ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 1 (500)

УДК 517.977

А.В. АРГУЧИНЦЕВ

ОПТИМИЗАЦИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ГРАНИЧНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ

Введение

В работе рассматриваются задачи оптимального управления начально-краевыми условиями гиперболических систем первого порядка в классе гладких управляющих воздействий. К исследуемым системам сводятся классическое гиперболическое уравнение второго порядка, системы типа Гурса–Дарбу и канонические гиперболические системы первого порядка с ортогональными системами характеристик. В [1] были получены необходимые условия оптимальности гладких граничных и стартовых управлений, удовлетворяющих поточечным или интегральным ограничениям. В данной статье предложен численный метод решения задач оптимизации граничных и стартовых управлений при наличии интегральных ограничений на управляющие воздействия. Исследованы две прикладные задачи: задача оптимального управления популяцией, распределенной по возрасту, и обратная задача восстановления профиля гравитационной волны при дополнительном интегральном ограничении, вытекающем из закона сохранения массы.

1. Постановка задачи и необходимое условие оптимальности

В прямоугольнике $P = S \times T$, $S = [s_0, s_k]$, $T = [t_0, t_k]$, рассмотрим систему полулинейных гиперболических уравнений

$$\frac{\partial x}{\partial t} + A(s,t)\frac{\partial x}{\partial s} = f(x,s,t), \quad s \in S, \quad t \in T. \tag{1}$$

Здесь $x = x(s,t)$ — n-мерная вектор-функция. Предполагаем, что система (1) записана в инвариантном виде, т.е. матрица $A(s,t)$ диагональная ([2], с. 25–28).

Дополнительно введем предположение, что диагональные элементы $a_i = a_i(s,t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, матрицы коэффициентов знакопостоянны в P:

$$\begin{aligned} &a_i(s,t) > 0, \ \ i = 1, 2, \dots, m_1;\\ &a_i(s,t) = 0, \ \ i = m_1+1, m_1+2, \dots, m_2;\\ &a_i(s,t) < 0, \ \ i = m_2+1, m_2+2, \dots, n. \end{aligned}$$

Составим две диагональные подматрицы: $A^+(s,t)$ размерности $m_1 \times m_1$ и $A^-(s,t)$ размерности $(n-m_2)\times(n-m_2)$ из положительных и отрицательных диагональных элементов матрицы A соответственно. Из вектора состояния $x = x(s,t)$ выделим два подвектора, соответствующих положительным и отрицательным диагональным элементам матрицы A:

$$x^+ = (x_1, x_2, \dots, x_{m_1}), \quad x^- = (x_{m_2+1}, x_{m_2+2}, \dots, x_n).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Российской Федерации, грант № Е02-1.0-60, Российского фонда фундаментальных исследований, гранты №№ 02-01-00243, 02-01-81001, и программы "Университеты России" (проект № УР.03.01.008).

Рассмотрим управляемые начально-краевые условия для системы (1)

$$
\begin{aligned}
x(s,t_0) &= p(u(s),s), \quad s\in S;\\
x^+(s_0,t) &= M(t)x^-(s_0,t)+g^{(1)}(u^{(1)}(t),t);\\
x^-(s_k,t) &= N(t)x^+(s_k,t)+g^{(2)}(u^{(2)}(t),t), \quad t\in T.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Здесь $M(t)$, $N(t)$ — прямоугольные матрицы размерности соответственно $m_1\times(n-m_2)$ и $(n-m_2)\times m_1$. Управляющие воздействия $u=u(s)$, $u^{(1)}=u^{(1)}(t)$, $u^{(2)}=u^{(2)}(t)$ являются вектор-функциями, удовлетворяющими интегральным ограничениям типа равенства

$$
\begin{aligned}
\int_S \Phi_j(u(s))ds &= L_j, \qquad j=1,2,\dots,k;\\
\int_T \Phi_\alpha^{(1)}(u^{(1)}(t))dt &= L_\alpha^{(1)}, \quad \alpha=1,2,\dots,k_1;\\
\int_T \Phi_\beta^{(2)}(u^{(2)}(t))dt &= L_\beta^{(2)}, \quad \beta=1,2,\dots,k_2.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Предполагается, что для подинтегральных функций в (3) выполнены условия однородности

$$
\Phi_j(\lambda u)=\lambda^\gamma\Phi_j(u), \quad \Phi_\alpha^{(1)}(\lambda u)=\lambda^{\gamma_1}\Phi_\alpha^{(1)}(u), \quad \Phi_\beta^{(2)}(\lambda u)=\lambda^{\gamma_2}\Phi_\beta^{(2)}(u),
$$
$$
\lambda>0, \quad \gamma>0, \quad \gamma_1>0, \quad \gamma_2>0.
$$

Цель задачи состоит в минимизации функционала

$$
J(u)=\int\limits_S \varphi(x(s,t_k),s)ds+\iint\limits_P F(x,s,t)ds\,dt. \tag{4}
$$

Задача оптимального управления (1)–(4) рассматривается при следующих предположениях:

1) диагональные элементы $a_i=a_i(s,t)$, $i=1,2,\dots,n$, матрицы A непрерывно дифференцируемы в P;

2) вектор-функции $p(u,s)$, $g^{(1)}(u^{(1)},t)$, $g^{(2)}(u^{(2)},t)$ непрерывно дифференцируемы по своим аргументам и имеют ограниченные производные по u, $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ соответственно;

3) вектор-функция $f=f(x,s,t)$ и скалярные функции $F=F(x,s,t)$, $\varphi=\varphi(x,s)$ непрерывны по совокупности своих аргументов и имеют непрерывные и ограниченные частные производные по компонентам вектора состояния;

4) элементы матриц $M(t)$, $N(t)$ непрерывны на T;

5) управления $u=u(s)$, $u^{(1)}=u^{(1)}(t)$ и $u^{(2)}=u^{(2)}(t)$ непрерывно дифференцируемы соответственно на отрезках S и T.

Решение начально-краевой задачи (1), (2) понимается в обобщенном смысле, а именно как решение интегральной системы, построенной на характеристиках исходной гиперболической системы. Сделанные предположения гарантируют существование и единственность лишь кусочно-непрерывного решения начально-краевой задачи (1), (2). При этом компоненты вектор-функции состояния будут дифференцируемы вдоль соответствующих характеристик гиперболической системы ([2], с. 53–59; [3], с. 467–469).

Особенностью исследуемой задачи оптимального управления является гладкость управляющих воздействий. В [1] установлено необходимое условие оптимальности гладких стартовых управлений, удовлетворяющих интегральным ограничениям в форме неравенств. Сформулируем аналогичное утверждение для задачи (1)–(4).

Теорема 1. *Пусть процесс $\{u,u^{(1)},u^{(2)};x\}$ является оптимальным в задаче* (1)–(4). *Тогда всюду на отрезке S выполняется условие*

$$
\langle h_u,\dot u(s)\rangle-\frac{1}{\gamma}\langle h_u,u\rangle_s=0, \quad s\in S, \tag{5}
$$

а всюду на отрезке T справедливы следующие равенства:

$$\langle h^{(1)}_{u^{(1)}}, \dot u^{(1)}(t)\rangle - \frac{1}{\gamma_1}\langle h^{(1)}_{u^{(1)}}, u^{(1)}\rangle_t = 0,$$
$$\langle h^{(2)}_{u^{(2)}}, \dot u^{(2)}(t)\rangle - \frac{1}{\gamma_2}\langle h^{(2)}_{u^{(2)}}, u^{(2)}\rangle_t = 0, \quad t \in T. \tag{6}$$

Здесь $\langle\ ,\ \rangle$ — обозначение скалярного произведения в соответствующем конечномерном пространстве,

$$h(u,s) = \langle \psi(s,t_0), p(u,s)\rangle,$$
$$h^{(1)}(u^{(1)},t) = \langle A^+\psi^+(s_0,t), g^{(1)}(u^{(1)},t)\rangle,$$
$$h^{(2)}(u^{(2)},t) = \langle A^-\psi^-(s_k,t), g^{(2)}(u^{(2)},t)\rangle.$$

Функция $\psi = \psi(s,t)$ удовлетворяет сопряженной задаче

$$\psi_t + (A\psi)_s = F_x(x,s,t) - f_x(x,s,t)\psi, \quad (s,t)\in P;$$
$$\psi(s,t_k) = -\varphi_x(x(s,t_k),s), \quad s \in S;$$
$$\psi^+(s_k,t) = N_1(t)\psi^-(s_k,t), \quad \psi^-(s_0,t) = M_1(t)\psi^+(s_0,t), \quad t\in T;$$
$$N_1(t) = -(A^+(s_k,t))^{-1}N^T(t)A^-(s_k,t);$$
$$M_1(t) = -(A^-(s_0,t))^{-1}M^T(t)A^+(s_0,t).$$

Доказательство теоремы для случая стартового управления $u(s)$ было проведено в [1]. Идея доказательства основана на применении нестандартной вариации, сохраняющей гладкость управления

$$\Delta u(s) = \lambda(s)\, u(s+\varepsilon\,\delta(s)) - u(s).$$

Здесь ε — параметр, характеризующий малость вариации, $\delta(s)$ — непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям

$$s_0 \le s + \delta(s) \le s_k, \quad |\dot\delta(s)| \le 1, \quad s \in S;$$
$$\delta(s_0) = \delta(s_k) = 0.$$

Выбор множителя $\lambda(s) = (1+\varepsilon\dot\delta(s))^{1/\gamma}$ обеспечивает допустимость функции $u_\varepsilon(s) = u(s) + \Delta u(s)$ для любого значения $\varepsilon \in [0,1]$. Условие $|\dot\delta(s)| \le 1$ существенно для сходимости ряда

$$(1+\varepsilon\dot\delta(s))^{1/\gamma} = 1 + \frac{1}{\gamma}\varepsilon\dot\delta(s) + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)\cdot\ \ldots\ \cdot\left(\frac{1}{\gamma}-n+1\right)\varepsilon^n\dot\delta^n(s) + \cdots \tag{7}$$

при доказательстве теоремы 1. В статье [1] приведена также общая схема улучшения управления, основанная на доказанном условии оптимальности.

Основная цель данной работы — применение изложенного выше результата для исследования одной из задач оптимального управления популяцией и обратной задачи восстановления профиля гравитационной волны.

Прежде всего сделаем замечание относительно одного частного случая ограничений (3).

Замечание. Если в интегральные ограничения управления входят линейно ($\gamma{=}\gamma_1{=}\gamma_2{=}1$), то условия (5), (6) запишутся в более простой форме

$$\langle h_{us}, u(s)\rangle = 0, \quad s \in S;$$
$$\langle h^{(1)}_{u^{(1)}t}, u^{(1)}(t)\rangle = 0, \quad \langle h^{(2)}_{u^{(2)}t}, u^{(2)}(t)\rangle = 0, \quad t\in T.$$

При этом нет необходимости производить разложение (7), а значит, и требовать выполнения условия вида $|\dot\delta(s)| \le 1$.

2. Задача оптимального управления возрастным распределением рожающих особей

На некотором отрезке времени $T = [0, t_k]$ рассмотрим функцию $x = x(s,t)$, характеризующую плотность распределения популяции некоторого вида в зависимости от возраста $s \in S = [0, s_k]$, s_k — максимальная продолжительность жизни. Предполагая, что изменение численности популяции может происходить только за счет рождения и смерти ее членов, а число умерших особей пропорционально общей численности популяции, приходим к следующей начально-краевой задаче [4]–[6]:

$$\begin{gathered} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial s} = -\mu(s)x, \quad s \in S, \quad t \in T; \\ x(s,0) = x_0(s), \quad s \in S; \\ x(0,t) = \beta(t) \int_{s_1}^{s_2} K(s)u(s)x(s,t)ds, \quad t \in T. \end{gathered} \tag{8}$$

Здесь $\mu(s)$ — коэффициент смертности; $x_0(s)$ — первоначальное распределение популяции по возрасту; $\beta(t)$ — коэффициент, характеризующий средний уровень рождаемости в каждый момент времени; $K(s)$ — доля самок. Роль управления играет функция $u = u(s)$, задающая возрастное распределение рожающих особей. Эта функция удовлетворяет следующим ограничениям:

$$\int_{s_1}^{s_2} u(s)ds = 1, \quad u(s) \geq 0, \quad u(s_1) = u(s_2) = 0, \tag{9}$$

где s_1, s_2 — границы детородного возраста, $0 < s_1 < s_2 \leq s_k$.

Целью задачи будем считать минимизацию функционала

$$J(u) = \int_S \varphi(x(s,t_k), s)\, ds. \tag{10}$$

В частности, если

$$\varphi(x,s) = \frac{1}{2}(x(s,t_k) - \overline{x}(s))^2,$$

где $\overline{x}(s)$ — заданная функция, то цель управления состоит в достижении в конечный момент времени заданной плотности $\overline{x}$.

Задача (8)–(10) исследуется при следующих предположениях на ее параметры:

1) функции $u = u(s)$, $K = K(s)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[s_1, s_2]$; в дальнейшем удобно считать, что $u(s) \equiv 0$, $s \notin [s_1, s_2]$;

2) функции $x_0 = x_0(s)$ и $\beta = \beta(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезках S и T соответственно;

3) функция $\varphi = \varphi(x,s)$ непрерывна по совокупности своих аргументов и имеет непрерывные и ограниченные производные по x на $E^1 \times S$;

4) функция $\mu = \mu(s)$ непрерывна на полуинтервале $[0, s_k)$ и удовлетворяет условию

$$\int_0^{s_k} \mu(s)ds = +\infty.$$

Последнее условие обеспечивает нулевую плотность при возрасте особей, превышающем максимальный возраст s_k [5], [6].

Решение начально-краевой задачи (8), вообще говоря, нужно понимать как решение интегрального уравнения, построенного на семействе характеристик исходного дифференциального уравнения. При сделанных предположениях для любого допустимого управления решение начально-краевой задачи (8) будет являться неотрицательной функцией, гладкой в областях $s < t$ и $s > t$.

Сформулируем необходимое условие оптимальности в описанной задаче.

Теорема 2. *Пусть $u^* = u^*(s)$ — оптимальное управление в задаче (8)–(10), $x^* = x^*(s,t)$ — соответствующее ему состояние. Тогда для всех точек $s \in [s_1, s_2]$ выполняется равенство*

$$u^*(s) \int_T \psi^*(0,t)\beta(t) \left[K(s)x^*(s,t)\right]_s \, dt = 0, \tag{11}$$

где $\psi^* = \psi^*(s,t)$ — решение следующей сопряженной задачи при $u = u^*(s)$, $x = x^*(s,t)$:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial s} = \mu(s)\psi - \psi(0,t)\beta(t)K(s)u(s), \quad s \in S, \quad t \in T; \\
\psi(s,t_k) = -\frac{\partial \varphi(x(s,t_k),s)}{\partial x}, \quad s \in S; \\
\psi(s_k,t) = 0, \quad t \in T.
\end{gathered} \tag{12}$$

Данная теорема не является прямым следствием теоремы 1 в силу нестандартности краевых условий в задаче (8). Однако доказательство проводится тем же способом, основанным на анализе формулы приращения целевого функционала, который был применен в [1].

Необходимое условие оптимальности (11) служит основой для построения численных алгоритмов решения задачи. Перейдем к описанию общей схемы метода.

Пусть задано начальное приближение $u^0 = u^0(s)$ и с помощью метода вычислено $u^i = u^i(s)$, $i = 1, 2\ldots$ Для этого управления вычисляются решения $x^i = x^i(s,t)$, $\psi^i = \psi^i(s,t)$ исходной и сопряженной задач (8) и (12).

Строится функция

$$\omega_i(s) = u^i(s) \int_T \psi^i(0,t)\beta(t)[K(s)x^i(s,t)]_s \, dt.$$

Если $\omega_i(s) \equiv 0$, $s \in [s_1, s_2]$, то найденное решение удовлетворяет условию оптимальности, и метод прекращает свою работу. В противном случае выделим области

$$\Omega_i^+ = \{s \in [s_1,s_2] : \ \omega_i(s) > 0\},$$
$$\Omega_i^- = \{s \in [s_1,s_2] : \ \omega_i(s) < 0\}.$$

Определим допустимую функцию

$$\delta_i(s) = \begin{cases} \alpha_i(s) > 0, & s \in \Omega_i^+; \\ \beta_i(s) < 0, & s \in \Omega_i^-; \\ 0, & s \notin \Omega_i^+ \cup \Omega_i^-. \end{cases}$$

Построим однопараметрическое семейство управлений

$$u^i_\varepsilon(s) = (1 + \varepsilon\dot{\delta}_i(s))u^i(s + \varepsilon\delta_i(s)).$$

Найдем ε_i из условия

$$J(u^i_\varepsilon) \to \min, \quad \varepsilon \in [0,1].$$

Тогда следующее приближение строится по формуле

$$u^{i+1}(s) = u^i_{\varepsilon_i}(s).$$

При дополнительных предположениях о гладкости параметров задачи и ограниченности снизу целевого функционала на множестве допустимых процессов [1] метод генерирует релаксационную последовательность управлений ($J(u^{i+1}) < J(u^i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$), сходящуюся в смысле

$$\int_{s_1}^{s_2} \delta_i(s)\omega_i(s) ds \to 0, \quad i \to \infty.$$

Конкретные варианты алгоритмов отличаются конструктивными методами построения функций $\delta_i(s)$.

Проведена серия тестовых расчетов для задачи с квадратичным критерием качества. Для численного решения начально-краевой задачи (8) использовалась характеристическая разностная сетка. Приведенные ниже результаты получены для следующих значений параметров:

$$s_k = 5, \quad t_k = 5, \quad s_1 = 1, \quad s_2 = 4;$$
$$\overline{x}(s) = \exp\left(5 - s - \frac{1}{5-s}\right), \quad x_0(s) = \exp\left(-s - \frac{1}{5-s}\right),$$
$$\mu(s) = \frac{1}{(5-s)^2}, \quad K(s) = s\exp\left(s + \frac{1}{5-s}\right),$$
$$\beta(t) = \frac{1}{2}\exp(-0.2).$$

Функции $\delta_i(s)$ строились по правилу

$$\delta_i(s) = \frac{\xi_i(s)}{M_i},$$
$$\xi_i(s) = \frac{(s-s_0)(s_1-s)}{(s_1-s_0)} \cdot \frac{\omega_i(s)}{\max\limits_{s\in[s_1,s_2]}|\omega_i(s)|},$$
$$M_i = \max_{s\in[s_1,s_2]}|\dot{\xi}_i(s)|.$$

Такой выбор функций гарантирует выполнение на каждой итерации ограничений (9).

Итерация i	$J(\widetilde{u}^l)$	$J(\widehat{u}^l)$	$J(\breve{u}^l)$
0	$2.827\cdot10^7$	$1.143\cdot10^4$	$1.329\cdot10^3$
1	$2.605\cdot10^1$	$2.315\cdot10^3$	$2.236\cdot10^2$
2	$2.16\cdot10^{-7}$	$2.646\cdot10^2$	$1.052\cdot10^2$
3		$2.26\cdot10^{-7}$	$4.593\cdot10^1$
6			$2.19\cdot10^{-7}$

В таблице приведены значения целевого функционала на соответствующих итерациях для трех различных начальных приближений:

$$\widetilde{u}^0(s) = \frac{1}{3}, \quad \widehat{u}^0(s) = \frac{2}{9}(s-1), \quad \breve{u}^0(s) = \frac{1}{3}(\sin 2\pi s + 1).$$

3. Восстановление начального профиля гравитационной волны

В качестве второго примера рассмотрим обратную задачу восстановления профиля гравитационной волны.

Предполагаем, что процесс распространения гравитационных волн описывается уравнениями линеаризованной теории "мелкой воды" ([2], с. 569–572)

$$\eta_t + b_0(s)v_s = -\dot{b}_0(s)v, \quad v_t + g\eta_s = 0;$$
$$\eta(s,t_0) = u(s), \quad v(s,t_0) = q(s).$$

Здесь $\eta(s,t)$ — профиль волны, $v(s,t)$ — массовая скорость частицы воды, $b_0(s)$ — профиль дна, $q(s)$ — известная функция, $t \in T = [t_0, t_k]$, $s \in S = [s_0, s_k]$. Неизвестное управление $u(s)$ — начальный профиль волны.

Предположим, что в конечный момент времени известен профиль волны — функция $\overline{\eta}(s)$, $s \in S$. Тогда данная обратная задача математической физики может быть интерпретирована как задача минимизации функционала

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_S (\eta(u,s,t_k) - \overline{\eta}(s))^2 ds.$$

Приведем модель "мелкой воды" к инвариантной форме

$$x_{1t} + \sqrt{gb_0(s)}x_{1s} = -a(s)(x_1 - x_2), \quad x_{2t} - \sqrt{gb_0(s)}x_{2s} = -a(s)(x_1 - x_2), \tag{13}$$

$$x_1(s,t_0) = \sqrt{g}u(s) + \sqrt{b_0(s)}q(s), \;\; x_2(s,t_0) = \sqrt{g}u(s) - \sqrt{b_0(s)}q(s), \;\; x_1(s_0,t) = x_2(s_k,t) = 0.$$

Здесь

$$x_1(s,t) = \sqrt{g}\eta(s,t) + \sqrt{b_0(s)}v(s,t), \quad x_2(s,t) = \sqrt{g}\eta(s,t) - \sqrt{b_0(s)}v(s,t),$$

$$a(s) = \frac{\sqrt{g}\dot{h}_0(s)}{4\sqrt{b_0(s)}}.$$

Тогда

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_S \left(\frac{x_1(s,t_k) + x_2(s,t_k)}{2\sqrt{g}} - \overline{\eta}(s)\right)^2 ds. \tag{14}$$

В отличие от [1] задачу рассмотрим при дополнительном интегральном ограничении

$$\int_S u(s)ds = \int_S \overline{\eta}(s)ds = \text{const}. \tag{15}$$

С физической точки зрения ограничение (15) представляет собой закон сохранения массы. Оно может быть получено путем интегрирования по прямоугольнику $P = S \times T$ суммы уравнений (13).

Задача (13)–(15) — это задача оптимального управления вида (1)–(4). Необходимое условие оптимальности (5) имеет вид

$$(\psi_{1s}(s,t_0) + \psi_{2s}(s,t_0))u(s) = 0, \quad s \in S,$$

где $\psi(s,t)$ – решение сопряженной задачи

$$\psi_{1t} + \sqrt{gb_0(s)}\psi_{1s} = -a(s)(\psi_1(s,t) - \psi_2(s,t));$$

$$\psi_{2t} - \sqrt{gb_0(s)}\psi_{2s} = -a(s)(\psi_1(s,t) - \psi_2(s,t));$$

$$\psi_1(s,t_k) = \psi_2(s,t_k) = \frac{1}{2\sqrt{g}}\left(\overline{\eta}(s) - \frac{x_1(s,t_k) + x_2(s,t_k)}{2\sqrt{g}}\right), \quad s \in S;$$

$$\psi_1(s_k,t) = \psi_2(s_0,t) = 0, \quad t \in T.$$

Задача (13)–(15) решалась с помощью метода, схема которого приведена в предыдущем разделе. В данном случае

$$\omega_i(s) = -({\psi_1}_s^i(s,t_0) + {\psi_2}_s^i(s,t_0))u^i(s), \quad s \in S.$$

Для интегрирования гиперболических уравнений был применен численный метод характеристик. Расчеты проводились при следующих входных данных: $t_0 = 0$, $t_k = 1$, $s_0 = -35$, $s_k = 100$, $b_0(s) = 100 - 0.02(s+40)(s-100)$, число слоев по времени при численном интегрировании гиперболических систем $N = 200$, границы неизвестного профиля волны в начальный момент времени $s_1 = 3.97033$, $s_2 = 62.5367$,

$$\delta_i(s) = \frac{(s-s_1)(s_2-s)\omega_i(s)}{(s_2-s_1)\max\limits_{s\in S}|\omega_i(s)|}.$$

В модельных расчетах заранее задавалось управление

$$u^*(s) = -6\sin\left(\frac{2\pi(s-s_1)}{s_2-s_1}\right)\cos\left(\pi + \frac{\pi(s-s_1)}{s_2-s_1}\right).$$

По этому управлению вычислялась функция $\overline{\eta}(s)$, необходимая для формирования целевого функционала (14) и интегрального ограничения (15). После этого управление $u^* = u^*(s)$, которое является оптимальным в исследуемой задаче, "забывалось" и проводилась реализация метода при различных начальных приближениях.

Результаты численных экспериментов показывают, что метод не так чувствителен к выбору начального приближения, как в случае амплитудных ограничений на управления [1], и хорошо улучшает управляющие воздействия, имеющие участки постоянства. В частности, для начального приближения $u^0(s) = 4\sin\left(\frac{\pi(s-s_1)}{s_2-s_1}\right)$ значение целевого функционала за 255 итераций уменьшилось с 73.2 до 0.2. При этом основное улучшение произошло за первые 20 итераций, а полученное на выходе управление близко по структуре к оптимальному. Практически аналогичный результат получен для начального управления, равного константе почти на всем отрезке $[s_1, s_2]$.

Литература

1. Аргучинцев А.В., Крутикова О.А. *Оптимизация полулинейных гиперболических систем с гладкими граничными управлениями* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 2. – С. 3–12.
2. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1978. – 686 с.
3. Курант Р. *Уравнения с частными производными.* – М.: Мир, 1964. – 830 с.
4. Блохинов Ю.В. *Качественное исследование модели динамики популяции, распределенной по возрасту и жизненности* // Моделиров. процессов экологич. разв. Вып. 2. – М.: ВНИИ системн. исследов., 1982. – С. 64–69.
5. Chan W.L., Guo B.Z. *Optimal birth control of population dynamics* // J. Math. Anal. Appl. – 1989.– V. 144. – № 2. – P. 532–552.
6. Chan W.L., Guo B.Z. *Overtaking optimal control problem of age-dependent populations with infinite horizon* // J. Math. Anal. Appl. – 1990. – V. 150. – № 1. – P. 41–53.

Иркутский государственный университет

Поступила 05.09.2003