И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2001 МАТЕМАТИКА № 3 (466)

УДК 515.124.4:514.774

Е.Н. СОСОВ

О НЕПРЕРЫВНОСТИ И СВЯЗНОСТИ МЕТРИЧЕСКОЙ δ-ПРОЕКЦИИ В РАВНОМЕРНО ВЫПУКЛОМ ГЕОДЕЗИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В статье некоторые результаты работ [1]–[3] о непрерывности и связности метрической δ-проекции в равномерно выпуклом банаховом пространстве обобщаются на случай равномерно выпуклого геодезического пространства. Одним из простых следствий такого обобщения является справедливость аналогичных результатов в пространствах Лобачевского (включая бесконечномерные).

1. Необходимые определения и теоремы

Пусть (X,ρ) — выпуклое метрическое пространство [3] (т.е. метрическое пространство, в котором расстояние между каждыми двумя точками равно длине кратчайшей кривой с концами в этих точках). Выпуклое метрическое пространство назовем прямым выпуклым метрическим пространством (ср. [4], с. 13), если через каждые его две различные точки можно провести единственную прямую (т.е. геодезическую кривую, изометричную всей вещественной оси R со стандартной метрикой ([4], с. 52)). Полное выпуклое метрическое пространство называется геодезическим пространством [5].

В дальнейшем используем следующие обозначения: $B(x,r)$ ($B[x,r]$, $S(x,r)$) — открытый шар (замкнутый шар, сфера) с центром в точке x, радиуса $r>0$, $xy=\rho(x,y)$, $xM=\rho(x,M)$; $[x,y]$ ((x,y)) — замкнутый (открытый) отрезок с концами $x,y\in X$. Пусть $\omega_\lambda(x,y)$, $\lambda\in R$, — точка на прямой прямого выпуклого метрического пространства, проходящей через точки x, y, удовлетворяющая условиям а) $x\omega_\lambda(x,y)=|\lambda|xy$; б) если $\lambda\in[0,1]$, то $\omega_\lambda(x,y)\in[x,y]$; в) если $\lambda>1$, то $y\in(x,\omega_\lambda(x,y))$; г) если $\lambda<0$, то $x\in(\omega_\lambda(x,y),y)$.

Множество M прямого выпуклого метрического пространства называется выпуклым, если для каждых двух различных точек x, y из этого множества отрезок $[x,y]$ принадлежит этому множеству.

Определение. Прямое выпуклое метрическое пространство X назовем равномерно выпуклым метрическим пространством, если выполняются следующие условия:

A) для каждого $\lambda\in R$ отображение $\omega_\lambda : X\times X\to X$ равномерно непрерывно на каждом множестве вида $B\times B$, где B — произвольный замкнутый шар пространства X;

B) каждый замкнутый шар $B[p,r]$ пространства X выпуклый и обладает свойством: если $\lim\limits_{n\to\infty} p\omega_{1/2}(x_n,y_n)=r$ для последовательностей $(x_n),(y_n)$ из шара $B[p,r]$, то ([6])
$$\lim_{n\to\infty} x_ny_n=0.$$

Простыми примерами равномерно выпуклых геодезических пространств являются равномерно выпуклые банаховы пространства и пространства Лобачевского (включая бесконечномерные).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00308.

Напомним следующие обозначения и определения из [2], [3]. Пусть $\delta \geq 0$, $x \in X$, $M \subset X$, $M \neq \emptyset$, $t \geq 0$; $x_M^\delta = \{y \in M : xy \leq xM + \delta\}$ $(x_M = x_M^0)$ — метрическая δ-проекция (метрическая проекция) точки x на множество M; $P : X \times 2^X \times R_+ \to 2^X$, $P(x, M, \delta) = x_M^\delta$ — оператор метрического δ-проектирования (оператор метрического проектирования, если $\delta \equiv 0$); $\lambda(M) = \sup\{\rho(A, B) : A \cup B = M,\ A, B \neq \emptyset\}$; $\lambda_M(\delta) = \sup\{\lambda(x_M^\delta) : x \in X\}$ — мера несвязности метрической δ-проекции; $\beta(A, B) = \sup\{xB : x \in A\}$, $\alpha(A, B) = \max\{\beta(A, B), \beta(B, A)\}$ — полууклонение и расстояние по Хаусдорфу между непустыми, ограниченными множествами $A, B \subset X$; $\omega(t) = \sup\{\alpha(x_M^\delta, y_M^\delta) : y \in X,\ xy \leq t,\ y_M^\delta \neq \emptyset\}$, $\widehat{\omega}(t) = \sup\{\alpha(x_M^\delta, x_N^\delta) : N \subset X,\ \alpha(M, N) \leq t,\ x_N^\delta \neq \emptyset\}$, $\overline{\omega}(t) = \sup\{\alpha(x_M^\delta, x_M^\varepsilon) : \varepsilon \geq 0,\ |\varepsilon - \delta| \leq t,\ x_M^\varepsilon \neq \emptyset\}$, $\Omega(t) = \sup\{\alpha(x_M^\delta, y_N^\varepsilon) : \varepsilon \geq 0,\ y \in X,\ N \subset X,\ xy \leq t,\ |\varepsilon - \delta| \leq t,\ \alpha(M, N) \leq t,\ y_N^\varepsilon \neq \emptyset\}$ — четыре модуля непрерывности оператора P в точке (x, M, δ) по x, по M, по δ и по совокупности этих переменных, причем $x_M \neq \emptyset$ при $\delta = 0$; $u_M(\delta) = \sup\{\omega(+0) : x \in X\}$, $\widehat{u}_M(\delta) = \sup\{\widehat{\omega}(+0) : x \in X\}$, $\overline{u}_M(\delta) = \sup\{\overline{\omega}(+0) : x \in X\}$, $U_M(\delta) = \sup\{\Omega(+0) : x \in X\}$, где $\omega(+0) = \lim\limits_{t \to +0} \omega(t)$ — верхние грани разрывов оператора P на множестве $\{(x, M, \delta) : x \in X\}$. Оператор $P_M : X \to 2^X$, $P_M(x) = x_M$ метрического проектирования на множество M называется непрерывным в слабом смысле, если $x_n \to x$ влечет $\rho(P_M(x_n), P_M(x)) \to 0$ [1]. $E_M = \{x \in X : x_M \neq \emptyset\}$, $T_M = \{x \in X : x_M$ одноточечно$\}$, $D_M x = \lim\limits_{\delta \to +0} \operatorname{diam}(x_M^\delta)$, $T'_M = \{x \in X : D_M x = 0\}$. Множество $M \subset X$ называется P-связным, если для каждого $x \in X$ множество x_M непустое и связное. Множество $M \subset X$ называется B-связным ($\mathring{B}$-связным), если пересечение множества M с каждым замкнутым (открытым) шаром является связным. Множество $M \subset X$ называется множеством существования (чебышевским множеством), если $E_M = X$ $(T_M = X)$.

Приведем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1 ([6]). *Пусть X — равномерно выпуклое метрическое пространство и $x \in X$. Если последовательности (y_n), (z_n), (u_n) удовлетворяют условиям $xy_n = r$ $(r > 0)$, $xz_n = r + h$ $(h > 0)$, $u_n \in [x, z_n]$, $xu_n = r$ $(n = 1, 2, \dots)$, $\lim\limits_{n \to \infty} y_n z_n = h$, то $\lim\limits_{n \to \infty} y_n u_n = 0$.*

Предложение 1 ([6], теорема 2). *Пусть X — равномерно выпуклое геодезическое пространство, а M — непустое замкнутое множество в пространстве X. Тогда каждое из множеств T_M, T'_M является дополнением множества первой категории (в частности, всюду плотно).*

Предложение 2 ([3], теорема 1). *Пусть M — подмножество выпуклого метрического пространства X. Тогда $\lambda_M(\delta{+}0) \leq u_M(\delta)$ при $0 < \delta < \lambda_M(\delta{+}0)$, а если M — множество существования, то справедливы неравенства $\lambda_M(\delta) \leq u_M(\delta)$ при $0 \leq \delta < \lambda_M(\delta)$; $\max[\lambda_M(+0), \lambda_M(0)] \leq u_M(0)$.*

Сформулируем теперь полученные результаты.

Теорема 1. *Пусть множество M принадлежит прямому геодезическому пространству X, в котором каждый замкнутый шар выпуклый и, кроме того, выполняется одно из следующих условий:*

a) *множество M P-связно и оператор P_M непрерывен в слабом смысле*;
b) $\lim\limits_{\delta \to +0} \lambda(x_M^\delta) = 0$ *для каждого $x \in X$.*

Тогда M — $\mathring{B}$-связное множество.

Лемма 2. *Пусть X — равномерно выпуклое метрическое пространство, $x \in X$, $0 < h < H$. Тогда* a) $\operatorname{diam}(B[z, zy + \delta] \setminus B(x, xy)) \to 0$; b) $\operatorname{diam}(B[z, zy] \setminus B(x, xy - \delta)) \to 0$ *при $\delta \to +0$ равномерно по всем $y, z \in X$, удовлетворяющим условиям $z \in (x, y)$, $xy = H$, $xz = h$.*

Теорема 2. *Пусть M — P-связное множество в равномерно выпуклом геодезическом пространстве X. Тогда M — B-связное множество.*

Лемма 3. *Пусть M — замкнутое множество в равномерно выпуклом геодезическом пространстве X. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

a) *множество M $\overset{\circ}{B}$-связно*; b) x_M^δ *связно для каждого $x \in X$ и каждого $\delta > 0$*;
c) $\lambda_M(\delta) = 0$ *для каждого $\delta > 0$*; d) $\lim\limits_{\delta \to +0} \lambda(x_M^\delta) = 0$ *для каждого $x \in X$*.

Лемма 4. *Пусть X — прямое выпуклое метрическое пространство. Тогда для каждой точки $(x, M, \delta) \subset X \times 2^X \times R_+$, $\delta > 0$, $M \neq \emptyset$, выполняется неравенство $\overline{\omega}(t) < \widehat{\omega}(t) + t$ при $0 < t < \delta$.*

Замечание 1. Из леммы 4 и неравенства (2) из [3]: $\Omega(t) \le \overline{\omega}(t) + t$ для $(x, M, \delta) \subset X \times 2^X \times R_+$, $\delta > 0$, $M \neq \emptyset$, в прямом выпуклом метрическом пространстве X следуют соотношения, аналогичные соотношениям (4) в [3],

$$u_M(\delta) \le \widehat{u}_M(\delta) = \overline{u}_M(\delta) = U_M(\delta) \ \text{ для каждого } \ \delta > 0. \tag{1}$$

Теорема 3. *Пусть X — равномерно выпуклое метрическое пространство, $M \subset X$, $\delta > 0$. Тогда $U_M(\delta) \le \lambda(x_M^{\delta - 0})$.*

Теорема 4. *Пусть X — равномерно выпуклое метрическое пространство, $M \subset X$. Тогда нижеследующие условия* a)–e) *эквивалентны. Если же M — замкнутое множество равномерно выпуклого геодезического пространства X, то условия* a)–h) *эквивалентны.*

a) $U_M(\delta) = 0$ *для каждого $\delta > 0$*; b) $\varlimsup\limits_{\delta \to +0} U_M(\delta) = 0$;

c) $u_M(\delta) = 0$ *для каждого $\delta > 0$*; d) $\varlimsup\limits_{\delta \to +0} u_M(\delta) = 0$;

e) $\lambda_M(\delta) = 0$ *для каждого $\delta > 0$*; f) $\lim\limits_{\delta \to +0} \lambda(x_M^\delta) = 0$ *для каждого $x \in X$*;

g) M — $\overset{\circ}{B}$*-связное множество*; h) x_M^δ — *связное множество для каждых $\delta > 0$ и $x \in X$*.

Следствие 1 (теорем 2, 3). Пусть M — чебышевское множество в равномерно выпуклом геодезическом пространстве X. Тогда оператор P метрического δ-проектирования на множество M непрерывен по совокупности переменных, т. е. $U_M(\delta) = 0$ для каждого $\delta > 0$.

Следствие 2 (предложения 2 и теоремы 3). Пусть M — множество существования из равномерно выпуклого метрического пространства X, в котором оператор P_M метрического проектирования на множество M непрерывен по Хаусдорфу (т. е. $u_M(0) = 0$). Тогда $U_M(\delta) = 0$ для каждого $\delta > 0$.

Замечание 2. Теорема 1 является обобщением теоремы 1 Л.П. Власова [1] и леммы 2 А.В. Маринова [3]. Теорема 2 является обобщением теоремы 4.2 Л.П. Власова [2]. Теоремы 3, 4 являются обобщениями теорем 2, 4 А.В. Маринова [3]. Утверждение a) леммы 2 является обобщением леммы 1.1 С.Б. Стечкина [1] и доказано в [6], утверждение b) леммы 2 является обобщением утверждения в лемме 4 А.В. Маринова [3] и доказано в этой статье. Леммы 3, 4 являются обобщениями леммы 3 и неравенства (3) А.В. Маринова [3].

2. Доказательства полученных результатов

Доказательство теоремы 1. Доказательство при условии a) почти дословно повторяет доказательство теоремы 1 Л.П. Власова [1]. Отличие — в содержании понятия деления отрезка в данном отношении, своевременном упоминании условия выпуклости каждого замкнутого шара и обозначениях. Пусть, напротив, найдется такой открытый шар $B_0 = B(x, R_0)$, что множество $M \cap B_0$ несвязно. Значит, $M \cap B_0 = A \cup C$, где A, C — непустые, замкнутые в B_0 и непересекающиеся множества. Выберем R_1 так, чтобы $\max[xA, xC] < R_1 < R_0$. Тогда замкнутый шар $B_1 = B[x, R_1]$ обладает тем свойством, что $B_1 \cap M$ распадается на непустые, замкнутые и непересекающиеся множества $A \cap B_1$, $C \cap B_1$. Покажем, что найдется замкнутый шар $B = B[y, r] \subset B_0$ такой, что $\rho(B \cap A, B \cap C) > 0$. Допустим, что это не так. Пусть $R_i > 0$ при $i \ge 2$ такие, что $\sum\limits_{i=2}^{\infty} R_i < R_0 - R_1$. Построим последовательность замкнутых шаров $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$ индуктивно. Шар B_1 уже построен. Пусть $B_n \cap A \neq \emptyset$, $B_n \cap C \neq \emptyset$ и радиус B_n равен R_n. Тогда по предположению $\rho(B_n \cap A, B_n \cap C) = 0$. Значит, найдутся точки $a_n \in B_n \cap A$, $c_n \in B_n \cap C$ такие, что $a_n c_n < 2R_{n+1}$. В качестве B_{n+1} возьмем шар $B[q_{n+1}, R_{n+1}]$, где $q_{n+1} = \omega_{1/2}(a_n, c_n)$. Из условия выпуклости каждого замкнутого шара и неравенства треугольника следует, что $q_n q_{n+p} \leq q_n q_{n+1} + \dots + q_{n+p-1} q_{n+p} \leq \sum\limits_{k=n}^{n+p-1} R_k \to 0$ при $p \to \infty$, $n \to \infty$. Значит, (q_n) — фундаментальная последовательность и найдется такая точка $q \in X$, что $q_n \to q$ $(n \to \infty)$. Кроме того, $x = q_1$ и $xq = q_1 q \leq q_1 q_n + q_n q \leq \sum\limits_{k=1}^{n-1} q_k q_{k+1} + q_n q \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} R_k + q_n q$. Но $\sum\limits_{k=1}^{\infty} R_k < R_0$, $q_n q \to 0$ $(n \to \infty)$. Следовательно, $q \in B_0$. Кроме того, $R_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Значит, $a_n \to q$, $c_n \to q$ $(n \to \infty)$ и $q \in A \cap C \cap B_0$. Противоречие. Таким образом, вышеуказанный шар существует. Тогда $B \cap M = A' \cup C'$, где $A' = A \cap B$, $C' = C \cap B$ — непустые замкнутые множества с $\rho(A', C') > 0$.

1) Значит, $y_M \subset A' \cup C'$. Пусть для определенности $y_M \subset A'$. Тогда $y_M \not\subset C'$, поскольку $\rho(A', C') > 0$ и y_M связно. Пусть $c \in C'$. Тогда $P_M(\omega_\lambda(y, c)) \subset B$ при $0 \leq \lambda \leq 1$, т.к. $\omega_\lambda(y, c)M \leq \omega_\lambda(y, c)c \leq R - y\omega_\lambda(y, c) = \rho(\omega_\lambda(y, c), X \setminus B)$. Значит, $P_M(\omega_\lambda(y, c)) \subset A' \cup C'$. Выберем $\lambda_0 = \sup\{\lambda : 0 \leq \lambda \leq 1,\ P_M(\omega_\lambda(y, c)) \subset A'\}$. Пусть последовательность (λ_n) $(n = 1, 2, \dots)$ такая, что $\lambda_n \to \lambda_0$, $\lambda_n > \lambda_0$. Тогда $P_M(\omega_{\lambda_n}(y, c)) \subset C'$, $\omega_{\lambda_n}(y, c) \to \omega_{\lambda_0}(y, c)$ и $\rho(P_M(\omega_{\lambda_n}(y, c)), P_M(\omega_{\lambda_0}(y, c))) \to 0$ $(n \to \infty)$. Следовательно, $\rho(A', P_M(\omega_{\lambda_0}(y, c))) = 0$. Но возможны только два случая: $P_M(\omega_{\lambda_0}(y, c)) \subset A'$ или $P_M(\omega_{\lambda_0}(y, c)) \subset C'$. Значит, $\rho(A', C') = 0$. Противоречие. Теорема 1 при условии a) доказана.

2) (Ср. доказательство леммы 2 в [3].) Если множество M не является $\mathring{B}$-связным, то, как было доказано выше, найдутся $x \in X$ и $\delta > 0$ такие, что $x_M^\delta = A' \cup C'$, $\rho(A', C') > 0$, $\max[xA', xC'] < xM + \delta$. Нетрудно заметить, что в случае $xA' = xC'$ верно неравенство $\rho(A', C') \leq \lambda(x_M^\delta)$ при $\delta > 0$. Но это приводит к противоречию с условием b) теоремы. Для завершения доказательства осталось привести случай $xA' < xC'$ к предыдущему. Пусть $0 < 2t < xM + \delta - xC'$, $y \in x_{C'}^t$. Найдется такая точка $v \in [x, y]$, что $vA' = vC'$, т.к. непрерывная функция $zA' - zC'$ меняет знак на отрезке $[x, y]$. Тогда $xv = xy - vy \leq xC' + t - vC'$ и $B[v, vC' + t] \subset B[x, xM + \delta]$. Значит, $v_M^t \subset A' \cup C'$ и $\rho(A', C') \leq \lambda(v_M^t)$. А это противоречит условию b). $\square$

Доказательство п. b) леммы 2. Пусть для каждого $0 < \delta < H - h$ в множестве $B[z, zy] \setminus B(x, xy - \delta)$ произвольным образом выбирается элемент u. Очевидно, достаточно доказать, что $uy \to 0$ при $\delta \to +0$. Пусть v — точка пересечения прямой, проходящей через точки x, u, со сферой $S(x, xy)$, $t = [x, u] \bigcap S(x, xz)$. Из неравенств $H - \delta \leq xu \leq xv = H$ следует, что $xu \to H$ и $uv = H - xu \to 0$ при $\delta \to +0$. Тогда из неравенств $zy \leq zv \leq zu + uv \leq zy + uv$ следует, что $zv \to H - h$ при $\delta \to +0$. Но $xt = xz = h$. Поэтому по лемме 1 имеем $tz \to 0$ при $\delta \to +0$. Из условия A) определения следует теперь, что $yv \to 0$ при $\delta \to +0$. Таким образом, $uy \leq uv + vy \to 0$ при $\delta \to +0$. $\square$

Доказательство теоремы 2 получается из доказательства теоремы 4.2 Л.П. Власова [2] заменой ссылок на лемму 1.1 и теорему 1.1 С.Б. Стечкина [2] ссылками на их обобщения: лемму 2 и предложение 1 соответственно, а также заменой обозначений. $\square$

Доказательство леммы 3. Импликации b) ⇒ c) ⇒ d) очевидны. Импликация d) ⇒ a) доказана в п. 2) доказательства теоремы 1. Импликация a) ⇒ b) отличается от доказательства в лемме 3 А.В. Маринова только тем, что ссылка на доказательство теоремы 4.2 Л.П. Власова должна быть заменена ссылкой на доказательство теоремы 2. $\square$

Доказательство леммы 4. Поставим в соответствие каждой точке $z \in x_M^t$ точку $v(z) = S(x, xM + t) \cap \{\omega_l(x, z) : l \geq 0\}$. Положим $N = \{v(z) : z \in x_M^t\} \cup (M \setminus x_M^t)$. Тогда $\alpha(M, N) = \beta(x_M^{t+\delta}, x_N^\delta) = t$. Следовательно, $\beta(x_M^{t+\delta}, x_M^\delta) \leq \beta(x_M^{t+\delta}, x_N^\delta) + \beta(x_N^\delta, x_M^\delta) \leq t + \widehat{\omega}(t)$.

Положим теперь $W = \{\omega_l(x, z) : z \in x_M^\delta \setminus x_M^{\delta - t},\ l\rho(x, z) = xz + t\}$, $K = [M \setminus (x_M^\delta \setminus x_M^{\delta - t})] \cup W$. Тогда $W \cap x_M^\delta = \emptyset$, $x_K^\delta = x_M^{\delta - t}$, $\alpha(M, K) \leq t$. Отсюда получим $\beta(x_M^\delta, x_M^{\delta - t}) \leq \beta(x_M^\delta, x_K^\delta) + \beta(x_K^\delta, x_M^{\delta - t}) =$

$\beta(x_M^\delta, x_K^\delta) \le \widehat{\omega}(t)$. $\square$

Доказательство теоремы 3 получается из доказательства теоремы 2 А.В. Маринова [3] заменой ссылки на лемму 4 в [3] ссылкой на более общую лемму 2 данной статьи и заменой обозначений. $\square$

Доказательство теоремы 4 (ср. [3]). Из предложения 2 и теоремы 3 следует справедливость импликаций d) $\Rightarrow$ e) $\Rightarrow$ a). Но из первых четырех условий первое самое сильное, а последнее самое слабое. Значит, условия a)– e) эквивалентны. Эквивалентность условий e)–h) при дополнительном предположении полноты пространства X и замкнутости множества M следует теперь из леммы 3. $\square$

Литература

1. Власов Л.П. *Чебышевские множества и некоторые их обобщения* // Матем. заметки. – 1968. – Т. 3. – № 1. – С. 59–69.
2. Власов Л.П. *Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах* // УМН. – 1973. – Т. 28. – Вып. 6. – С. 3–66.
3. Маринов А.В. *Непрерывность и связность метрической δ-проекции* // Аппроксимация в конкрет. и абстракт. банахов. пространствах. – Свердловск, 1987. – С. 82–95.
4. Буземан Г. *Геометрия геодезических.* – М.: Физматгиз, 1962. – 503 с.
5. Ефремович В.А. *Неэквиморфность пространств Эвклида и Лобачевского* // УМН. – 1949. – Т. 4. – Вып. 2. – С. 178–179.
6. Сосов Е.Н. *Об аппроксимативных свойствах множеств в специальных метрических пространствах* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 6. – С. 81–84.

Казанский государственный
педагогический университет

Поступила
01.10.1999