ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 5 (516)

УДК 514.752

А.В. ЧАКМАЗЯН

О ГИПЕРПОЛОСАХ КРИВИЗНЫ С ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ГЛАВНОЙ ТРЕТЬЕЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ФОРМОЙ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Основные определения и формулировка результатов

Понятие полосы в трехмерном евклидовом пространстве E_3 ввел В. Бляшке [1]. Полосой он называл линию в E_3, оснащенную гладким полем касательных областей. В.В. Вагнер в [2] обобщил это понятие для m-мерной поверхности в n-мерном центро-аффинном пространстве.

Определение 1. Гладкой m-мерной гиперполосой H_m в n-мерном евклидовом пространстве E_n называется m-параметрическое многообразие таких плоских элементов (x, ξ), что точка x описывает поверхность M_m, а гиперплоскость $\xi(x)$ касается поверхности M_m в соответствующей точке $x \in M_m$ [2].

Поверхность M_m называется *базисной* для гиперполосы H_m, а гиперплоскости $\xi(x)$ называются главными касательными гиперплоскостями гиперполосы H_m. Если задано m-мерное многообразие гиперплоскостей в E_n, то определяется многообразие его характеристик, определяющих пределы $(n-m-1)$-мерных пересечений $m+1$ бесконечно сближающихся независимых гиперплоскостей данного многообразия.

Если $(n-m-1)$-мерные характеристические плоскости $\Pi(x)$ семейства главных касательных гиперплоскостей гиперполосы H_m не содержат направлений, касательных к ее базисной поверхности, то гиперполоса называется регулярной [2].

Если касательная плоскость $T_x(M_m)$ базисной поверхности M_m вполне ортогональна характеристической плоскости $\Pi(x)$, $x \in M_m$, то H_m называется гиперполосой кривизны [3]. При $m = 1$ и $n = 3$ гиперполоса кривизны была определена в [1].

Определение 2. Поверхность M_m в E_n называется двойственно нормализуемой, если существует такое m-мерное многообразие касательных к M_m гиперплоскостей $\xi(x)$, что в любой точке $x \in M_m$ $(n-m-1)$-мерные характеристики $\Pi(x)$ содержатся в нормальной к M_m $(n-m)$-плоскости $N(M_m)$ [4].

Пусть в произвольной точке $x \in M_m$ в $(n-m)$-мерной нормальной плоскости $N(M_m)$ поверхности M_m выбрано p направлений так, что образуется гладкое поле p-мерных направлений $\nu_p \subset N(M_m)$, $p \leqslant n-m$.

Определение 3. Поле ν_p называется параллельным в нормальной связности, если при любом инфинитезимальном перемещении произвольной точки x в M_m смещение p-мерного направления $\nu_p(x)$ происходит в $(m+p)$-мерной плоскости, натянутой на касательную плоскость $T_x(M_m)$, $x \in M_m$, и на нормальное подпространство $\nu_p(x)$ [4].

Будем говорить, что главная третья фундаментальная форма α_3 (см. [4]) гиперполосы кривизны параллельна, если $\overline{\nabla} h_{ijk} = 0$ [5], где $\overline{\nabla}$ обозначает связность Ван дер Вардена–Бортолотти.

Локальное строение гиперполосы кривизны изучено в [3], [6]. В данной работе продолжается исследование гиперполосы кривизны с параллельной главной третьей фундаментальной формой. Основные результаты сформулированы в следующих теоремах.

Теорема 1. *Регулярная гиперполоса H_m в E_n является гиперполосой кривизны тогда и только тогда, когда она двойственно нормализуема.*

Теорема 2. *Регулярная гиперполоса H_m в E_n является гиперполосой кривизны тогда и только тогда, когда характеристические направления главной касательной гиперплоскости гиперполосы параллельны в нормальной связности базисной поверхности M_m.*

Теорема 3. *Если регулярная гиперполоса H_m является гиперполосой кривизны с параллельной главной третьей фундаментальной формой в евклидовом пространстве E_n, то*

1) *нормальная связность базисной поверхности M_m плоская,*
2) *внутренняя геометрия базисной поверхности локально-евклидова.*

2. Аппарат исследования

Рассмотрим n-мерное евклидово пространство E_n и присоединим к текущей его точке x подвижной репер $\{x, r_J\}$, $J, K, L = 1, \ldots, n$.

Уравнения инфинитезимального перемещения репера имеют вид $dx = \omega^J e_J$, $de_J = \omega_J^K e_K$, где ω^J, ω_J^K — линейные формы от дифференциалов параметров.

Внешнее дифференцирование этих соотношений приводит к структурным уравнениям для форм $d\omega^J = \omega^K \wedge \omega_K^J$, $d\omega_J^K = \omega_J^L \wedge \omega_L^K$. Присоединим к регулярной гиперполосе H_m расслоение реперов так, чтобы векторы e_i $(i, j, k = 1, \ldots, m)$ составляли базис подпространства $T_x(M_m)$, векторы e_α $(\alpha, \beta, \gamma = m+1, \ldots, n-1)$ — базис подпространства $\Pi_x(M_m)$, а единичный вектор e_n был ортогонален гиперплоскости $\xi_x = [T_x, \Pi_x]$. Тогда

$$\begin{aligned} &(\overline{e}_i, \overline{e}_n) = 0, \quad (e_\alpha, e_n) = 0, \quad (\overline{e}_n, \overline{e}_n) = 1, \\ &(e_i, e_j) = g_{ij}, \quad (e_\alpha, e_\beta) = g_{\alpha\beta}, \quad (\overline{e}_i, \overline{e}_\alpha) = g_{i\alpha}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\det(g_{ij}) \neq 0$, $\det(g_{\alpha\beta}) \neq 0$, и тензоры g_{ij} и $g_{\alpha\beta}$ определяют положительно определенные квадратичные формы.

Уравнения движения в таком репере запишутся в виде

$$\begin{gathered} dx = \omega^i e_i, \quad de_i = \omega_i^j e_j + \omega_i^\alpha e_\alpha + \omega_i^n e_n, \\ de_\alpha = \omega_\alpha^i e_i + \omega_\alpha^\beta e_\beta + \omega_\alpha^n e_n, \quad de_n = \omega_n^i e_i + \omega_n^\alpha e_\alpha + \omega_n^i e_n. \end{gathered} \tag{2}$$

При этом на базисном подмногообразии M_m будем иметь $ds^2 = (dx)^2 = g_{ij}\omega^i\omega^j$. Следовательно, тензор g_{ij} является первым фундаментальным тензором этого подмногообразия.

Дифференцируя соотношения (1) и используя (2), получим следующие уравнения Пфаффа, которым удовлетворяют 1-формы, входящие в (2):

$$\begin{gathered} \omega_n^j g_{ji} + \omega_n^\alpha g_{\alpha i} + \omega_i^n = 0, \quad \omega_n^i g_{i\alpha} + \omega_n^\beta g_{\beta\alpha} + \omega_\alpha^n = 0, \quad \omega_n^n = 0, \\ dg_{ij} = g_{ik}\omega_j^k + g_{kj}\omega_i^k, \quad dg_{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma}\omega_\beta^\gamma + g_{\gamma\beta}\omega_\alpha^\gamma, \quad dg_{i\alpha} = g_{\alpha\beta}\omega_i^\beta + g_{ij}\omega_\alpha^j. \end{gathered} \tag{3}$$

Первое уравнение из (2) показывает, что на базисной поверхности M_m

$$\omega^n = 0, \quad \omega^\alpha = 0. \tag{4}$$

Так как подпространство $\Pi_x = [x, e_\alpha]$ является характеристическим для семейства гиперплоскостей ξ_x, то $de_\alpha \in \xi_x$ и из третьего уравнения системы (2) следует

$$\omega_\alpha^n = 0. \tag{5}$$

Уравнения (4) и (5) являются основными уравнениями регулярной гиперполосы H_m. Из второго уравнения в (3) следует

$$\omega_n^\beta = 0.$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (4) и (5), получим

$$\omega^i \wedge \omega_i^n = 0, \quad \omega^i \wedge \omega_i^\alpha = 0, \tag{6}$$

$$\omega_\alpha^i \wedge \omega_i^n = 0. \tag{7}$$

Применяя к уравнениям (6) лемму Картана, будем иметь

$$\omega_i^n = h_{ij}\omega^j, \quad \omega_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \omega^j, \tag{8}$$

где $h_{ij} = h_{ji}$, $h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha$. Эти тензоры образуют систему вторых фундаментальных тензоров поверхности M_m, а первый из них определяет главную вторую фундаментальную форму

$$h = h_{ij}\omega^i\omega^j$$

поверхности M_m относительно семейства оснащающих гиперплоскостей ξ_x. Так как гиперполоса H_m регулярна, то $\det(h_{ij}) \neq 0$ [2]. Тензор h_{ij} назовем вторым главным фундаментальным тензором H_m. Для гиперполосы кривизны H_m из последнего уравнения системы (3) и уравнений (8) следует

$$\omega_\alpha^i = -g_{\alpha\beta}g^{ij}h_{jk}^\beta\omega^k.$$

Подставляя это выражение, а также выражение ω_i^n (см. (8)) в (7) и учитывая, что $\det(g_{\alpha\beta}) \neq 0$, получим $g^{ij}h_{jk}^\alpha h_{il}\omega^k \wedge \omega^l = 0$. Отсюда

$$g^{ij}h_{j[k}^\alpha h_{|i|l]} = 0. \tag{9}$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (8) и применяя лемму Картана, получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \overline{\nabla} h_{ij} &= h_{ijk}\omega^k, \quad h_{ijk} = h_{ikj} \ (= \overline{\nabla}_j h_{ik}), \\ \overline{\nabla} h_{ij}^\alpha &= h_{ijk}^\alpha\omega^k, \quad h_{ijk}^\alpha = h_{ikj}^\alpha \ (= \overline{\nabla}_j h_{ik}^\alpha), \end{aligned} \tag{10}$$

где $\overline{\nabla}$ — связность Ван дер Вардена–Бортолотти, а ковариантные дифференциалы $\overline{\nabla} h_{ij}$, $\overline{\nabla} h_{ij}^\alpha$ определяются формулами

$$\overline{\nabla} h_{ij} = dh_{ij} - h_{kj}\omega_i^k - h_{ik}\omega_j^k, \quad \overline{\nabla}_j h_{ij}^\alpha = dh_{ij}^\alpha + h_{ij}^\beta\omega_\beta^\alpha - h_{kj}^\alpha\omega_i^k - h_{ik}^\alpha\omega_j^k. \tag{11}$$

В (8) и (10) функции h_{ij}, h_{ijk}, h_{ij}^α, h_{ijk}^α симметричны по нижним индексам, являются компонентами главных фундаментальных форм α_2, α_3 и фундаментальных форм α_2^*, α_3^* соответственно. Это $T^\perp(M_m)$-значные формы, действующие соответственно по правилам

$$\begin{aligned} &\alpha_2 : (X, Y) \longmapsto h_{ij}X^iY^je_n, \quad \alpha_3 : (X, Y, Z) \longmapsto h_{ijk}X^iY^jZ^ke_n, \\ &\alpha_2^* : (X, Y) \longmapsto h_{ij}^\alpha X^iY^je_\alpha, \quad \alpha_3^* : (X, Y, Z) \longmapsto h_{ijk}^\alpha X^iY^jZ^ke_\alpha, \end{aligned} \tag{12}$$

где $X = X^ie_i$, $Y = Y^ie_i$, $Z = Z^ie_i$. Из (10) следует $\alpha_3 = \overline{\nabla}\alpha_2$, $\alpha_3^* = \overline{\nabla}\alpha_2^*$. Компоненты h_{ijkl}, h_{ijkl}^α главной фундаментальной формы α_4 и фундаментальной формы α_4^* определяются соотношениями

$$\overline{\nabla} h_{ijk} = h_{ijkl}\omega^l, \quad \overline{\nabla} h_{ijk}^\alpha = h_{ijkl}^\alpha\omega^l, \tag{13}$$

где левые части раскрываются по той же схеме, что и в (11). Формы α_4, α_4^* также являются $T^\perp(M_m)$-значными, и их действие определяется таким же образом, как и в (12). Однако эти формы, в отличие от форм α_2, α_2^* и α_3, α_3^*, симметричны только по первым трем аргументам и в общем случае симметричными не являются. Из (13) следует $\alpha_4 = \overline{\nabla}\alpha_3$, $\alpha_4^* = \overline{\nabla}\alpha_3^*$.

Дифференцируя внешним образом уравнения (10) и учитывая (5), получим

$$\overline{\nabla} h_{ijk} \wedge \omega^k = h_{kj}\Omega_i^k + h_{ik}\Omega_j^k, \quad \overline{\nabla} h_{ijk}^{\alpha} \wedge \omega^k = h_{kj}^{\alpha}\Omega_i^k + h_{ik}^{\alpha}\Omega_j^k - h_{ij}^{\beta}\Omega_{\beta}^{\alpha},$$

где

$$\begin{gathered} \Omega_i^j = d\omega_j^i - \omega_i^k \wedge \omega_k^j = \omega_i^{\alpha} \wedge \omega_{\alpha}^j + \omega_i^n \wedge \omega_n^j = -g_{\alpha\beta} g^{jm} h_{ik}^{\alpha} h_{ml}^{\beta} \omega^k \wedge \omega^l - h_{ik} h_{jl} \omega^k \wedge \omega^l, \\ \Omega_n^n = 0, \quad \Omega_n^{\alpha} = 0, \quad \Omega_{\alpha}^n = 0, \end{gathered} \tag{14}$$

$$\Omega_{\alpha}^{\beta} = d\omega_{\alpha}^{\beta} - \omega_{\alpha}^{\gamma} \wedge \omega_{\gamma}^{\beta} = \omega_{\alpha}^i \wedge \omega_i^{\beta} = -g_{\alpha\gamma} g^{ij} h_{jk}^{\gamma} h_{il}^{\beta} \omega^k \wedge \omega^l, \tag{15}$$

являются 2-формами кривизны связности Ван дер Вардена–Бортолотти $\overline{\nabla} = \nabla \oplus \nabla^{\perp}$. Здесь ∇ обозначает риманову связность на поверхности M_m, а $\nabla^{\perp}$ — нормальную связность. В (14) и (15) коэффициенты

$$R_{ikl}^j = -g_{\alpha\beta} g^{jm} h_{i[k}^{\alpha} h_{l]m}^{\beta} - h_{i[k} h_{|j|l]}, \quad R_{\alpha kl}^{\beta} = -g_{\alpha\gamma} g^{im} h_{j[k}^{\gamma} h_{l]i}^{\beta}$$

при $\omega^k \wedge \omega^l$ являются компонентами тензоров кривизны R и $R^{\perp}$ связностей ∇ и $\nabla^{\perp}$ соответственно. Если $R = 0$, то поверхность называется локально евклидовой. Если $R^{\perp} = 0$, то говорят о поверхности с плоской нормальной связностью.

3. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1. Пусть регулярная гиперполоса H_m в E_n является гиперполосой кривизны. Тогда характеристическая $(n-m-1)$-мерная плоскость $\Pi(x)$ главной касательной гиперплоскости гиперполосы H_m в любой точке базисного подмногообразия M_m вполне ортогональна касательной плоскости $T_x(M_m)$. Следовательно, характеристическая плоскость содержится в $(n-m)$-мерной нормальной плоскости $N(M_m)$, т. е. нормализация будет двойственной.

Обратно, пусть регулярная гиперполоса нормализована двойственно. Тогда нормальная $(n-m)$-мерная плоскость $N(M_m)$ в каждой точке базисного подмногообразия M_m содержит $(n-m-1)$-мерную характеристическую плоскость $\Pi(x)$. Так как в каждой точке $x \in M_m$ нормальная плоскость $N_x(M_m)$ вполне ортогональна касательной плоскости $T_x(M_m)$, то характеристическая плоскость $\Pi(x)$ будет вполне ортогональна касательной плоскости $T_x(M_m)$. Это означает, что гиперполоса является гиперполосой кривизны. $\square$

Доказательство теоремы 2. Пусть регулярная гиперполоса является гиперполосой кривизны. Тогда $(n-m-1)$-мерное характеристическое направление ν_{n-m-1} гиперполосы кривизны в каждой точке вполне ортогонально касательной плоскости $T_x(M_m)$. Любую точку, принадлежащую ν_{n-m-1}, можно представить следующим образом: $y = x + y^{\alpha} e_{\alpha}$. Дифференцируя это равенство и учитывая (2), получим $dy = (\omega^i + y^{\alpha}\omega_{\alpha}^i)e_i + (dy^{\alpha} + y^{\beta}\omega_{\beta}^{\alpha})e_{\alpha}$. Отсюда следует, что поле характеристических направлений ν_{n-m-1} параллельно в нормальной связности базисной поверхности M_m.

Обратно, пусть поле характеристических направлений ν_{n-m-1} параллельно в связности нормального расслоения базисной поверхности M_m. Тогда $\omega_{\alpha}^n = 0$ (см. [4], с. 89). С другой стороны, одномерное дополнение характеристического направления также параллельно в нормальной связности (см. [4], с. 89). Тогда $\omega_n^{\alpha} = 0$ и из первого и второго уравнений в (3) получим $\omega_n^j g_{ij} + \omega_i^n = 0$, $\omega_n^i g_{i\alpha} = 0$. Отсюда следует, что $h_i^j g_{i\alpha} = 0$, где $h_j^i = g^{ik} h_{kj}$. Так как $\det(h_j^i) \neq 0$, то $g_{i\alpha} = 0$. Следовательно, плоскости $\Pi(x)$ и $T_x(M_m)$ вполне ортогональны. Это означает, что гиперполоса является гиперполосой кривизны. $\square$

Доказательство теоремы 3. Так как по условию теоремы регулярная гиперполоса H_m является гиперполосой кривизны, то имеет место (9). Если второй главный фундаментальный тензор h_{ij} имеет простой спектр, то в каждом $T_x(M_m)$ ортонормированный репер можно выбрать так, что $h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Подставляя значение h_{ij} в (9), получим $(\lambda_i - \lambda_j) h_{ij}^{\alpha} = 0$,

$i \neq j$. Отсюда следует $h^{\alpha}_{ij} = \lambda^{\alpha}_i \delta_{ij}$, $i \neq j$, т. е. и матрицы $h = \|h_{ij}\|$, $h^{\alpha} = \|h^{\alpha}_{ij}\|$ одновременно имеют диагональный вид. Согласно критерию Картана (см. [7], с. 101), утверждение 1) доказано.

Если учесть параллельность главной третьей фундаментальной формы, то из первого уравнения в (5) получим

$$h_{kj}\Omega^k_i + h_{ik}\Omega^k_j = 0.$$

В выбранном репере последнее равенство примет следующий вид: $\lambda_k \delta_{kj} \Omega^k_i + \lambda_i \delta_{ik} \Omega^k_j = 0$ или $(\lambda_i - \lambda_j)\Omega^i_j = 0$ (нет суммирования). Так как $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$, то $\Omega^i_j = 0$ и внутренняя связность базисной поверхности локально евклидова. Утверждение 2) доказано. $\square$

Литература

1. Бляшке В. *Дифференциальная геометрия.* – М.–Л.: Гостехиздат, 1935. – 330 с.
2. Вагнер В.В. *Теория поля локальных гиперполос* // Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу. – М.: МГУ. – 1950. – Вып. 8. – С. 197–272.
3. Акивис М.А., Василян М.А. *О гиперполосах кривизны в евклидовом пространстве* // Ткани и квазигруппы. – Калинин, 1990. – С. 104–102.
4. Чакмазян А.В. *Нормальная связность в геометрии подмногообразий.* – Ереван: Изд-во Айастан, 1990. – 115 с.
5. Лумисте Ю., Мирзоян В. *Подмногообразия с параллельной третьей фундаментальной формой* // Учен. зап. Тартуского ун-та. – 1984. – № 665. – С. 42–54.
6. Akivis M.A., Chakmazyan A.V. *Dual-normalized submanifolds and hynerbands of curvature* // Rend. sem. Mat. Messina Ser. II. – 2001. – № 8. – P. 1–11.
7. Chen B.Y. *Geometry of submanifolds.* – New York: Marcel Dekker, 1973. – 308 p.

Армянский государственный педагогический университет

Поступила 05.04.2004