

Ж.С. САТАРОВ

**ОБРАЗУЮЩИЕ И ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ
ПОЛНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ НАД ПОЛУЛОКАЛЬНЫМИ
КОЛЬЦАМИ БЕЗ ЕДИНИЦЫ. I**

1. Введение

Описание линейных, а также близких к ним групп через образующие элементы и определяющие соотношения составляет одну из центральных задач комбинаторной теории групп. Упомянем некоторые результаты в названном направлении. Так, в [1] были найдены образующие и соотношения обобщенной полной линейной группы $GL^{\circ}(n, \Lambda)$, $n \geq 2$, над произвольным (не обязательно с единицей) локальным кольцом Λ . Случай этой задачи, когда Λ обладает единицей (в этом случае последняя группа совпадает с $GL(n, \Lambda)$), ранее был решен другим методом в [2]. Отметим также работу [3], где находились образующие и соотношения обобщенных ортогональных групп $O^{\circ}(n, \Lambda)$, $SO^{\circ}(n, \Lambda)$, $n \geq 2$, над коммутативными локальными кольцами Λ .

Целью исследований, начатых в данной работе, является нахождение образующих элементов и определяющих соотношений обобщенной полной линейной группы $GL^{\circ}(n, \Lambda)$, $n \geq 2$, над произвольным полулокальным кольцом Λ . При решении этой задачи применяется метод трансформации, развитый в [1], [3] и других работах автора. Здесь вместо классических в отличие от [1] взяты “внутренние” образующие элементы из $GL^{\circ}(n, \Lambda)$; обобщены ранее известные, а также выявлены новые (возникающие в нелокальных случаях Λ) соотношения; существенно усовершенствована методика преобразований.

Решение названной задачи осуществляется в двух частях. В первой части будут выявлены системы образующих и соотношений группы $GL^{\circ}(n, \Lambda)$, а также приведены некоторые предварительные факты, которые затем необходимы при доказательстве главного утверждения работы — задания группы $GL^{\circ}(n, \Lambda)$. (Что касается самого доказательства полноты найденной системы соотношений, то оно в полном объеме будет приведено в одноименной ее второй части.)

Чтобы поставить задачу точно, напомним некоторые понятия. Пусть R — произвольное ассоциативное кольцо и \circ — его квазумножение, т. е. $x \circ y = x + xy + y$. Элемент α из R будем называть *квазиобратимым*, если для него $\alpha \circ \beta = 0 = \beta \circ \alpha$ при некотором $\beta \in R$. По квазиобратимому α его квазиобратное α' всегда определяется однозначно. Совокупность всех квазиобратимых элементов R° из R образует группу относительно композиции \circ (где единицей будет нуль). Группу квазиобратимых матриц полного матричного кольца $R = M(n, \Lambda)$ (над ассоциативным Λ) обозначим через $GL^{\circ}(n, \Lambda)$ и назовем ее *обобщенной полной линейной группой* степени n над кольцом Λ . Поскольку при наличии единицы в Λ отображение $GL(n, \Lambda) \rightarrow GL^{\circ}(n, \Lambda)$, $E + a \rightarrow a$ (E — единичная матрица порядка n), задает изоморфизм, то группа $GL^{\circ}(n, \Lambda)$ является обобщением обычной полной линейной группы на самые общие случаи ассоциативных Λ .

Следуя ([4], сс. 351, 337), ассоциативное кольцо Λ назовем *полулокальным* (*локальным*), если его фактор по радикалу Джекобсона $\Lambda/J(\Lambda)$ образует прямую сумму конечного числа полных матричных колец над телами (соответственно тело). Существование полулокальных колец без единицы, а также степень расширяемости класса всех полулокальных колец по отношению к его подклассу колец с единицей методом прямых сумм могут быть обоснованы как в случае локальных колец [1], где показано, что эта степень очень велика.

Итак, объектом исследования в этой работе является обобщенная полная линейная группа $GL^\circ(n, \Lambda)$, $n \geq 2$, над произвольным полулокальным кольцом Λ , для которого ни коммутативность, ни существование единицы не предполагаются.

2. Образующие элементы группы $GL^\circ(n, \Lambda)$

Пусть R — ассоциативное кольцо и $J(R)$ — его радикал Джекобсона, \bar{a} — квазиобратимый класс из фактора $\bar{R} = R/J(R)$, представленный любым из своих вычетов a . Тогда имеют место сравнения $a \circ b \equiv b \circ a \equiv 0 \pmod{J(R)}$ при некотором $b \in R$, т. е. равенства

$$a \circ b = \mathbf{a}, \quad b \circ a = \mathbf{b}, \quad (J(R))$$

где \mathbf{a}, \mathbf{b} — некоторые элементы из $J(R)$. Включение $J(R) \subseteq R^\circ$ (оно верно для любого R , доказательство см., напр., в [5]) и $(J(R))$ показывает, что $a \in R^\circ$, т. е. всякий квазиобратимый класс из \bar{R} может быть поднят по модулю $J(R)$ до каждого его представителя.

Начиная отсюда, всюду Λ будет означать произвольное полулокальное кольцо и $J = J(\Lambda)$ — его радикал Джекобсона. Итак,

$$\Lambda/J \cong M(m_1, T_1) \oplus \cdots \oplus M(m_l, T_l), \quad (1)$$

где m_i — натуральные числа, T_i — некоторые тела ($i = 1, \dots, l$). Для этого разложения положим $m_1 + \cdots + m_l = m$ и $I(m) = \{1, \dots, m\}$. Пусть \bar{e}_{pq} означает матричную единицу, входящую в правую часть (1) (т. е. матрицу, где на позиции $\langle p, q \rangle$ стоит единица из соответствующего тела, а прочие позиции заполнены нулями). По определению для числа i , $1 \leq i \leq l$, положим $p \sim^i q$ тогда и только тогда, когда $\bar{e}_{pq} \in M(m_i, T_i)$. Ясно, что (дизъюнктная) сумма $\overset{1}{\cup} \cdots \cup \overset{l}{\cup} = \sim$ задает эквивалентность на $I(m)$. Далее, для эквивалентных номеров p, q из $I(m)$ обозначим через Λ_{pq} полный прообраз слагаемого $T_i \bar{e}_{pq} \subseteq M(m_i, T_i)$ при эпиморфизме

$$\Lambda \rightarrow \Lambda/J = \bar{\Lambda}, \quad \alpha \rightarrow \bar{\alpha} = \alpha + J \quad (2)$$

(здесь i — номер, для которого $p \sim^i q$). При принятых обозначениях для кольца Λ имеет место разложение

$$\Lambda = \sum_{i \sim j} \Lambda_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq m). \quad (3)$$

Легко убедиться, что здесь слагаемые $\Lambda_i = \Lambda_{ii}$ образуют локальные подкольца в Λ , а недиагональные Λ_{ij} ($i \neq j$) — его Λ_i - Λ_j -бимодули.

Далее, для номера i из $I(mn) = \{1, 2, \dots, mn\}$ через $r(i)$ будем обозначать наименьший положительный вычет этого числа по модулю m . Введенную выше эквивалентность \sim на множество $I(mn)$ распространяем по правилу $i \sim j \leftrightarrow r(i) \sim r(j)$. Как показывает (3), тогда элементы из $M(n, \Lambda)$ представляются и в “расширенном” матричном виде

$$a = (a_{ij})_{i \sim j} \quad (1 \leq i, j \leq mn), \quad (4)$$

где $a_{ij} \in \Lambda_{r(i), r(j)}$. Будем называть элементы из J *радикальными* элементами.

Вообще говоря, представление в виде (4) неоднозначно (оно однозначно в том и только том случае, когда либо $m = 1$, либо $J = \{0\}$). Ниже для матриц из $GL^\circ(n, \Lambda)$ параллельно будут использованы как их обычные, так и расширенные представления (4). В рассуждениях используются и дизъюнктные разложения

$$\Lambda_i = (-\bar{e}_i) \cup \Lambda_i^\circ, \quad (\cup)$$

где \bar{e}_i — единичный класс тела вычетов $\Lambda_i/J(\Lambda_i)$, $i = 1, \dots, m$ (доказательство можно найти, напр., в [5], с. 15). Если иное не оговорено, далее \equiv будет означать сравнение в Λ по модулю J .

Для индекса $i \in I(mn)$ положим $p(i) = m[i - r(i)] + 1$ (другими словами, $p(i)$ — номер диагональной клетки в $M(n, \bar{\Lambda})$, куда входит число i). Наши рассуждения используют также операторы $[]_{rq}$, $r, q \in I(mn)$ на Λ , определенные как

$$[\alpha]_{rq} = \begin{cases} \alpha, & \text{если } p(r) = p(q); \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для индексов $i, j \in I(mn)$, $i \neq j \sim i$, и аргумента $x \in \Lambda_{r(i), r(j)}$ обозначим через $t_{ij}(x)$ расширенную матрицу (4), где на позиции $\langle i, j \rangle$ стоит элемент x , а на прочих позициях — нули (они и есть “внутренние” квазитрансекции). Согласно факту, отмеченному в начале этого раздела, введенные матрицы $t_{ij}(x)$, как прообразы квазиобратимых элементов при эпиморфизме $R = M(n, \Lambda) \rightarrow M(n, \bar{\Lambda}) = \bar{R}$, $(a_{ij}) \rightarrow (\bar{a}_{ij})$, являются квазиобратимыми. Для них имеет место формула $t'_{ij}(x) = t_{ij}(x^*)$, где $x^* = x'$ при $p(i) = p(j)$ и $x^* = -x$ в противном случае. Ясно, что здесь $x^* \equiv -x$.

Для номера $i \in I(mn)$ и элемента μ под $d_i(\mu)$ условимся понимать диагональную матрицу $\text{diag}(0, \dots, 0, \mu, 0, \dots, 0)$ вида (4), где μ стоит на i -м месте. Матрицы $d_i(\varepsilon)$, $\varepsilon \in \Lambda_i^\circ$, входят в группу $GL^\circ(n, \Lambda)$ очевидным образом (они и есть “внутренние” диагональные образующие). Пусть $\langle i, j \rangle$, $\langle k, r \rangle$ — пары с элементами из $I(mn)$, для которых $p(i) = p(k)$ и $p(j) = p(r)$. Очевидно, для них $t_{ij}(\mathbf{a}) = t_{kr}(\mathbf{a})$ при $\mathbf{a} \in J$, причем они совпадают еще с диагональной матрицей $d_q(\mathbf{a})$, если $p(i) = p(j)$, здесь q — любой номер, для которого $p(q) = p(i)$.

Введем некоторые другие матрицы из $GL^\circ(n, \Lambda)$ специального вида. Пусть $\{e_{ij}\}_{i \sim j}$, $i, j \in I(m)$, означает какую-нибудь фиксированную систему прообразов матричных единиц \bar{e}_{ij} из правой части (1) при эпиморфизме (2). Эту систему на произвольные пары i, j , $i \sim j$, из $I(mn)$ распространяем правилом $e_{ij} = e_{r(i), r(j)}$ и для простоты положим $e_{ii} = e_i$. Ниже для индексов $i, s \in I(mn)$, $i < s \sim i$, под (is) условимся понимать одну из матриц

$$t_{si}(\pi) \circ t_{is}(\chi) \circ t_{si}(\eta) \quad (i < s)$$

или

$$t_{is}(\chi) \circ t_{si}(\pi) \circ t_{is}(\mu), \quad (s > i)$$

где аргументы π , χ , η , μ удовлетворяют условиям $\pi\chi \equiv \eta\chi \equiv \pi\mu \equiv -e_s$ (эти сравнения равносильны с $\chi\pi \equiv \chi\eta \equiv \mu\pi \equiv -e_i$). Легко проверить, что квазиобратные для $(i < s)$ и $(s > i)$ матрицы имеют аддитивные разложения

$$t_{si}(\eta^*) \circ t_{is}(\chi^*) \circ t_{si}(\pi^*) = d_i(\chi^*\pi^*) + t_{is}(\chi^*) + t_{si}(\varphi) + d_s(\eta^*\chi^*)$$

и

$$t_{is}(\mu^*) \circ t_{si}(\pi^*) \circ t_{is}(\chi^*) = d_i(\mu^*\pi^*) + t_{is}(\zeta) + t_{si}(\pi^*) + d_s(\pi^*\chi^*),$$

где $\varphi = \eta^* + \eta^*\chi^*\pi^* + \pi^* + [\eta^*\pi^*]_{is}$, $\zeta = \mu^* + \mu^*\pi^*\chi^* + \chi^* + [\mu^*\chi^*]_{is}$. Ясно, что в этих формулах $\chi^*\pi^* \equiv \mu^*\pi^* \equiv \chi\pi \equiv -e_i$, $\zeta \equiv -\mu - \mu\pi\chi - \chi \equiv -\mu + \mu - \chi \equiv -\chi \equiv \chi^*$, $\varphi \equiv -\eta - \eta\chi\pi - \pi \equiv -\eta + \eta - \pi \equiv -\pi \equiv \pi^*$ ($\not\equiv 0$), $\eta^*\chi^* \equiv \pi^*\chi^* \equiv \eta\chi = -e_s$. Введенные “внутренние” матрицы (is) ниже будут играть роль обычных матриц-транспозиций. Их для равных индексов доопределяем как $(ii) = 0$.

Покажем теперь, что группа $GL^\circ(n, \Lambda)$ порождается матрицами

$$t_{ij}(\alpha), \quad \alpha \in \Lambda_{r(i), r(j)}, \quad 1 \leq i, j \leq mn, \quad i \neq j \sim i; \quad d_k(\varepsilon), \quad \varepsilon \in \Lambda_k^\circ, \quad 1 \leq k \leq mn. \quad (5)$$

Действительно, пусть $a = (a_{ij})$ — произвольная матрица из $GL^\circ(n, \Lambda)$, представленная в расширенном виде (4). Она на конечное число матриц из (5) расщепляется следующим образом. Первый шаг расщепления состоит из квазумножения a справа на некоторую матрицу $(1s)'$, $1 \leq s \sim 1$. Если здесь $a_{11} \in \Lambda_1^\circ$, то положим $s = 1$ (т. е. в этом случае никакого расщепления производить не надо). Пусть $a_{11} \notin \Lambda_1^\circ$ (а это согласно разложению (U) возможно только при $a_{11} \equiv -e_1$). Для номера i , $1 \leq i < mn$, обозначим через P_i совокупность тех t из $I(mn)$, для

которых $i < t \sim i$. Равенство $a \circ a' = 0$, где $a' = (\tilde{a}_{ij})$ — квазиобратная для a матрица, в данном случае дает сравнение $a_{11} \circ \tilde{a}_{11} + \sum_{k \in P_1} a_{1k} \tilde{a}_{k1} \equiv 0$, т. е. $\sum_{k \in P_1} a_{1k} \tilde{a}_{k1} \equiv e_1$. Последнее в свою очередь влечет за собой существование номера $s \in P_1$, для которого $a_{1s} \neq 0$. Квазумножая a справа на $(1s)'$, в этом случае получаем матрицу, у которой на позиции $\langle 1, 1 \rangle$ стоит либо элемент $a_{11} \circ (\chi^* \pi^*) + a_{1s} \varphi$, либо $a_{11} \circ (\mu^* \pi^*) + a_{1s} \pi^*$. Но оба они сравнимы с $a_{11} \circ (-e_1) - \pi \equiv -e_1 - \pi \not\equiv -e_1$ и, следовательно, являются некоторыми элементами из Λ_1° . (Отметим, что эта операция позицию $\langle 1, s \rangle$ заменяет либо на $a_{1s} + \chi^* + a_{11}\chi^* + a_{1s}\eta^*\chi^*$, либо на $a_{1s} + \zeta + a_{11}\zeta + a_{1s}\pi^*\chi^*$, оба они радикальны.) Итак, первый шаг расщепления дает матрицу, для которой $a_{11} \in \Lambda_1^\circ$ (матрицу, полученную после каждого шага расщепления, удобно обозначать той же буквой a).

Квазумножая теперь a справа на квазитрансекции $t'_{1k}(x_k)$, $x_k = a_{1k} + a'_{11}a_{1k}$, $k \in P_1$, будем иметь матрицу, где $a_{1k} = 0$ при всех указанных значениях k . Квазумножения же полученной матрицы слева на $t'_{k1}(y_k)$, $y_k = a_{k1} + a_{k1}a'_{11}$, $k \in P_1$, приведут к клеточно-диагональной матрице $\text{diag}(a_{11}, a^1)$, где $a_{11} \in \Lambda_1^\circ$ и клетка a^1 имеет порядок $mn - 1$. Повторяя описанную процедуру для клетки a^1 , приходим к матрице вида $\text{diag}(a_{11}, a_{22}, a^2)$, где $a_{11} \in \Lambda_1^\circ$, $a_{22} \in \Lambda_2^\circ$ и a^2 — некоторая клетка порядка $mn - 2$, и т.д. Продолжение этого процесса на $(mn - 1)$ -м шаге дает матрицу $\text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mn,mn})$, где $a_{ii} \in \Lambda_i^\circ$ при всех $i = 1, \dots, mn$. Представление последней матрицы в виде $d_1(\varepsilon_1) \circ d_2(\varepsilon_2) \circ \dots \circ d_{mn}(\varepsilon_{mn})$ уже не представляет труда.

Группу $GL^\circ(n, \Lambda)$ будем представлять в образующих (5).

3. Система соотношений для $GL^\circ(n, \Lambda)$

В этом разделе напишем шесть серий соотношений названной группы в алфавите (5). Предварительно примем следующее соглашение. Квазитрансекцию $t_{ij}(\alpha)$ будем называть *диагональной*, если для нее $\alpha \equiv 0$ при $p(i) = p(j)$ и $\alpha = 0$ при $p(i) \neq p(j)$. В противном случае она называется *недиагональной*. Все квазитрансекции, входящие в левые части серий 2–4, считаются недиагональными, и аргументы ε, τ из 1 и 2 отличными от нуля.

Упомянутые серии таковы:

1. а) $d_i(\varepsilon) \circ d_i(\tau) = d_i(\varepsilon \circ \tau)$, б) $d_i(\varepsilon) \circ d_k(\tau) = d_k(\mu) \circ d_i(\varepsilon)$, $i \neq k$, где $\mu = \tau + [\varepsilon\tau + \tau\varepsilon' + \varepsilon\tau\varepsilon']_{ik}$;
2. $t_{ij}(\alpha) \circ d_k(\varepsilon) = d_k(\varepsilon) \circ t_{ij}(\beta)$, где $\beta = \alpha + \alpha[\varepsilon]_{kj} + [\varepsilon']_{ik}\alpha + [\varepsilon']_{ik}\alpha[\varepsilon]_{kj}$;
3. а) $t_{ij}(\alpha) \circ t_{ij}(\beta) = t_{ij}(\alpha + [\alpha\beta]_{ij} + \beta)$,
- б) $t_{ir}(\alpha) \circ t_{rj}(\beta) = d_r(\tau) \circ t_{ij}(z) \circ t_{rj}(y) \circ t_{ir}(x)$, $i \neq j$, где $x = (-\alpha - \sigma'\alpha)^*$ ($\equiv \alpha$), $\sigma = [\alpha]_{ir} + [\alpha\beta]_{ij}$, $y = (-\beta - \mu'\beta)$ ($\equiv \beta$), $\mu = \tau + [\beta]_{rj}$, $\tau = [\beta]_{ij}x^*$ ($\equiv 0$), $z = (-\gamma - \eta'\gamma)^*$ ($\equiv \alpha\beta$), $\gamma = \alpha\beta + [\alpha\beta]_{rj}y^*$, $\eta = [\tau]_{ir} + [\gamma]_{ij}$;
- с) $t_{iq}(\alpha) \circ t_{rj}(\beta) = t_{rq}(\mathbf{b}) \circ t_{rj}(y) \circ t_{ij}(\mathbf{a}) \circ t_{iq}(x)$, $q \neq r$, $i \neq j$, где $x = (-\alpha - \sigma'\alpha)^*$, $\sigma = [\alpha]_{iq} + [\alpha]_{qr}[\beta]_{ij}$, $\mathbf{a} = (-a - \tau'a)^*$ ($\equiv 0$), $a = [\alpha\beta]_{qr}$, $\tau = [\alpha]_{qr}[\beta]_{ij}$, $y = (-c - \mu'c)^*$, $c = \beta + ([\beta]_{ij} + [\mathbf{b}]_{iq})\mathbf{a}^*$, $\mu = [\mathbf{b}]_{qr} + [c]_{rj}$, $\mathbf{b} = [\beta]_{ij}x^*$ ($\equiv 0$);
- д) $t_{iq}(\mathbf{a}) \circ t_{ij}(\alpha) = t_{ij}(\alpha) \circ t_{iq}(\mathbf{a} + [\alpha^*]_{ij}\mathbf{a})$, $q \neq j$, $p(i) \neq p(q)$, $\mathbf{a} \equiv 0$;
4. $t_{is}(\alpha) \circ t_{si}(\beta) = d_i(\sigma) \circ d_s(\varepsilon) \circ t_{si}(y) \circ t_{is}(x)$, $i < s$, $\alpha\beta \not\equiv -e_i$ где $\sigma = \alpha\beta$, $x = (-\alpha - \sigma'\alpha)^*$, $y = (-\beta - \chi'\beta)^*$, $\chi = (\beta + [\alpha]_{is})x^*$, $\varepsilon = \tau + [\sigma']_{is}\tau$, $\tau = \chi + [\sigma + \beta]_{is}y^*$;
5. при $m > 1$ и $\mathbf{a} \equiv 0$

$$t_{ij}(\mathbf{a}) = \begin{cases} d_k(\mathbf{a}), & \text{если } p(i) = p(j), k — \text{любой номер, для которого } p(k) = p(i); \\ t_{mp(i),mp(j)}(\mathbf{a}) & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

6. для индексов $i < s$, $|\overline{\Lambda}_i| = 2$

$$t_{is}(e_{is}) \circ t_{si}(e_{si}) \circ t_{is}(e_{is}) \circ t_{si}(e_{si}) = d_i(\sigma) \circ d_s(\varepsilon) \circ t_{si}(y) \circ t_{is}(x),$$

где $\sigma = 3e_{is}e_{si} + (e_{is}e_{si})^2$ ($\equiv 0$), $x = (-a - \sigma'a)^*$ ($\equiv e_{is}$), $y = (-b - \chi'b)^*$ ($\equiv e_{si}$), $\varepsilon = \mu + [\sigma']_{is}\mu$, $\mu = \chi + [\sigma + b]_{is}y^*$ ($\equiv 0$), $\chi = c + (b + [a + c]_{is})x^*$, $a = 2e_{is} + e_{is}e_{si}e_{is}$, $b = 2e_{si} + e_{si}e_{is}e_{si}$, $c = e_{si}e_{is} + [e_{is}^2 + e_{is}e_{si}^2 + e_{si}^2 + e_{is}^2]_{is}$.

Как видно из приведенного списка, все его соотношения, кроме 1а) и 5, являются нетрадиционными и поэтому они нуждаются в определенных пояснениях. Поскольку доказательства этих соотношений проводятся одинаковыми рассуждениями, остановимся здесь выборочно лишь на доказательствах соотношений 3с) и 6.

Выход соотношения 3с). Формулировка 3с) использует квазиобратимость элементов $\tau = [\alpha]_{qr}[\beta]_{ij}$, $\sigma = [\alpha]_{iq} + [\alpha]_{qr}[\beta]_{ij}$ и $\mu = [c]_{rj} + [\mathbf{b}]_{qr}$. Квазиобратимость τ очевидна, поскольку для него $\tau \in J \subseteq \Lambda^\circ$ (первое включение следует из $r \neq i$). Квазиобратимость σ при $p(i) \neq p(q)$ также очевидна, ибо в этом случае $[\alpha]_{iq} = 0$ и $\sigma = \tau$. Обоснуйте квазиобратимость μ . Пусть $p(i) = p(q)$. Здесь квазитрансверсия $t_{iq}(\alpha)$, как некоторая нерасширенная диагональная матрица из $GL^\circ(n, \Lambda)$, обязана иметь квазиобратимый аргумент $\alpha \in \Lambda^\circ$. А это при $R = \Lambda$ согласно факту, приведенному в начале п. 2, влечет за собой квазиобратимость суммы $\sigma = \alpha + \tau$ как вычета квазиобратимого класса $\bar{\alpha}$ из $\bar{\Lambda}$. Что касается элемента μ , то его можно представить в виде $\mu = [\beta]_{rj} + \mathbf{c}$, $\mathbf{c} \equiv 0$ (ибо $c \equiv \beta$ и $\mathbf{b} \equiv 0$). Если здесь $p(r) \neq p(j)$, то снова имеем $\mu \in J \subseteq \Lambda^\circ$. В противном случае его квазиобратимость показывается как для σ .

Производим теперь отщепления матрицы $A = t_{iq}(\alpha) \circ t_{rj}(\beta) = t_{iq}(\alpha) + t_{iq}(\alpha)t_{rj}(\beta) + t_{rj}(\beta) = t_{iq}(\alpha) + t_{ij}([\alpha]_{qr}\beta) + t_{rj}(\beta)$ при помощи матриц, указанных в правой части 3с). Отщепление матрицы $t'_{iq}(x)$ справа дает следующий результат:

$$\begin{aligned} A \circ t'_{iq}(x) &= t_{iq}(\alpha) + t_{ij}([\alpha]_{qr}\beta) + t_{rj}(\beta) + [t_{iq}(\alpha) + t_{ij}([\alpha]_{qr}\beta) + t_{rj}(\beta)]t_{iq}(x^*) + t_{iq}(x^*) = \\ &= t_{iq}(\alpha) + t_{ij}([\alpha]_{qr}\beta) + t_{rj}(\beta) + t_{iq}([\alpha]_{iq}x^*) + t_{iq}([\alpha]_{qr}[\beta]_{ij}x^*) + t_{rq}([\beta]_{ij}x^*) + t_{iq}(x^*) = \\ &= t_{iq}\{\alpha + ([\alpha]_{iq} + [\alpha]_{qr}[\beta]_{ij})x^* + x^*\} + t_{ij}([\alpha\beta]_{qr}) + t_{rj}(\beta) + t_{rq}(\mathbf{b}) = t_{iq}(\alpha + \sigma x^* + x^*) + t_{ij}(a) + \\ &\quad + t_{rj}(\beta) + t_{rq}(\mathbf{b}) = t_{iq}[\alpha + \sigma(-\alpha - \sigma'\alpha) - \alpha - \sigma'\alpha] + t_{ij}(a) + t_{rj}(\beta) + t_{rq}(\mathbf{b}) = \\ &= t_{iq}[-(\sigma + \sigma\sigma' + \sigma')\alpha] + t_{ij}(a) + t_{rj}(\beta) + t_{rq}(\mathbf{b}) = t_{ij}(a) + t_{rj}(\beta) + t_{rq}(\mathbf{b}), \end{aligned}$$

т. е. с помощью указанной операции добились аннуляции позиции $\langle i, q \rangle$ в A .

Квазумножая полученную матрицу справа на $t'_{ij}(\mathbf{a})$, аналогичным образом будем иметь

$$\begin{aligned} A \circ t'_{iq}(x) \circ t'_{ij}(\mathbf{a}) &= t_{ij}(a) + t_{rj}(\beta) + t_{rq}(\mathbf{b}) + t_{ij}(a)t_{ij}(\mathbf{a}^*) + t_{rj}(\beta)t_{ij}(\mathbf{a}^*) + t_{rq}(\mathbf{b})t_{ij}(\mathbf{a}^*) + t_{ij}(\mathbf{a}^*) = \\ &= t_{ij}(a) + t_{rj}(\beta) + t_{rq}(\mathbf{b}) + t_{ij}([\alpha]_{qr}[\beta]_{ij}\mathbf{a}^*) + t_{rj}([\beta]_{ij}\mathbf{a}^*) + t_{rq}([\mathbf{b}]_{iq}\mathbf{a}^*) + t_{ij}(\mathbf{a}^*) = \\ &= t_{ij}(a + \tau\mathbf{a}^* + \mathbf{a}^*) + t_{rj}\{\beta + ([\beta]_{ij} + [\mathbf{b}]_{iq})\mathbf{a}^*\} + t_{rq}(\mathbf{b}) = t_{ij}[a + \tau(-a - \tau'a) - a - \tau'a] + \\ &+ t_{rj}\{\beta - ([\beta]_{ij} + [\mathbf{b}]_{iq})(a + \tau'a)\} + t_{rq}(\mathbf{b}) = t_{ij}\{-(\tau + \tau\tau' + \tau')a\} + t_{rj}(c) + t_{rq}(\mathbf{b}) = t_{rj}(c) + t_{rq}(\mathbf{b}). \end{aligned}$$

Теперь отщепление справа последней матрицы с помощью $t'_{rj}(y)$ приведет к

$$\begin{aligned} A \circ t'_{iq}(x) \circ t'_{ij}(\mathbf{a}) \circ t'_{rj}(y) &= t_{rj}(c) + t_{rq}(\mathbf{b}) + t_{rj}(c)t_{rj}(y^*) + t_{rq}(\mathbf{b})t_{rj}(y^*) + t_{rj}(y^*) = \\ &= t_{rj}(c) + t_{rq}(\mathbf{b}) + t_{rj}([c]_{rj}y^*) + t_{rq}([\mathbf{b}]_{qr}y^*) + t_{rj}(y^*) = t_{rj}\{c + ([c]_{rj} + [\mathbf{b}]_{qr})y^* + y^*\} + t_{rq}(\mathbf{b}) = \\ &= t_{rj}(c + \mu y^* + y^*) + t_{rq}(\mathbf{b}) = t_{rj}\{c + \mu(-c - \mu'c) - c - \mu'c\} + t_{rq}(\mathbf{b}) = t_{rj}[-(\mu + \mu\mu' + \mu')c] + t_{rq}(\mathbf{b}) = t_{rq}(\mathbf{b}). \end{aligned}$$

Конечные звенья последней цепочки показывают, что соотношение 3с) действительно было верным.

Выход соотношения 6. В обозначениях этого соотношения легко можно убедиться в правильности (аддитивного) разложения

$$A = t_{is}(e_{is}) \circ t_{si}(e_{si}) \circ t_{is}(e_{is}) \circ t_{si}(e_{si}) = d_i(\sigma) + t_{is}(a) + t_{si}(b) + d_s(c).$$

Как и выше, производятся отщепления матрицы A образующими матрицами из правой части 6.

Результаты этих отщеплений таковы:

$$\begin{aligned}
A \circ t'_{is}(x) &= d_i(\sigma) + t_{is}(a) + t_{si}(b) + d_s(c) + d_i(\sigma)t_{is}(x^*) + t_{is}(a)t_{is}(x^*) + t_{si}(b)t_{is}(x^*) + \\
&+ d_s(c)t_{is}(x^*) + t_{is}(x^*) = d_i(\sigma) + t_{is}(a) + t_{si}(b) + d_s(c) + t_{is}(\sigma x^*) + d_s([a]_{is}x^*) + d_s(bx^*) + \\
&+ d_s([c]_{is}x^*) + t_{is}(x^*) = d_i(\sigma) + t_{is}(a + \sigma x^* + x^*) + t_{si}(b) + d_s(c + [a]_{is}x^* + bx^* + [c]_{is}x^*) = \\
&= d_i(\sigma) + t_{is}\{a + \sigma(-a - \sigma'a) - a - \sigma'a\} + t_{si}(b) + d_s(\chi) = d_i(\sigma) + t_{is}\{-(\sigma + \sigma\sigma' + \sigma')a\} + t_{si}(b) + \\
&+ d_s(\chi) = d_i(\sigma) + t_{si}(b) + d_s(\chi), \\
A \circ t'_{is}(x) \circ t'_{si}(y) &= d_i(\sigma) + t_{si}(b) + d_s(\chi) + d_i(\sigma)t_{si}(y^*) + t_{si}(b)t_{si}(y^*) + d_s(\chi)t_{si}(y^*) + \\
&+ t_{si}(y^*) = d_i(\sigma) + t_{si}(b) + d_s(\chi) + d_s([\sigma]_{is}y^*) + d_s([b]_{is}y^*) + t_{si}(\chi y^*) + t_{si}(y^*) = \\
&= d_i(\sigma) + t_{si}(b + \chi y^* + y^*) + d_s(\chi + [\sigma]_{is}y^* + [b]_{is}y^*) = d_i(\sigma) + t_{si}\{b + \chi(-b - \chi'b) - b - \chi'b\} + \\
&+ d_s(\mu) = d_i(\sigma) + t_{si}\{-(\chi + \chi\chi' + \chi')b\} + d_s(\mu) = d_i(\sigma)d_s(\mu), \\
d'_i(\sigma) \circ A \circ t'_{is}(x) \circ t'_{si}(y) &= d'_i(\sigma) + d'_i(\sigma)d_i(\sigma) + d'_i(\sigma)d_s(\mu) + d_i(\sigma) + d_s(\mu) = \\
&= d_s(\mu) + d_s([\sigma']_{is}\mu) = d_s(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Конечные звенья последней цепочки показывают, что соотношения 6 справедливы.

Как отмечено во введении, многие из перечисленных выше соотношений являются обобщениями соотношений, хорошо известных из теории линейных групп. Покажем это на примере соотношений серии 3. Действительно, на тех номерах $i, j; i, r, j; i, q, r, j$, для которых $p(i), p(j); p(i), p(r), p(j); p(i), p(q), p(r), p(j)$ попарно различны, соотношения 3a), 3b) и 3c) примут следующие хорошо знакомые формы:

$$t_{ij}(\alpha) \circ t_{ij}(\beta) = t_{ij}(\alpha + \beta), \quad [t_{ir}(\alpha), t_{rj}(\beta)]^\circ = t_{ij}(\alpha\beta), \quad [t_{iq}(\alpha), t_{rj}(\beta)]^\circ = 0$$

(здесь $[x, y]^\circ = x \circ y \circ x' \circ y'$ — квазикоммутатор элементов x и y). Так будет, например, при всех $i, q, r, j, i \neq j, q \neq r$, если $m = 1$, т. е. когда Λ локально. Именно, наряду с другими последние “стейнберговские” соотношения и были использованы в [1] при описании группы $GL^\circ(n, \Lambda)$, $n \geq 2$, над произвольным локальным кольцом Λ .

4. Производные разложения

Дальнейшие рассуждения помимо основных соотношений 1–6 используют также некоторые следствия из них (они обозначены внизу нумерацией (6)–(15)). Чтобы сформулировать их, примем следующие соглашения. Ниже для $x \in \Lambda$ под \widehat{x} будем понимать некоторый элемент из Λ , для которого $\widehat{x} \equiv x$. Далее, через $*$ (с индексами и без них) будут обозначаться некоторые элементы из $\Lambda_{r(i), r(j)}$, принимающие, вообще говоря, различные значения на разных местах (индексы i, j определяются по контексту). Аналогичным образом \cdot будет обозначать некоторые элементы из J . Ниже под $[W_V]$, где W, V — некоторые слова алфавита (5), будет пониматься одно из этих слов: W или V .

Упомянутыми выше производными разложениями являются

$$t_{si}(\beta) \circ t_{is}(\alpha) = d_i(*) \circ d_s(*) \circ t_{is}(*) \circ t_{si}(*), \quad \beta\alpha \not\equiv -e_s, \quad s > i; \quad (6)$$

$$t_{rj}(\beta) \circ t_{ir}(\alpha) = d_r(\cdot) \circ t_{ij}(-\widehat{\alpha\beta}) \circ t_{ir}(\widehat{\alpha}) \circ t_{rj}(\widehat{\beta}), \quad j \neq i; \quad (7)$$

$$(is) \circ d_k(\varepsilon) = d_k(\varepsilon) \circ (is), \quad i < s; \quad (8)$$

$$(is) \circ t_{is}(\alpha) = d_i(*) \circ d_s(*) \circ t_{si}(*) \circ (is), \quad i < s; \quad (9)$$

$$(is) \circ t_{si}(\alpha) = d_i(*) \circ d_s(*) \circ t_{si}(*) \circ \left[\begin{smallmatrix} t_{is}(*) \\ (is) \end{smallmatrix} \right], \quad i < s; \quad (10)$$

$$(is) \circ t_{ij}(\alpha) = d_i(\cdot) \circ d_s(\cdot) \circ t_{sj}(\widehat{\chi\alpha}) \circ t_{ij}(\cdot) \circ (is), \quad i < s \neq j; \quad (11)$$

$$(is) \circ t_{sj}(\alpha) = d_i(\cdot) \circ d_s(\cdot) \circ (\widehat{\pi\alpha}) \circ t_{sj}(\cdot) \circ (is), \quad j \neq i < s; \quad (12)$$

$$(is) \circ t_{ji}(\alpha) = d_i(\cdot) \circ d_s(\cdot) \circ t_{js}(-\widehat{\alpha\pi}) \circ t_{ji}(\cdot) \circ (is), \quad i < s \neq j; \quad (13)$$

$$(is) \circ t_{js}(\alpha) = d_i(\cdot) \circ d_s(\cdot) \circ t_{ji}(-\widehat{\alpha\chi}) \circ t_{js}(\cdot) \circ (is), \quad j \neq i < s; \quad (14)$$

$$(is) \circ t_{rj}(\alpha) = d_i(\cdot) \circ d_s(\cdot) \circ t_{rj}(\widehat{\alpha}) \circ t_{ri}(\cdot) \circ t_{rs}(\cdot) \circ t_{sj}(\cdot) \circ t_{ij}(\cdot) \circ (is), \quad (15)$$

где $i < s$ и $\{i, s\} \cap \{r, j\} = \emptyset$.

Из приведенного списка нетрудно догадаться, что при применении этих разложений будем интересоваться только их структурными строениями и, возможно, радикальностью некоторых аргументов. В этих разложениях все квазитрансекции, входящие в левые части, считаются недиагональными, а буква $d_k(\varepsilon)$ из (8) — ненулевой. Что касается правильности разложений (6)–(15), то выводы для (6)–(8) приводятся полностью. Поскольку доказательства серий (9), (10) и (11)–(15) идентичны, остановимся здесь на выводах соотношений (10) и (13). Отметим, что соотношение (6) в работе применяется только при выводе разложения (10).

Выход разложения (6). Взяв квазиобратные от обеих частей соотношения 4 и используя 1, 2 и 3а), будем иметь $t_{si}(\beta^*) \circ t_{is}(\alpha^*) = t_{is}(x^*) \circ t_{si}(y^*) \circ d'_s(\varepsilon) \circ d'_i(\sigma) = d_i(*) \circ d_s(*) \circ t_{is}(*) \circ t_{si}(*)$. Ясно, что здесь $\langle \beta^*, \alpha^* \rangle$ принимает все значения из $\Lambda_{r(s), r(i)} \times \Lambda_{r(i), r(s)}$, для которых $\beta^* \alpha^* \neq -e_s$, когда α и β пробегают указанные в 4 значения. Теперь формально заменив β^* , α^* на β , α соответственно, приходим к (6).

Выход разложения (7). Здесь взятие квазиобратных от обеих частей 3б) и последующее применение соотношения “структурной” перестановочности

$$t_{rj}(\gamma) \circ t_{ij}(\delta) = [t_{ij}(\cdot) \circ t_{ij}(\widehat{\delta})] \circ [t_{rj}(\cdot) \circ t_{rj}(\widehat{\gamma})] = t_{ij}(\widehat{\delta}) \circ t_{rj}(\widehat{\gamma}) \quad (16)$$

(оно следует из 3с), 3а)), а также 1а), 2, 3б), 3а), 3д) и 5 дает

$$\begin{aligned} t_{rj}(\beta^*) \circ t_{ir}(\alpha^*) &= t_{ir}(x^*) \circ t_{rj}(y^*) \circ t_{ij}(z^*) \circ d_r(\tau') = d_r(\cdot) \circ t_{ir}(-\widehat{\alpha}) \circ [t_{rj}(-\widehat{\beta}) \circ t_{ij}(-\widehat{\alpha\beta})] = \\ &= d_r(\cdot) \circ [t_{ir}(-\widehat{\alpha}) \circ t_{ij}(-\widehat{\alpha\beta})] \circ t_{rj}(-\widehat{\beta}) = d_r(\cdot) \circ t_{ir}(\cdot) \circ [t_{ij}(-\widehat{\alpha\beta}) \circ t_{ij}(\cdot)] \circ t_{ir}(-\widehat{\alpha}) \circ \\ &\circ t_{rj}(-\widehat{\beta}) = d_r(\cdot) \circ [t_{ir}(\cdot) \circ t_{ij}(-\widehat{\alpha\beta})] \circ t_{ir}(-\widehat{\alpha}) \circ t_{rj}(-\widehat{\beta}) = d_r(\cdot) \circ t_{ij}(-\widehat{\alpha\beta}) \circ [t_{ir}(\cdot) \circ \\ &\circ t_{ir}(-\widehat{\alpha})] \circ t_{rj}(-\widehat{\beta}) = d_r(\cdot) \circ t_{ij}(-\widehat{\alpha\beta}) \circ t_{ir}(-\widehat{\alpha}) \circ t_{rj}(-\widehat{\beta}) = \\ &= d_r(\cdot) \circ t_{ij}(-\widehat{\alpha^*\beta^*}) \circ t_{ir}(\widehat{\alpha^*}) \circ t_{rj}(\widehat{\beta^*}). \end{aligned}$$

Формальная замена β^* , α^* на β , α соответственно приводит к (7).

Выход разложения (8). Рассмотрим сначала случай, когда (is) определена формулой ($i < s$). Применяя здесь соотношение 2, изучаемое слово представим в виде

$$V = (is) \circ d_k(\varepsilon) = d_k(\varepsilon) \circ t_{si}(x) \circ t_{is}(y) \circ t_{si}(z). \quad (d_k)$$

Покажем, что равенство (d_k) возможно только при $yx \equiv yz \equiv -e_i$. Действительно, допустив $yx \neq -e_i$, для краткости приняв обозначение $d_i(*) \circ d_s(*) = d_{is}(*, *)$ и применяя (6), 2 и 3а), будем иметь $V = d_k(\varepsilon) \circ [t_{si}(x) \circ t_{is}(y)] \circ t_{si}(z) = d_k(\varepsilon) \circ d_{is}(*, *) \circ t_{is}(*) \circ [t_{si}(*) \circ t_{si}(z)] = d_k(\varepsilon) \circ d_{is}(*, *) \circ t_{is}(*) \circ t_{si}(*)$. В полученном выражении позиция $\langle s, s \rangle$ является некоторым элементом из Λ_s° . Это противоречит неквазиобратимости такой же позиции в V (ибо она в $(is) \circ d_k(\varepsilon)$ сравнима с $-e_s$). Если же в (d_k) допустить $yz \neq -e_i$, то применение 4, 2, 3а) дает представление $V = d_k(\varepsilon) \circ t_{si}(x) \circ [t_{is}(y) \circ t_{si}(z)] = d_k(\varepsilon) \circ d_{is}(*, *) \circ [t_{si}(*) \circ t_{si}(*)] \circ t_{is}(*) = d_k(\varepsilon) \circ d_{is}(*, *) \circ t_{si}(*) \circ t_{is}(*)$. Позиция $\langle i, i \rangle$ последнего выражения является квазиобратимой, когда в то же время она в V сравнима с $-e_i$. Полученное противоречие показывает, что не может быть и $yz \neq -e_i$. Итак, в (d_k) должно быть $yx \equiv yz \equiv -e_i$. Положив $t_{si}(x) \circ t_{is}(y) \circ t_{si}(z) = (is)$ в данном случае, приходим к разложению (8).

Справедливость (8) при $(is) = t_{is}(\chi) \circ t_{si}(\pi) \circ t_{is}(\mu)$ доказывается при помощи тех же 2, 3а), 4 и (6).

Выход разложения (10). Вывод этого разложения требует более глубоких комбинаторных рассуждений. Рассмотрим сначала случай, когда (is) определена формой $(i < s)$. Используя 3а), представим изучаемое слово в виде $V = (is) \circ t_{si}(\pi) \circ t_{is}(\chi) \circ [t_{si}(\eta) \circ t_{si}(\alpha)] = t_{si}(\pi) \circ t_{is}(\chi) \circ t_{si}(a)$. Если в полученной записи $a \equiv \pi$, то $t_{si}(\pi) \circ t_{is}(\chi) \circ t_{si}(a) = (is)$ и представление (10) имеет место (очевидно, здесь $d_i(*) = d_s(*) = t_{si}(*) = 0$). Если же $a \not\equiv \pi$, то, применяя 4, 2 и 3а), будем иметь $V = t_{si}(\pi) \circ [t_{is}(\chi) \circ t_{si}(a)] = d_{is}(*, *) \circ [t_{si}(*) \circ t_{si}(*)] \circ t_{is}(*) = d_{is}(*, *) \circ t_{si}(*) \circ t_{is}(*)$, т. е. (10) имеет место и в этом случае.

Пусть теперь (is) определена формой $(s > i)$, т. е.

$$V = (is) \circ t_{si}(\alpha) = t_{is}(\chi) \circ t_{si}(\pi) \circ t_{is}(\mu) \circ t_{si}(\alpha). \quad (17)$$

Разберем сначала случай, когда $\mu\alpha \not\equiv -e_i$. Здесь, используя 4, 2 и 3а), имеем

$$V = t_{is}(\chi) \circ t_{si}(\pi) \circ [t_{is}(\mu) \circ t_{si}(\alpha)] = d_{is}(*, *) \circ t_{is}(*) \circ [t_{si}(*) \circ t_{si}(*)] \circ t_{is}(z) = d_{is}(*, *) \circ t_{is}(x) \circ t_{si}(y) \circ t_{is}(z).$$

Если в этой записи $yx \equiv yz \equiv -e_s$, то $V = d_{is}(*, *) \circ (is)$ (здесь $t_{si}(*) = 0$) и (10) справедливо. Пусть $yz \not\equiv -e_s$. Тогда применение (6), 2, 1 и 3а) дает $V = d_{is}(*, *) \circ t_{is}(x) \circ [t_{si}(y) \circ t_{is}(z)] = [d_{is}(*, *) \circ d_{is}(*, *)] \circ [t_{is}(*) \circ t_{is}(*)] \circ t_{si}(b) = d_{is}(*, *) \circ t_{is}(a) \circ t_{si}(b)$. Если здесь $ab \not\equiv -e_i$, то, используя 4, 2 и 1, будем иметь $V = d_{is}(*, *) \circ t_{si}(*) \circ t_{is}(*)$. При $ab \equiv -e_i$ требуемую форму получаем так: $V = d_{is}(*, *) \circ t_{si}(b^*) \circ [t_{si}(b) \circ t_{is}(a) \circ t_{si}(b)] = d_{is}(*, *) \circ t_{si}(b^*) \circ (is)$ (использовано 3а)). А если $yz \equiv -e_s$ (но $yx \not\equiv -e_s$), то, применяя 4, 1 и 3а), имеем $V = d_{is}(*, *) \circ [t_{is}(x) \circ t_{si}(y)] \circ t_{is}(z) = d_{is}(*, *) \circ t_{si}(*) \circ [t_{is}(*) \circ t_{is}(z)] = d_{is}(*, *) \circ t_{si}(*) \circ t_{is}(*)$ (что также является требуемой формой).

Разберем теперь случай, когда в (17) $\mu\alpha \equiv -e_i$. Будем различать следующие подслучаи: $|\overline{\Lambda}_i| \geq 3$ и $|\overline{\Lambda}_i| = 2$. Пусть сначала $|\overline{\Lambda}_i| \geq 3$. Очевидно, найдется элемент $\beta \in \Lambda_{r(s), r(i)}$, для которого $\beta \not\equiv 0, \pi$. Применяя соотношения 3а), (6), 2, 1 (и учитывая, что $\gamma \not\equiv 0$, элемент γ определяется на соответствующем месте), имеем

$$\begin{aligned} V &= t_{si}(\beta^*) \circ [t_{si}(\beta) \circ t_{is}(\chi)] \circ t_{si}(\pi) \circ t_{is}(\mu) \circ t_{si}(\alpha) = d_{is}(*, *) \circ t_{si}(*) \circ t_{is}(*) \circ [t_{si}(\gamma) \circ \\ &\quad \circ t_{si}(\pi)] \circ t_{is}(\mu) \circ t_{si}(\alpha) = d_{is}(*, *) \circ t_{si}(*) \circ t_{is}(*) \circ [t_{si}(\overbrace{\gamma + \pi}) \circ t_{is}(\mu)] \circ t_{si}(\alpha) = d_{is}(*, *) \circ \\ &\quad \circ t_{si}(*) \circ [t_{is}(*) \circ t_{is}(*)] \circ [t_{si}(*) \circ t_{si}(\alpha)] = d_{is}(*, *) \circ t_{si}(a) \circ t_{is}(b) \circ t_{si}(c). \end{aligned}$$

Если в полученной записи $bc \not\equiv -e_i$, то дальнейшее применение 4, 2, 1 и 3а) дает $V = d_{is}(*, *) \circ t_{si}(a) \circ [t_{is}(b) \circ t_{si}(c)] = d_{is}(*, *) \circ [t_{si}(*) \circ t_{si}(*)] \circ t_{is}(*) = d_{is}(*, *) \circ t_{si}(*) \circ t_{is}(*)$. В противном случае, используя 3а) (и обозначение $(i < s)$), будем иметь $V = d_{is}(*, *) \circ [t_{si}(a) \circ t_{si}(c^*)] \circ [t_{si}(c) \circ t_{is}(b) \circ t_{si}(c)] = d_{is}(*, *) \circ t_{si}(*) \circ (is)$.

Пусть теперь $|\overline{\Lambda}_i| = 2$. Применяя 3а), 4, 2, (6), 1 и 6, выполняем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} V &= t_{is}(\chi) \circ t_{si}(\pi) \circ [t_{is}(\mu) \circ t_{si}(\cdot)] \circ t_{si}(e_{si}) = d_{is}(\cdot, \cdot) \circ t_{is}(\overbrace{e_{si}}) \circ [t_{si}(\overbrace{e_{si}}) \circ t_{si}(\cdot)] \circ t_{is}(\overbrace{e_{si}}) \circ \\ &\quad \circ t_{si}(e_{si}) = d_{is}(\cdot, \cdot) \circ t_{is}(\overbrace{e_{si}}) \circ [t_{si}(\overbrace{e_{si}}) \circ t_{is}(\cdot)] \circ t_{is}(e_{is}) \circ t_{si}(e_{si}) = d_{is}(\cdot, \cdot) \circ [t_{is}(\overbrace{e_{si}}) \circ t_{is}(\cdot)] \circ \\ &\quad \circ t_{si}(\overbrace{e_{si}}) \circ t_{is}(e_{is}) \circ t_{si}(e_{si}) = d_{is}(\cdot, \cdot) \circ [t_{is}(\overbrace{e_{si}}) \circ t_{si}(\cdot)] \circ t_{si}(e_{si}) \circ t_{is}(e_{is}) \circ t_{si}(e_{si}) = d_{is}(\cdot, \cdot) \circ \\ &\quad \circ t_{si}(\cdot) \circ t_{is}(\overbrace{e_{si}}) \circ t_{si}(e_{si}) \circ t_{is}(e_{is}) \circ t_{si}(e_{si}) = d_{is}(\cdot, \cdot) \circ t_{si}(\cdot) \circ t_{is}(\cdot) \circ [t_{is}(e_{is}) \circ t_{si}(e_{si}) \circ t_{is}(e_{is}) \circ \\ &\quad \circ t_{si}(e_{si})] = [d_{is}(\cdot, \cdot) \circ d_{is}(\cdot, \cdot)] \circ t_{si}(\cdot) \circ [t_{is}(\cdot) \circ t_{si}(\overbrace{e_{si}})] \circ t_{is}(\overbrace{e_{si}}) = d_{is}(\cdot, \cdot) \circ [t_{si}(\cdot) \circ t_{si}(\overbrace{e_{si}})] \circ \\ &\quad \circ [t_{is}(\cdot) \circ t_{is}(\overbrace{e_{si}})] = d_{is}(\cdot, \cdot) \circ t_{si}(\overbrace{e_{si}}) \circ t_{is}(\overbrace{e_{si}}), \end{aligned}$$

т. е. получаем одну из требуемых форм. Итак, во всех имеющихся случаях разложение вида (10) действительно имеет место.

Вывод разложения (13). Если (is) имеет вид $(s > i)$, то в нужных местах, используя соотношения (7), 2, 1, 3c), 3a), (16) и 3d), имеем

$$\begin{aligned}
 (is) \circ t_{ji}(\alpha) &= t_{is}(\pi) \circ t_{si}(\chi) \circ [t_{is}(\widehat{\pi}) \circ t_{ji}(\alpha)] = d_i(\cdot) \circ t_{is}(\widehat{\pi}) \circ [t_{si}(\widehat{\chi}) \circ t_{js}(-\widehat{\alpha\pi})] \circ t_{ji}(\widehat{\alpha}) \circ \\
 \circ t_{is}(\widehat{\pi}) &= d_i(\cdot) \circ d_s(\cdot) \circ t_{is}(\widehat{\pi}) \circ t_{ji}(\widehat{\alpha\pi\chi}) \circ t_{js}(-\widehat{\alpha\pi}) \circ [t_{si}(\widehat{\chi}) \circ t_{ji}(\widehat{\alpha})] \circ t_{is}(\widehat{\pi}) = d_{is}(\cdot, \cdot) \circ t_{is}(\widehat{\pi}) \circ \\
 \circ [t_{ji}(-\widehat{\alpha}) \circ t_{js}(-\widehat{\alpha\pi})] \circ t_{ji}(\widehat{\alpha}) \circ t_{si}(\widehat{\chi}) \circ t_{is}(\widehat{\pi}) &= d_{is}(\cdot, \cdot) \circ t_{is}(\widehat{\pi}) \circ t_{ji}(\cdot) \circ [t_{js}(-\widehat{\alpha\pi}) \circ t_{js}(\cdot)] \circ \\
 \circ [t_{ji}(-\widehat{\alpha}) \circ t_{ji}(\widehat{\alpha})] \circ t_{si}(\widehat{\chi}) \circ t_{is}(\widehat{\pi}) &= d_{is}(\cdot, \cdot) \circ t_{is}(\widehat{\pi}) \circ [t_{ji}(\cdot) \circ t_{js}(-\widehat{\alpha\pi})] \circ t_{ji}(\cdot) \circ t_{si}(\widehat{\chi}) \circ t_{is}(\widehat{\pi}) = \\
 = d_{is}(\cdot, \cdot) \circ [t_{is}(\widehat{\pi}) \circ t_{js}(-\widehat{\alpha\pi})] \circ [t_{ji}(\cdot) \circ t_{ji}(\cdot)] \circ t_{si}(\widehat{\chi}) \circ t_{is}(\widehat{\pi}) &= d_{is}(\cdot, \cdot) \circ t_{js}(-\widehat{\alpha\pi}) \circ [t_{is}(\widehat{\pi}) \circ \\
 \circ t_{ji}(\cdot)] \circ t_{si}(\widehat{\chi}) \circ t_{is}(\widehat{\pi}) &= d_{is}(\cdot, \cdot) \circ [t_{js}(-\widehat{\alpha\pi}) \circ t_{js}(\cdot)] \circ t_{ji}(\cdot) \circ [t_{is}(\widehat{\pi}) \circ t_{si}(\widehat{\chi}) \circ t_{is}(\widehat{\pi})] = \\
 = d_{is}(\cdot, \cdot) \circ t_{js}(-\widehat{\alpha\pi}) \circ t_{ji}(\cdot) \circ (is),
 \end{aligned}$$

т. е. будем иметь требуемую форму. Случай, когда (is) определена как $(i < s)$, проверяется при помощи тех же соотношений (7), 2, 1, 3c), 3a), (16) и 3d).

Литература

- Сатаров Ж.С. *Образующие элементы и определяющие соотношения в линейных группах:* Автореф. дисс. ... докт. физ.-матем. наук. – Красноярск, 1998.
- Романовский Н.С. *Образующие и определяющие соотношения полной линейной группы над локальными кольцами* // Сиб. матем. журн. – 1971. – Т. 12. – № 4. – С. 922–925.
- Сатаров Ж.С. *Определяющие соотношения обобщенных ортогональных групп над коммутативными локальными кольцами без единицы* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 6. – С. 24–32.
- Мельников О.В., Ремесленников В.Н., Романьков В.А. и др. *Общая алгебра*. – М.: Наука, 1990. – 591 с.
- Сатаров Ж.С. *Образующие элементы и определяющие соотношения в линейных группах:* Дисс. ... докт. физ.-матем. наук. – Ош, 1998.

Ошский технологический
университет

Поступила
08.12.2003