphi \in C^\infty[0,1],\ u \in M\}$ плотна в пространстве $W = \gamma(L_p(T;U),\ L_q(T;X))$.

2. Пространства Соболева с усиленной метрикой

Пусть Ω — ограниченная плоская область с границей $\Gamma_0 = \partial\Omega$, состоящей из конечного числа кусков класса C^2, причем соседние куски в точках стыка не образуют нулевых углов. Пусть даны кривые $\Gamma_i \subset \overline{\Omega}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, класса C^2 с концами на Γ_0. Предполагается, что в точках пересечений кривые Γ_i $(i = \overline{0,m})$ также не образуют нулевых углов. Таким образом, область Ω разбивается на конечное число подобластей Ω_k, $k = \overline{1,n}$, с границами того же класса, что и у Ω.

Определение. Пусть $1 < p, q < \infty$. Пространством Соболева с усиленной метрикой называют множество функций

$$V = V^{1,1}_{p,q} = V^{1,1}_{p,q}(\Omega, \{\Gamma_i\}) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in W^1_p(\Omega) : u|_{\Gamma_i} \in W^1_q(\Gamma_i),\ i = \overline{0,m}\}$$

с нормой

$$\|u\|_V = \|u\|_{W^1_p(\Omega)} + \sum_{i=0}^{m} \|u\|_{W^1_q(\Gamma_i)}. \tag{2}$$

Пространства такого рода рассматривались в [4]–[11]. Из определения с очевидностью вытекает, что пространство V является рефлексивным B-пространством. Ниже установим плотность гладких функций в усиленном пространстве Соболева, а также в одном специальном пространстве, которое можно интерпретировать как пространство V-значных функций того же типа, что и в предыдущем пункте. Этот факт позволяет дать эквивалентное определение пространства Соболева с усиленной метрикой как замыкание гладких функций в норме (2).

Пусть $\Gamma = \bigcup\limits_{i=0}^{m} \Gamma_i$. Для $r \in (0,1]$ через $W^r_p(\Gamma)$ обозначим множество функций, определенных на Γ таких, что сужение этих функций на каждое Γ_i принадлежит классу $W^r_p(\Gamma_i)$ и, кроме того, в случае $rp > 1$ функции класса $W^r_p(\Gamma)$ предполагаются (после исправления на множестве нулевой линейной меры) непрерывными на компакте Γ. На $W^r_p(\Gamma)$ естественно ввести нормировку

$$\|u\|_{W^r_p(\Gamma)} = \sum_{i=0}^{m} \|u\|_{W^r_p(\Gamma_i)} \qquad \text{при } rp \le 1$$

и

$$\|u\|_{W^r_p(\Gamma)} = \sum_{i=0}^{m} \|u\|_{W^r_p(\Gamma_i)} + \|u\|_{C(\Gamma)} \quad \text{при } rp > 1.$$

В последнем случае можно наделить $W^r_p(\Gamma)$ эквивалентной нормой

$$\|u\|_{W^r_p(\Gamma)} = \sum_{i=0}^{m} \|u\|_{W^r_p(\Gamma_i)} + \left(\sum_{\xi} |u(\xi)|^p\right)^{1/p},$$

где точка ξ пробегает все пересечения семейства кривых $\{\Gamma_i\}$, $i = \overline{0,m}$. Очевидно, $W_p^r(\Gamma)$ является рефлексивным B-пространством.

Всюду в дальнейшем через γ будет обозначаться оператор следа на Γ. Оператор γ является ретракцией из $W_p^1(\Omega)$ на $W_p^{1-1/p}(\Gamma)$. Действительно, поскольку граница каждой из подобластей Ω_k состоит из гладких кусков, стыкующихся без нулевых углов, то, как следует из результатов работы [12], операторы следа $\gamma_k u = u|_{\partial\Omega_k}$ являются ретракциями из $W_p^1(\Omega_k)$ на $W_p^{1-1/p}(\partial\Omega_k)$. Поэтому существуют соответствующие коретракции (операторы продолжения) $\beta_k \in L(W_p^{1-1/p}(\partial\Omega_k), W_p^1(\Omega_k))$. Очевидно, определяемый "кусочно" оператор

$$\beta\varphi = \sum_{k=1}^{n} \chi_{\Omega_k}\beta_k\delta_k\varphi,$$

где δ_k — операторы сужения с Γ на $\partial\Omega_k$, будет коретракцией для γ.

Теорема 2.1. *Пространство V является пространством $\gamma(W_p^1(\Omega), W_q^1(\Gamma))$ с нормой графика в смысле определения п. 2* [1], *причем оператор следа γ является ретракцией V на $W_q^1(\Gamma) \cap W_p^{1-1/p}(\Gamma)$.*

Доказательство. Включение $\gamma(W_p^1(\Omega), W_q^1(\Gamma)) \subset V$ очевидно. Для доказательства противоположного включения покажем, что для любой функции $u \in V$ ее след γu является непрерывной функцией. Действительно, поскольку $W_q^1(\Gamma_i) \subset C(\Gamma_i)$, то $u|_{\Gamma_i} \in C(\Gamma_i)$ $(i = \overline{0,m})$. Отсюда и из того, что $\gamma u \in W_p^{1-1/p}(\Gamma)$ следует, что если ξ — точка пересечения кривых Γ_i и Γ_j, то в силу условий "склейки" ([12], с. 74) γu должна быть непрерывной в точке ξ, поэтому $\gamma u \in C(\Gamma)$.

То, что оператор γ является ретракцией из V на $W_q^1(\Gamma) \bigcap W_p^{1-1/p}(\Gamma)$, следует из того, что γ есть ретракция из $W_p^1(\Omega)$ на $W_p^{1-1/p}(\Gamma)$ и из утверждения (iii) теоремы 2.1 [1]. $\square$

Замечание. Как следует из теорем вложения, при выполнении неравенства $2q \geq p$ будет выполнено включение $W_q^1(\Gamma) \subset W_p^{1-1/p}(\Gamma)$. В этом случае γ будет являться ретракцией из V на $W_q^1(\Gamma)$.

Через $\overset{\circ}{V}$ обозначим подпространство функций u из V, для которых $\gamma u = 0$. Ясно, что $\overset{\circ}{V}$ является замкнутым подпространством пространств $W_p^1(\Omega)$ и V. Как было отмечено выше, оператор γ является ретракцией из $W_p^1(\Omega)$ на $W_p^{1-1/p}(\Gamma)$ и, как утверждается в теореме 2.1, из V на $W_q^1(\Gamma) \cap W_p^{1-1/p}(\Gamma)$. Отсюда вытекает дополняемость $\overset{\circ}{V}$ как в $W_p^1(\Omega)$, так и в V. Пусть π — какой-нибудь проектор на $\overset{\circ}{V}$. Тогда из утверждения (iv) теоремы 2.1 [1] получаем

Следствие. Оператор $\Pi u = (\pi u, \gamma u)$ осуществляет изоморфизм пространства V на декартово произведение $\overset{\circ}{V} \times (W_q^1(\Gamma) \cap W_p^{1-1/p}(\Gamma))$.

Установим теперь плотность гладких функций в пространствах Соболева с усиленной метрикой. Пусть $D_\Gamma(\Omega)$ обозначает множество функций, имеющих частные производные любого порядка и носители которых не пересекаются с Γ. Справедлива

Теорема 2.2. *Множество $D_\Gamma(\Omega)$ плотно в $\overset{\circ}{V}$.*

Доказательство. Пусть $u \in \overset{\circ}{V}$. Тогда $u|_{\Omega_k} \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega_k)$ для каждого $k = \overline{1,n}$. Поскольку пространство финитных функций $D(\Omega_k)$ плотно в $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega_k)$ ([13], с. 87), то для фиксированного $\varepsilon > 0$ можно подобрать функцию $u_{\varepsilon,k} \in D(\Omega_k)$ такую, что $\|u - u_{\varepsilon,k}\|_{W_p^1(\Omega_k)} \leq \varepsilon/n$. Положив $u_\varepsilon = \sum\limits_{k=1}^{n} \chi_{\Omega_k} u_{\varepsilon,k}$, очевидно, получим $u_\varepsilon \in D_\Gamma(\Omega)$ и

$$\|u - u_\varepsilon\|_V = \|u - u_\varepsilon\|_{W_p^1(\Omega)} \leq \sum_{k=1}^{n} \|u - u_{\varepsilon,k}\|_{W_p^1(\Omega_k)} \leq \varepsilon. \quad \square$$

Теорема 2.3. *Множество бесконечно дифференцируемых функций $C^\infty(\overline{\Omega})$ плотно в пространстве V.*

Доказательство. Положим $r = \max(p, q)$. Хорошо известно, что множество $C^\infty(\overline{\Omega})$ плотно в $W_r^2(\Omega)$. Поэтому достаточно установить плотность последнего в усиленном пространстве Соболева V (заметим, что $W_r^2(\Omega) \subset V$). Согласно следствию 3 теоремы 2.1 [1] для этого достаточно установить, что множество $W_r^2(\Omega)\bigcap \ker\gamma$ плотно в $\overset{\circ}{V}$ и $\gamma(W_r^2(\Omega))$ плотно в $\gamma(V) = W_q^1(\Gamma)\bigcap W_p^{1-1/p}(\Gamma)$. Поскольку $D_\Gamma(\Omega) \subset W_r^2(\Omega)\bigcap \ker\gamma$, то по теореме 2.2 множество $W_r^2(\Omega)\bigcap\ker\gamma$ плотно в $\overset{\circ}{V}$. Итак, осталось доказать плотность множества $\gamma(W_r^2(\Omega))$ в $\gamma(V) = W_q^1(\Gamma)\bigcap W_p^{1-1/p}(\Gamma)$. Проведем следующие построения. Поскольку в угловых точках множества Γ гладкие куски Γ стыкуются под ненулевым углом, то найдется конечное семейство $\mathcal{O} = \{O_j\}_{j=1,N}$ попарно непересекающихся открытых в R^2 множеств, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\Gamma \subset \bigcup\limits_{j=1}^{N} \overline{O_j}$;

2) $\Gamma\bigcap O_j \in C^2 \quad \forall O_j \in \mathcal{O}$.

Положим $P = \bigcup\limits_{i\neq j} \overline{O_i} \cap \overline{O_j} \cap \Gamma$. Очевидно, множество P конечно и содержит в себе множество всех угловых точек Γ и все пересечения кривых Γ_i. Фиксируем произвольную функцию $u \in V$. Подберем функцию $u_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ так, чтобы $u_0(a) = u(a)$ $\forall a \in P$. Тогда $v = u - u_0 \in V$ и функция $\gamma v = \gamma u - \gamma u_0$ обладает тем свойством, что $\gamma v(a) = 0$ $\forall a \in P$. Пусть $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало. Рассмотрим произвольное множество $O_j \in \mathcal{O}$. Через s обозначим дуговую координату кривой $\overline{O_j}\cap\Gamma$, отсчитываемую от некоторой ее точки. Функция γv как функция $s \in [s_1, s_2]$ принадлежит классу $W_q^1 \bigcap W_p^{1-1/p}(O_j\cap\Gamma)$. Рассмотрим два возможных случая.

1) Кусок $\overline{O_j}\cap\Gamma$ не содержит точек из P. В этом случае кривая $\overline{O_j}\cap\Gamma$ замкнута и не имеет угловых точек. Поэтому найдется функция $\varphi_j \in C^\infty(\overline{O_j}\cap\Gamma)$ такая, что

$$\|\gamma v - \varphi_j\|_{W_q^1\cap W_p^{1-1/p}(O_j\cap\Gamma)} \le \frac{\varepsilon}{N}.$$

Так как $\overline{O_j}\cap\Gamma \in C^2$ и $\overline{O_j}\cap\Gamma\cap P = \emptyset$, то найденную функцию $\varphi_j \in C^\infty(\overline{O_j}\cap\Gamma)$ можно продолжить с $\overline{O_j}\cap\Gamma$ на всю плоскость R^2 так, что ее продолжение, которое обозначим через v_j, будет принадлежать (по крайней мере) классу $C^2(R^2)$ и $\operatorname{supp} v_j \cap \overline{O_i} = \emptyset$ при $i \neq j$.

2) Кусок $\overline{O_j}\cap\Gamma$ содержит точки из P, которые, очевидно, являются концами кривой $\overline{O_j}\cap\Gamma$. В этом случае $\gamma v(s_1) = \gamma v(s_2) = 0$. В силу известных теорем о приближении финитными функциями функций из соболевских классов, обращающихся в нуль на концах отрезка, найдется $\varphi_j \in C_0^\infty(O_j\cap\Gamma)$ (т. е. бесконечное число раз дифференцируемая по s функция, обращающаяся в нуль в окрестности концов кривой $O_j\cap\Gamma$) такая, что

$$\|\gamma v - \varphi_j\|_{W_q^1\cap W_p^{1-1/p}(O_j\cap\Gamma)} \le \frac{\varepsilon}{N}.$$

Так как $\Gamma\bigcap O_j \in C^2$, то существует продолжение $w_j \in C^2(R^2)$ функции $\varphi_j \in C_0^\infty(O_j\cap\Gamma)$. Поскольку носитель функции φ_j целиком содержится в O_j, то найдется $\psi_j \in C_0^\infty(O_j)$, при этом $\psi_j = 1$ в окрестности компакта $\operatorname{supp}\varphi_j$ ([14], с. 10). Положим $v_j = w_j\psi_j \in C^2(R^2)$. По построению, $\operatorname{supp} v_j \cap \overline{O_i} = \emptyset$ при $i \neq j$ (т. к. O_j является окрестностью компакта $\operatorname{supp} v_j$ и открытые множества O_j и O_i не пересекаются) и $v_j|_{O_j\cap\Gamma} = \varphi_j$.

Итак, для каждого $j = \overline{1,N}$ построены функции v_j из $C^2(R^2)$, удовлетворяющие условиям

1) $\operatorname{supp} v_j \cap \operatorname{supp} v_i = \emptyset$ при $j \neq i$;

2) $\|\gamma v - \gamma v_j\|_{W_q^1\cap W_p^{1-1/p}(O_j\cap\Gamma)} = \|\gamma v - \varphi_j\|_{W_q^1\cap W_p^{1-1/p}(O_j\cap\Gamma)} \le \varepsilon/N$.

Положим $v_\varepsilon = \sum\limits_{j=1}^{N} v_j|_\Omega$ и $u_\varepsilon = v_\varepsilon + u_0$. По построению $u_\varepsilon \in C^2(\overline{\Omega}) \subset W_r^2(\Omega)$ и

$$\|\gamma u - \gamma u_\varepsilon\|_{W_q^1 \cap W_p^{1-1/p}(\Gamma)} = \|\gamma v - \gamma v_\varepsilon\|_{W_q^1 \cap W_p^{1-1/p}(\Gamma)} \le \sum_{j=1}^{N} \|\gamma v - \gamma v_\varepsilon\|_{W_q^1 \cap W_p^{1-1/p}(O_j \cap \Gamma)} =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \|\gamma v - \gamma v_j\|_{W_q^1 \cap W_p^{1-1/p}(O_j \cap \Gamma)} = \sum_{j=1}^{N} \|\gamma v - \varphi_j\|_{W_q^1 \cap W_p^{1-1/p}(O_j \cap \Gamma)} \le \varepsilon.$$

В силу произвольности $u \in V$ и $\varepsilon > 0$ теорема доказана.

Для $p_1, q_1 \in [1, \infty)$ определим пространство функций W переменных $(t, x) \in Q = T \times \Omega$, где $T = (0, 1)$, с конечной нормой

$$\|u\|_W = \left(\int_T \|u(t)\|^{p_1}_{W_p^1(\Omega)} dt\right)^{1/p_1} + \left(\int_T \|\gamma u(t)\|^{q_1}_{W_q^1(\Gamma)} dt\right)^{1/q_1}.$$

Теорема 2.4. *Множество бесконечно дифференцируемых в $\overline{Q} = [0, 1] \times \overline{\Omega}$ функций плотно в пространстве W.*

Доказательство. Как следует из определения, тип пространства W тот же, что и в предыдущем разделе, а именно $W = \gamma(L_{p_1}(T; W_p^1(\Omega)), L_{q_1}(T; W_q^1(\Gamma)))$. Рассмотрим множество функций

$$C^\infty[0, 1] \otimes C^\infty(\overline{\Omega}) = \left\{\varphi u : \varphi \in C^\infty[0, 1],\ u \in C^\infty(\overline{\Omega})\right\} \subset C^\infty(\overline{Q}).$$

Как известно, множество $C^\infty[0, 1]$ плотно в $L_{p_1}(0, 1) \cap L_{q_1}(0, 1) = L_r(0, 1)$, где $r = \max(p_1, q_1)$. По теореме 2.3 $C^\infty(\overline{\Omega})$ плотно в пространстве Соболева с усиленной метрикой $V = \gamma(W_p^1(\Omega), W_q^1(\Gamma))$. Согласно следствию теоремы 1.3 линейная оболочка $\mathrm{Span}\,(C^\infty[0, 1] \otimes C^\infty(\overline{\Omega})) \subset C^\infty(\overline{Q})$ плотна в $W = \gamma(L_{p_1}(T; W_p^1(\Omega)), L_{q_1}(T; W_q^1(\Gamma)))$. $\square$

Литература

1. Тимербаев М.Р. *Пространства с нормой графика и усиленные пространства Соболева.* I // Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 5. – С. 55-65.
2. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. *Линейные операторы. Общая теория.* – М.: Ин. лит., 1962. – 895 с.
3. Иоффе А.Д., Леви В.Л. *Субдифференциалы выпуклых функций* // Тр. Моск. матем. о-ва – 1972. – Т. 26. – С. 3–73.
4. Антонцев С.Н., Мейрманов А.М. *Математические модели движения поверхностных и подземных вод.* – Новосибирск: Изд-во Новосибирск. ун-та, 1979. – 79 с.
5. Глазырина Л.Л., Павлова М.Ф. *Разностная схема решения задачи совместного движения грунтовых и поверхностных вод* // Изв. вузов. Математика. – 1984. – № 9. – С. 72–75.
6. Глазырина Л.Л., Павлова М.Ф. *О разрешимости одного нелинейного эволюционного неравенства теории совместного движения поверхностных и подземных вод* // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 4. – С. 20–31.
7. Даутов Р.З., Карчевский М.М., Федотов Е.М. *Об одном методе решения трехмерных стационарных задач типа сосредоточенной емкости* // Тез. докл. Всесоюзн. конф. "Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики". ВЦ СО АН СССР. – Новосибирск, 1987. – С. 68.
8. D'akonov E.G. *Optimization in solving elliptic problems.* – Boca Raton, 1996.
9. Дьяконов Е.Г. *Новый подход к краевым условиям Дирихле, основанный на использовании усиленных пространств Соболева* // Докл. РАН. – 1997. – Т. 352. – № 5. – С. 590–594.
10. Дьяконов Е.Г. *Усиленные пространства Соболева и некоторые новые типы эллиптических краевых задач* // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33. – № 4. – С. 532–539.

11. Дьяконов Е.Г. *Оценки N-поперечников в смысле Колмогорова для некоторых компактов в усиленных пространствах Соболева* // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 4. – С. 32–50.
12. Яковлев Г.Н. *Граничные свойства функций класса $W_p^{(l)}$ на областях с угловыми точками* // ДАН СССР. – 1961. – Т. 140. – № 1. – С. 73–76.
13. Necas J. *Les methodes directes en theorie des equations elliptiques.* – Masson, Paris / Academia, Pragua, 1967. – 346 p.
14. Хермандер Л. *Линейные дифференциальные операторы с частными производными.* – М.: Мир, 1965. – 380 с.

Казанский государственный университет

Поступила 19.11.2001