ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 4 (467)

УДК 517.518

ВИТ. В. ВОЛЧКОВ

ЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА О ДВУХ РАДИУСАХ ДЛЯ $\mathcal{M}$-ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Введение

Пусть f — непрерывная функция на вещественном евклидовом пространстве R^n, $n \geq 2$, E — заданное множество положительных чисел. Предположим, что при всех $r \in E$ и $x \in R^n$

$$f(x) = \frac{1}{\omega r^n} \int_{|y| \leq r} f(x+y)dy, \tag{1}$$

где ω — объем единичного шара в R^n и $|\cdot|$ — евклидова норма в R^n. Для каких E отсюда следует, что f — гармоническая функция? Известная теорема Дельсарта о двух радиусах утверждает, что функция f гармоническая, если E состоит из двух чисел r_1 и r_2, отношение которых не является отношением корней целой функции $2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) \dot{J}_{n/2}(z)/z^{n/2}-1$ (см. [1], а также обзоры [2]–[4] с обширной библиографией). Примеры показывают (напр., [5]), что указанное условие для r_1/r_2 является необходимым.

Получение локального аналога теоремы Дельсарта (напр., в случае, когда функция с условием (1) задана в шаре $\mathcal{B}_R = \{x \in R_n : |x| < R\}$ радиуса $R > \max(r_1, r_2)$) является существенно более трудной задачей. Здесь возникают новые эффекты: наличие гармоничности во многом зависит не только от природы чисел r_1 и r_2, но и от размеров $\mathcal{B}_R$. Локальная теорема о двух радиусах при условии $R > r_1 + r_2$ получена различными методами в [6] и [7]. В [7] доказана также точность этого условия на размеры $\mathcal{B}_R$. Более того, дальнейшее развитие техники, предложенной в [7], позволило полностью изучить вопрос о гармоничности функции f с условием (1) и при всех $R \leq r_1 + r_2$ [5]. Большой интерес представляет обобщение этих результатов на некомпактные двухточечно-однородные пространства (в соответствии с их классификацией (напр., [8], с. 203) — это в точности евклидовы пространства, гиперболические пространства $H^n(R)$, $H^n(\mathbb{C})$, $H^n(\mathbb{H})$ и гиперболическое пространство Кэли $H^{16}(Cay)$). Первые результаты в этом направлении принадлежат К.А. Беренстейну и Л. Зальцману [9], которые распространили теорему Дельсарта на указанный класс пространств. За исключением евклидова случая локальный аналог этой теоремы был получен лишь для вещественного гиперболического пространства $H^n(R)$ ([10], теорема 8). В данной работе доказана локальная теорема о двух радиусах для гармонических функций на комплексном гиперболическом пространстве $H^n(\mathbb{C})$.

1. Формулировка основного результата

Пусть $\mathbb{C}^n$ — комплексное евклидово пространство размерности $n \geq 2$ с эрмитовым скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $B = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$, где $|z|^2 = \langle z, z \rangle$. Обозначим через $d(z, w)$ расстояние между точками $z, w \in B$ в метрике Бергмана, т. е.

$$d(z,w) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{|1-\langle w,z\rangle| + \sqrt{|w-z|^2 + |\langle w,z\rangle|^2 - |w|^2|z|^2}}{|1-\langle w,z\rangle| - \sqrt{|w-z|^2 + |\langle w,z\rangle|^2 - |w|^2|z|^2}}\right). \tag{2}$$

Как известно (напр., [11]), комплексное гиперболическое пространство $H^n(\mathbb{C})$ размерности n изометрично шару B с метрикой (2). Риманова мера на $H^n(\mathbb{C})$ имеет вид $d\mu(z) = dm(z)/(1-|z|^2)^{n+1}$, где dm — мера Лебега в $\mathbb{C}^n$. Оператор Лапласа–Бельтрами на $H^n(\mathbb{C})$ имеет вид ([11]; [12], с. 54)

$$\widetilde{\Delta} = 4(1-|z|^2)\sum_{i,j=1}^{n}(\delta_{ij} - z_i\overline{z}_j)\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \overline{z}_j},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Функция $f \in C^2(B)$ называется $\mathcal{M}$-гармонической в B, если $\widetilde{\Delta} f = 0$.

Пусть $\alpha, \beta \geq 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t) = F\left(\frac{\alpha+\beta+1-i\lambda}{2},\ \frac{\alpha+\beta+1+i\lambda}{2};\ \alpha+1;\ -(\operatorname{sh} t)^2\right)$, где F — гипергеометрическая функция. При фиксированном $r > 0$ обозначим через $M(r)$ множество корней λ функции $\eta_r(\lambda) = 1 - \operatorname{ch}^2 r \cdot \varphi_\lambda^{(n,1)}(r)$, лежащих в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$ и не принадлежащих отрицательной части мнимой оси $\{it,\ t<0\}$. Пусть также $M(r_1, r_2) = M(r_1) \cap M(r_2)$, $B_R = \{z \in B : d(z,0) < R\}$.

Основным результатом данной работы является

Теорема. *Пусть $r_1, r_2 > 0$, $R > \max(r_1, r_2)$, $f \in C(B_R)$ и*

$$f(z) = \frac{1}{\mu(B_{r_j})}\int_{d(z,w)\leq r_j} f(w)d\mu(w) \tag{3}$$

при всех $z \in B_{R-r_j}$, $j = 1, 2$. Тогда

1) *если $r_1 + r_2 < R$ и $M(r_1, r_2) = \{in\}$, то f $\mathcal{M}$-гармонична в B_R;*
2) *если $r_1 + r_2 > R$ или $M(r_1, r_2) \neq \{in\}$, то существует $f \in C^\infty(B_R)$ с условием (3), которая не является $\mathcal{M}$-гармонической в B_R.*

Отметим, что если в условии теоремы предполагать $f \in C^\infty(B_R)$, то ее первое утверждение верно и при $r_1 + r_2 \leq R$, $M(r_1, r_2) = \{in\}$. Другие результаты по аналогичным проблемам средних значений содержатся в [4].

2. Обозначения и вспомогательные утверждения

Следуя ([8], с. 326), обозначим через $T_1 \times T_2$ свертку двух распределений на $H^n(\mathbb{C})$, одно из которых имеет компактный носитель. Положим $\psi_r = \delta - \chi_r/\mu(B_r)$, где δ — дельта-распределение в нуле пространства $H^n(\mathbb{C})$, χ_r — характеристическая функция (индикатор) шара B_r. Класс функций $f \in C^\infty(B_R)$, для которых $(f \times \psi_r)(z) = 0$, $z \in B_{R-r}$, обозначим $\mathcal{H}_r(B_R)$.

Пусть $S = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = 1\}$, ρ, σ — полярные координаты в $\mathbb{C}^n$ ($\forall z \in \mathbb{C}^n$ $\rho = |z|$, а если $z \neq 0$, то $\sigma = z/|z|$), $\{S_{p,q}^{(k)}(\sigma)\}$, $1 \leq k \leq Q(n,p,q)$, — фиксированный ортонормированный базис в пространстве сферических гармоник бистепени (p,q) ([12], с. 265). Всякой функции $f \in L_{\mathrm{loc}}(B_R)$ соответствует ряд Фурье

$$f(z) \sim \sum_{p,q=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{Q(n,p,q)} f_{p,q,k}(\rho) S_{p,q}^{(k)}(\sigma), \quad \rho \in (0, \operatorname{th} R),$$

где $f_{p,q,k}(\rho) = \int\limits_S f(\rho,\sigma)\overline{S_{p,q}^{(k)}(\sigma)}d\sigma$.

Леммы 1–6, приводимые ниже, доказываются методами работы [13].

Лемма 1. *Пусть $f \in \mathcal{H}_r(B_R)$. Тогда функция $f_{p,q,k}(\rho)S_{p,q}^{(l)}(\sigma)$ принадлежит $\mathcal{H}_r(B_R)$ при всех $p, q \geq 0$, $1 \leq k, l \leq Q(n,p,q)$.*

Лемма 2. *Пусть $f \in \mathcal{H}_r(B_R)$ и $f = 0$ в B_r. Тогда $f = 0$ в B_R.*

Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, $\gamma = \gamma(\lambda) = \frac{n-i\lambda}{2}$. При $\rho \in [0,1)$, $m = 0,1,\dots$ обозначим

$$\Phi_\lambda^{p,q}(\rho) = \frac{\Gamma(\gamma+q)\Gamma(\gamma+p)\Gamma(n)}{\Gamma(n+p+q)\Gamma^2(\gamma)}\rho^{p+q}(1-\rho^2)^\gamma F(\gamma+q,\gamma+p;n+p+q;\rho^2),$$

$$\Phi_{\lambda,m}^{p,q}(\rho) = \frac{d^m}{d\mu^m}(\Phi_\mu^{p,q}(\rho))\Big|_{\mu=\lambda},$$

где Γ — гамма-функция. Сферические функции на $H^n(\mathbb{C})$ имеют вид [12] $\varphi_\lambda(z){=}\varphi_\lambda^{(n-1,0)}(d(0,z)){=}$ $\Phi_\lambda^{0,0}(|z|)$. Положим $\varphi_{\lambda,m}(z) = \Phi_{\lambda,m}^{0,0}(|z|)$.

Лемма 3. *Для любого $z \in B$*

$$(\varphi_{\lambda,m} \times \psi_r)(z) = \sum_{j=0}^m \frac{m!}{j!(m-j)!}\eta_r^{(j)}(\lambda)\varphi_{\lambda,m-j}(z). \tag{4}$$

Лемма 4. *Пусть n_λ — кратность корня $\lambda \in M(r)$, $m = 0,\dots,n_\lambda - 1$. Тогда функция $\Phi_{\lambda,m}^{p,q}(\rho)S_{p,q}^{(k)}(\sigma)$ принадлежит $\mathcal{H}_r(B_R)$ при всех $p,q \geq 0$, $1 \leq k \leq Q(n,p,q)$.*

Лемма 5. *Пусть $f \in C^\infty(B_R)$. Тогда для того чтобы $f \in \mathcal{H}_r(B_R)$, необходимо и достаточно, чтобы при всех целых $p,q \geq 0$ и $1 \leq k \leq Q(n,p,q)$ имело место равенство*

$$f_{p,q,k}(\rho) = \sum_{\lambda\in M(r)}\sum_{m=0}^{n_\lambda-1} c_{\lambda,m,p,q,k}\Phi_{\lambda,m}^{p,q}(\rho),$$

причем

$$\max_{0\leq m\leq n_\lambda-1}|c_{\lambda,m,p,q,k}| = O(|\lambda|^B) \tag{5}$$

при $|\lambda| \to +\infty$ и любом фиксированном $B < 0$.

Лемма 6. *Пусть $r_1, r_2 > 0$, $r_1 + r_2 \leq R$, $M(r_1,r_2) = \{in\}$. Тогда, если функция*

$$f(z) = \sum_{\lambda\in M(r_1)}\sum_{m=0}^{n_\lambda-1} c_{\lambda,m}\Phi_{\lambda,m}^{p,q}(\rho)S_{p,q}^{(k)}(\sigma), \quad z \in B_R,$$

принадлежит $\mathcal{H}_{r_2}(B_R)$, причем $c_{\lambda,m}$ удовлетворяют (5), то f $\mathcal{M}$-гармонична в B_R.

3. Схема доказательства теоремы

1. Пусть сначала $f \in C^\infty(B_R)$. Используя леммы 1, 5 и 6, получаем, что все коэффициенты Фурье функции f $\mathcal{M}$-гармоничны в B_R. Это означает, что f является $\mathcal{M}$-гармонической в B_R. Общий случай сводится к рассмотренному стандартным приемом сглаживания (напр., [8], доказательство теоремы 2.6, с. 125).

2. В случае, когда $M(r_1,r_2) \neq \{in\}$, всем требованиям утверждения 2 удовлетворяет функция $\varphi_\lambda(z)$, где $\lambda \in M(r_1,r_2) \setminus \{in\}$. Пусть $r_1 < r_2$, $r_1 + r_2 > R$ и $M(r_1,r_2) = \{in\}$. Зафиксируем $\varepsilon \in (0, \min\{r_1 + r_2 - R,\ R - r_2\})$. Рассмотрим радиальную функцию $h(\rho)$ со следующими свойствами: $h \not\equiv 0$, $h \in C^\infty(B_{r_2+\varepsilon})$; $h(\rho) = 0$ при $\rho \in (0, \mathrm{th}(R-r_1)) \cup (\mathrm{th}(r_2-\varepsilon), \mathrm{th}(r_2+\varepsilon))$; $\int\limits_{R-r_1<d(z,0)<r_2-\varepsilon} h(|z|)d\mu(z) = 0$. Тогда $h \in \mathcal{H}_{r_2}(B_{r_2+\varepsilon})$ и по лемме 5 имеем

$$h(|z|) = \sum_{\lambda\in M(r_2)}\sum_{m=0}^{n_\lambda-1} c_{\lambda,m}\varphi_{\lambda,m}(z),$$

где $c_{\lambda,m}$ удовлетворяют (5). Заменяя, если необходимо, функцию h подходящей линейной комбинацией вида $\alpha_0 h + \alpha_1\widetilde{\Delta}h + \dots + \alpha_k\widetilde{\Delta}^k h$, можно считать, что $c_{\lambda,m} = 0$ при $|\lambda| \leq \varkappa = \min\{t \geq n+1 : n_\lambda = 1,\ |\lambda| \geq t\}$. Это означает, что $h(|z|) = \sum\limits_{\lambda\in M(r_2),|\lambda|>\varkappa} c_\lambda\varphi_\lambda(z)$, причем $c_\lambda = O(|\lambda|^b)$

при $|\lambda| \to +\infty$ и любом $b < 0$. Рассмотрим функцию $f(z) = \sum\limits_{\lambda \in M(r_2), |\lambda| > \varkappa} \frac{c_\lambda}{\eta_{r_1}(\lambda)} \varphi_\lambda(z)$, $z \in B_R$. Из условия $r_1 < r_2$ и асимптотического поведения $\varphi_\lambda^{(n,1)}(r_1)$ при $|\lambda| \to +\infty$ ([11], доказательство леммы 4.9) имеем $\varphi_\lambda^{(n,1)}(r_1) \to 0$ при $|\lambda| \to +\infty$, $\lambda \in M(r_2)$. Учитывая (4), отсюда и из леммы 5 получаем $(f \times \psi_{r_1})(z) = h(|z|)$ и $f \in \mathcal{H}_{r_2}(B_R)$. Следовательно, функция f удовлетворяет всем требованиям утверждения 2.

Автор благодарит профессора В.В. Волчкова за многочисленные полезные обсуждения.

Литература

1. Delsarte J. *Note sur une propriete nouvelle des fonctions hormoniques* // C.R. Acad. Sci. Paris Ser.A–B. – 1958. – V. 246. – № 9. – P. 1358–1360.
2. Беренстейн К.А., Струппа Д. *Комплексный анализ и уравнения в свертках* // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. – 1989. – Т. 54. – С. 5–111.
3. Zalcman L. *A bibliographic survey of the Pompeiu problem* // Approxim. solutions of partial different. equat. – 1992. – P. 185–194.
4. Netuka I., Vesely J. *Mean value property and harmonic functions* // Classical and Modern potential Theory and Applications. – 1994. – P. 359–398.
5. Волчков В.В. *Окончательный вариант теоремы о среднем в теории гармонических функций* // Матем. заметки. – 1996. – Т. 59. – № 3. – С. 351–358.
6. Berenstein C.A., Gay R. *A local version of the two-circles theorem* // Israel J. Math. – 1986. – V. 55. – № 3. – P. 267–288.
7. Волчков В.В. *Теоремы о двух радиусах на ограниченных областях евклидовых пространств* // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т.30. – № 10. – С. 1719–1724.
8. Хелгасон С. *Группы и геометрический анализ.* – М.: Мир, 1987. – 735 с.
9. Berenstein C.A., Zalcman L. *Pompeiu's problem on symmetric spaces* // Comment. Math. Helv. – 1980. – V. 55. – № 4. – P. 593–621.
10. Волчков В.В. *Проблемы типа Помпейю на многообразиях* // Докл. АН Украины. – 1993. – № 11. – С. 9–12.
11. Harchaoui M. *Inversion de la transformation de Pompeiu locale dans les espaces hyperboliques reel et complete* // J. Anal. Math. – 1995. – V. 67. – P. 1–37.
12. Рудин У. *Теория функций в единичном шаре из* $\mathbb{C}^n$. – М.: Мир, 1984. – 455 с.
13. Волчков Вит. В. *О функциях с нулевыми шаровыми средними на комплексных гиперболических пространствах* // Матем. заметки. – 2000. – Т. 68. – Вып. 4. – С. 504–512.

Донецкий государственный университет

Поступила
07.02.2000