Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2011, №12, с. 59–63 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421100123\0129*

О.А. СТАРИКОВА, А.В. СВИСТУНОВА

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ КВАДРИК ПРОЕКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВ НАД ЛОКАЛЬНЫМИ КОЛЬЦАМИ

Аннотация. Методами интегрального представления комбинаторных сумм Г.П. Егорычев и Е.В. Зима (Comm. Algebra **36**, 1426–1436 (2008)) нашли простые формулы для числа классов проективно конгруэнтных квадрик и поставили проблему об алгебраическом доказательстве и интерпретации полученных формул. Цель данной статьи — дать решение этой проблемы.

Ключевые слова: проективное пространство, локальное кольцо, квадрика, симметричная форма, проективная конгруэнтность.

УДК: 512.7

Abstract. In the paper in Comm. Algebra **36**, 1426–1436 (2008), using integral representation methods for combinatorial sums, G.P. Egorychev and E.V. Zima have obtained simple formulas for the number of classes of projectively congruent quadrics and posed a question on an algebraic proof and an interpretation of the obtained formulas. The goal of this paper is to give an answer to this question.

Keywords: projective space, local ring, quadrics, symmetric forms, projective congruence.

Наряду с обобщением основной теоремы проективной геометрии [1], в теории рефлексивных форм и квадрик проективных пространств с 70-х годов возрастал интерес к переходу от полей к алгебрам и кольцам коэффициентов ([2]–[5] и ссылки там же). Квадратичные формы и квадрики проективного пространства RP_{n-1} $(n > 2)$ над локальным кольцом $R = 2R$ главных идеалов при ограничении $|R^* : R^{*2}| = 2$ классифицированы и перечислены в [6].

Для случая нильпотентного ступени s максимального идеала в R предложение 3.2 из [6] (см. ниже теорему 3) дает комбинаторное выражение числа $N(n, s)$ классов проективно конгруэнтных квадрик.

Применяя к этой теореме методы интегрального представления комбинаторных сумм, Г.П. Егорычев и Е.В. Зима нашли простые формулы для числа $N(n, s)$. Основные теоремы 1 и 2 из [7] резюмирует

Теорема 1. *Если* $1 + R^{*2} \subset R^{*2}$ *или* $R^* \cap (1 + R^2) \not\subseteq R^{*2}$, *то*

$$N(n,s) = \frac{1}{2}\binom{n+2s}{2s} + \frac{1}{2}\binom{[n/2]+s}{s} - 1, \tag{1}$$

$$N(n,s) = S(n,s) + S([n/2],s) - 1 \tag{2}$$

Поступила 07.12.2010

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00717).

соответственно, где $S(n,s) = \sum\limits_{q=0}^{s} 2^{q-1} \binom{s}{q} \binom{n}{q}$.

Мы рассмотрим следующую проблему, записанную в ([7], с. 1435).

Дать независимое, алгебраическое доказательство и интерпретацию формул (1) *и* (2) *числа классов проективно конгруэнтных квадрик проективного пространства* RP_{n-1} $(n > 2)$ *над локальным кольцом* R *с максимальным идеалом ступени нильпотентности* s.

В данной статье приводятся требуемое доказательство и решение поставленной в [7] проблемы.

1. Предварительные замечания

Всюду далее основное кольцо R коэффициентов является ассоциативно-коммутативным и содержит единицу. Через R^* обозначается его мультипликативная группа обратимых элементов. Проективным пространством, ассоциированным со свободным R-модулем M, называют (например, [1]) множество $P(M)$ всех R-свободных прямых слагаемых ранга 1 модуля M. Каждое такое слагаемое представляется в виде Re с элементом e из M, на котором подходящая R-линейная функция на M принимает значение 1 (унимодулярный элемент).

Пусть V — свободный R-модуль ранга n. Его векторы будем задавать координатами относительно фиксированного базиса. Унимодулярные векторы над R — это векторы $v = (v_1, \dots, v_n)$, координаты которых порождают единичный идеал кольца R, т. е.

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle = Rv_1 + Rv_2 + \dots + Rv_n = R.$$

Между унимодулярными над R векторами определено отношение

$$(v_1, \dots, v_n) \sim (u_1, \dots, u_n) \Leftrightarrow \ \exists t \in R^* \ v_i = tu_i \ \ \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

являющееся отношением эквивалентности. Когда R — локальное кольцо, это позволяет определить ассоциированное с V проективное пространство более явно. Классы эквивалентности (или элементы фактор-множества) по отношению "$\sim$" множества унимодулярных над R векторов по определению являются точками ассоциированного с V проективного пространства RP_{n-1} над кольцом R. Далее обозначение $v = (v_1, \dots, v_n)$ используется как для вектора $v \in V$, так и для класса эквивалентности с представителем v.

Квадрикой проективного пространства RP_{n-1}, ассоциированного со свободным R-модулем ранга n, называют проективное многообразие его точек R^*v ($v = (v_1, \dots, v_n)$ — унимодулярные векторы), определенное уравнением $vAv^\top = 0$ с ненулевой симметрической $n \times n$-матрицей A над R. Симметрические $n \times n$-матрицы A и B, а также соответствующие им квадрики называем проективно конгруэнтными, если существуют такие $k \in R^*$ и $U \in GL(n, R)$, что $kA = UBU^\top$; при $k = 1$ матрицы A и B называем также конгруэнтными.

Пусть далее R — локальное кольцо главных идеалов с обратимым элементом 2 и главным максимальным идеалом $J = \langle \varepsilon \rangle$. Тогда всякая симметрическая матрица A над R конгруэнтна диагональной матрице $\mathrm{diag}(k_1\varepsilon^{t_1}, k_2\varepsilon^{t_2}, \dots, k_r\varepsilon^{t_r}, 0, \dots, 0)$ с однозначно определенными показателями $0 \le t_1 \le t_2 \le \dots \le t_r$, $\varepsilon^{t_r} \ne 0$ и $k_i \in R^*$ ([6], теорема 1.3). Когда $1 + J \subseteq R^{*2}$ и $|R^* : R^{*2}| = 2$, то известен также и нормальный вид симметрических матриц.

Для доказательства основной теоремы 1 потребуются явные формулы для числа классов конгруэнтных симметрических $n \times n$-матриц.

Лемма 1. *Пусть* R *— локальное кольцо главных идеалов с обратимым элементом* 2 *и главным максимальным идеалом* $J{=}\langle \varepsilon \rangle$ *ступени нильпотентности* s, *причем* $|R^* : R^{*2}|{=}2$.

Тогда число классов конгруэнтных симметрических $n \times n$-матриц в случаях $1 + R^{*2} \subseteq R^{*2}$ и $R^* \cap (1 + R^2) \nsubseteq R^{*2}$ равно соответственно

$$\binom{n+2s}{2s} \quad \text{и} \quad \sum_{q=0}^{s} 2^q \binom{s}{q} \binom{n}{q}.$$

Доказательство. Напомним, что из условия нильпотентности идеала J в силу ([6], предложение 1.6) вытекает включение $1 + J \subseteq R^{*2}$.

Если $1 + R^{*2} \subseteq R^{*2}$ и, следовательно, $R^* = R^{*2} \cup (-R^{*2})$, то распространяется закон инерции вещественных квадратичных форм ([6], теорема 2.1): всякая симметрическая $n \times n$-матрица над кольцом R конгруэнтным преобразованием приводится к виду (E_r — единичная матрица порядка r)

$$\operatorname{diag}(-\varepsilon^i E_{s_i}, \varepsilon^i E_{r_i - s_i}, \ldots, -\varepsilon^m E_{s_m}, \varepsilon^m E_{r_m - s_m}, 0, \ldots, 0), \tag{3}$$

где $0 \le i < \cdots < m$, $0 \le s_i \le r_i, \ldots, 0 \le s_m \le r_m$, $\varepsilon^m \ne 0$, $r_i + \cdots + r_m \le n$, причем показатели $i, \ldots, m$ и целые числа $r_i, \ldots, r_m$, $s_i, \ldots, s_m$ не зависят от способа приведения. Поэтому каждая симметрическая матрица порядка n определяется однозначно (с точностью до конгруэнтности) произвольным (неупорядоченным) набором n диагональных элементов из множества $\{0, \pm 1, \pm\varepsilon, \pm\varepsilon^2, \ldots, \pm\varepsilon^{s-1}\}$. Число таких наборов, а следовательно, и число классов конгруэнтных симметрических $n \times n$-матриц равно $\binom{n+2s}{2s}$.

При $R^* \cap (1 + R^2) \nsubseteq R^{*2}$ и $k \in R^* \setminus R^{*2}$ имеем $R^* = R^{*2} \cup kR^{*2}$. Согласно ([6], теорема 2.2) всякая симметрическая $n \times n$-матрица над R конгруэнтна единственной диагональной матрице вида

$$\operatorname{diag}(\underbrace{\delta_i \varepsilon^i, \varepsilon^i, \ldots, \varepsilon^i}_{r_i}, \ldots, \underbrace{\delta_m \varepsilon^m, \varepsilon^m, \ldots, \varepsilon^m}_{r_m}, 0, \ldots, 0), \tag{4}$$

$$\delta_i, \ldots, \delta_m \in \{1, k\}, \quad 0 \le i < \cdots < m, \quad \varepsilon^m \ne 0, \quad r_i + \cdots + r_m \le n.$$

Матрица (4) характеризуется набором коэффициентов $\delta_i, \ldots, \delta_m$ и кортежем показателей $(i, \ldots, m)$. Обозначая длину кортежа через q, находим число $\sum_{q=0}^{s} 2^q \binom{s}{q} \binom{n}{q}$ классов конгруэнтных матриц. □

Более сложным, как замечено в [5], [6], является вопрос перечисления симметрических матриц и соответствующих квадрик проективного пространства RP_{n-1} с точностью до проективной конгруэнтности.

2. Доказательство основной теоремы

Комбинаторное выражение числа классов проективно конгруэнтных квадрик проективного пространства RP_{n-1} получено в [6] для случая нильпотентного максимального идеала в R.

Полагаем $\binom{p}{q}'$ равно $\binom{p}{q}$ для целых чисел $p \ge q \ge 0$ и равно 0 в других случаях; $\Omega_q(m)$ — совокупность упорядоченных наборов $(n_1, \ldots, n_q)$ целых чисел $n_j > 0$ с суммой m; $[\cdots]$ — целая часть числа.

Теорема 2 ([6], предложение 3.2)**.** *Пусть R — локальное кольцо с нильпотентным ступени s главным максимальным идеалом, $2 \in R^*$ и $|R^* : R^{*2}| = 2$. Тогда число классов* *проективно конгруэнтных квадрик пространства* RP_{n-1} $(n > 2)$ *соответственно случаям* $R^* \cap (1 + R^2) \nsubseteq R^{*2}$ *и* $1 + R^{*2} \subseteq R^{*2}$ *равно*

$$\sum_{m=1}^{n} \sum_{q=1}^{\min\{m,s\}} \binom{s}{q} 2^{q-1} \Big\{ \binom{m/2-1}{q-1}' + \binom{m-1}{q-1} \Big\},$$

$$\sum_{m=1}^{n} \sum_{q=1}^{\min\{m,s\}} \binom{s}{q} \Big\{ \binom{m/2-1}{q-1}' + \sum_{(n_1,\ldots,n_q)\in\Omega_q(m)} \Big[\frac{1}{2} \prod_{j=1}^{q} (n_j+1) \Big] \Big\}.$$

Применяя к этой теореме методы интегрального представления комбинаторных сумм, Г.П. Егорычев и Е.В. Зима [7] нашли простые формулы для числа $N(n, s)$. Основной результат из [7] резюмирует теорема 1 из введения. Далее приводим алгебраическое доказательство этой теоремы и решаем проблему, поставленную в [7].

Доказательство теоремы 1. Пусть R — локальное кольцо с нильпотентным ступени s главным максимальным идеалом, $2 \in R^*$, $|R^* : R^{*2}| = 2$ и $k \in R^* \setminus R^{*2}$. Рассмотрим классы конгруэнтных симметрических $n \times n$-матриц над кольцом R с точностью до отношения проективной конгруэнтности. Обозначим через l_1 (аналогично l_2) число классов конгруэнтных матриц, инвариантных (соответственно неинвариантных) относительно проективной конгруэнтности. В случае, когда матрицы A и kA конгруэнтны, класс конгруэнтных матриц с представителем A является также классом проективно конгруэнтных матриц. В оставшихся случаях A и kA представляют два различных класса конгруэнтных матриц. Учитывая, что квадрики определяются ненулевыми симметрическими матрицами, получаем

$$N(n, s) = l_1 + \frac{1}{2} l_2 - 1 = \frac{1}{2}(l_1 + l_2) + \frac{1}{2} l_1 - 1.$$

Заметим, что число $l_1 + l_2$ всех классов конгруэнтных матриц найдено в лемме 2. В случае $1 + R^{*2} \subseteq R^{*2}$ получаем

$$\frac{1}{2}(l_1 + l_2) = \frac{1}{2} \binom{n+2s}{2s}.$$

При условии $R^* \cap (1 + R^2) \nsubseteq R^{*2}$ находим

$$\frac{1}{2}(l_1 + l_2) = \frac{1}{2} \sum_{q=0}^{s} 2^q \binom{s}{q} \binom{n}{q} = \sum_{q=0}^{s} 2^{q-1} \binom{s}{q} \binom{n}{q} = S(n, s).$$

Найдем теперь число l_1 классов конгруэнтных матриц, инвариантных относительно проективной конгруэнтности.

При условии $1 + R^{*2} \subseteq R^{*2}$ имеем $k = -1$. Конгруэнтность матрицы A, записанной в виде (3), матрице $-A$ равносильна условиям $r_i = 2s_i, \ldots, r_m = 2s_m$. Следовательно, в (3) для всех $j \in \{i, \ldots, m\}$ клетки $-\varepsilon^j E_{s_j}$, $\varepsilon^j E_{r_j - s_j}$ различаются лишь знаком. Поэтому класс проективно конгруэнтных матриц с представителем A, конгруэнтным $-A$, характеризуется произвольным набором $[n/2]$ элементов множества $\{\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{s-1}, \varepsilon^s = 0\}$, откуда

$$l_1 = \binom{[n/2]+s}{s}.$$

В случае $R^* \cap (1 + R^2) \nsubseteq R^{*2}$ необходимым и достаточным условием конгруэнтности матрицы A вида (4) и kA является четность чисел $r_i, \ldots, r_m$. Обозначим через q длину кортежа $(i, \ldots, m)$ в (4). Если $r_i \equiv \cdots \equiv r_m \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 2)$, то все 2^q наборов показателей

$(\delta_i, \ldots, \delta_m)$ определяют попарно неконгруэнтные матрицы и, следовательно,

$$l_1 = \sum_{q=0}^{s} 2^q \binom{s}{q} \binom{[n/2]}{q}.$$

Таким образом, теорема 1 доказана. □

Замечание. Проведенное доказательство позволяет также дать интерпретацию слагаемых в формулах (1) и (2). В формуле (1) числа $\binom{n+2s}{2s}$ и $\binom{[n/2]+s}{s}$ (аналогично $2S(n,s)$ и $2S([n/2],s)$ в формуле (2)) выражают соответственно число всех классов конгруэнтных $n \times n$-матриц и число классов конгруэнтных матриц, инвариантных относительно проективной конгруэнтности.

Литература

[1] Ojanguren M., Sridharan R. *A note on the fundamental theorem of projective geometry*, Comm. Math. Helv. **44** (3), 3100–3150 (1969).

[2] Benz W. *Vorlesungen über Geometrie der Algebren* (Berlin etc.: Springer-Verlag, 1973).

[3] Вишневский В.В., Розенфельд Б.А., Широков А.П. *О развитии геометрии пространств над алгебрами*, Изв. вузов. Матем., № 7, 38–44 (1984).

[4] Милнор Дж., Хьюзмоллер Д. *Симметрические билинейные формы* (Наука, М., 1986).

[5] Левчук В.М., Старикова О.А. *Нормальный вид и схемы квадратичных форм*, Фундамент. и прикл. матем. **13** (1), 161–178 (2007).

[6] Левчук В.М., Старикова О.А. *Квадратичные формы проективных пространств над кольцами*, Матем. сб. **197** (6), 97–110 (2006).

[7] Egorychev G.P., Zima E.V. *Simple formulae for the number of quadrics and symmetric forms of modules over local rings*, Comm. in Algebra **36**, 1426–1436 (2008).

О.А. Старикова

доцент, кафедра алгебры и геометрии,
Северо-Восточный государственный университет,
ул. Портовая, д. 13, г. Магадан, 685000,

e-mail: star-olga@yandex.ru

А.В. Свистунова

старший преподаватель, кафедра алгебры и геометрии,
Северо-Восточный государственный университет,
ул. Портовая, д. 13, г. Магадан, 685000,

e-mail: anva1987@yandex.ru

O.A. Starikova

Associate Professor, Chair of Algebra and Geometry,
North-Eastern State University,
13 Portovaya str., Magadan, 685000 Russia,

e-mail: star-olga@yandex.ru

A.V. Svistunova

Senior Lecturer, Chair of Algebra and Geometry,
North-Eastern State University,
13 Portovaya str., Magadan, 685000 Russia,

e-mail: anva1987@yandex.ru