

Л.Д. ЭСКИН

**УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ДИНАМИКУ
НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ
С РЕОЛОГИЧЕСКИМ ЗАКОНОМ РЕЙНЕРА–РИВЛИНА.
II. ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ**

Данная работа является продолжением статьи, опубликованной в № 3, 2004 г. журнала “Известия вузов. Математика”. Нумерация разделов и формул продолжает нумерацию первой части работы, обозначения из которой здесь сохраняются.

5. Оптимальные системы подалгебр

Элемент $U = u_1X_1 + u_2X_2 + u_3X_3$ алгебры L_3 порождает действующий в ее векторном пространстве оператор $\text{Ad } U \langle X \rangle = X \circ U$. В базе $X_i, i = 1, 2, 3$, этот оператор задается матрицей

$$\begin{pmatrix} u_3 & 0 & -u_1 \\ 0 & 2u_3 & -2u_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а внутренний автоморфизм $\exp(t_1 \text{Ad } X_1) \exp(t_2 \text{Ad } X_2) \exp(t_3 \text{Ad } X_3)$ — матрицей

$$A(t_1, t_2, a) = \begin{pmatrix} a & 0 & -t_1 \\ 0 & a^2 & -2t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \exp t_3 > 0.$$

Автоморфизм A переводит вектор $\sum_{i=1}^3 e_i X_i$ в $\sum_{i=1}^3 e'_i X_i$,

$$e'_1 = a e_1 - t_1 e_3, \quad e'_2 = a^2 e_2 - 2t_2 e_3, \quad e'_3 = e_3. \tag{5.1}$$

С помощью соотношений (5.1) вычисляются оптимальные системы θ_1 и θ_2 подалгебр алгебры L_3 . Результаты вычислений приведены в табл. 1.

Таблица 1. Оптимальная система подалгебр алгебры L_3

$k = 1$	X_i
$k = 2$	X_i, X_j

При вычислении оптимальной системы подалгебр алгебры L_4^a удобно перейти к базе $Y_1 = X_1, Y_2 = X_2, Y_3 = X_4^a - (n+1)X_3, Y_4 = X_4^a$. В этой базе действие внутреннего автоморфизма на вектор $Y = e_1 Y_1 + e_2 Y_2 + e_3 Y_3 + e_4 Y_4$ задается с помощью соотношений

$$e'_1 = b^{n+1} e_1 - (n+1)t_1 e_4, \quad e'_2 = b a^{-2n-1} e_2 + t_2((2n+1)e_3 - e_4), \quad e'_3 = e_3, \quad e'_4 = e_4, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Вычисленные на их основе оптимальные системы $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ подалгебр алгебры L_4^a приведены в табл. 2.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 00-01-00128).

Таблица 2. Оптимальная система подалгебр алгебры L_4^a

$k = 1$	$Y_i; Y_3 + \mu Y_4; Y_1 \pm Y_2; Y_1 \pm Y_3; \frac{1}{2n+1} Y_3 + Y_4 \pm Y_2$
$k = 2$	$Y_i, Y_j; Y_1, Y_3 + \mu Y_4; Y_2, Y_3 + \mu Y_4; Y_2, Y_1 + \mu Y_3; Y_1, \frac{1}{2n+1} Y_3 \pm Y_2; Y_1 + \mu Y_2, Y_3 - \frac{2n+1}{n} Y_4$
$k = 3$	$Y_i, Y_j, Y_s; Y_1, Y_2, Y_3 + \mu Y_4$

В случае алгебры L_4^b удобно перейти к базе $Y_1 = X_1, Y_2 = X_2, Y_3 = X_3 - X_4^b, Y_4 = X_4^b$. Действие внутреннего автоморфизма на вектор $\sum_{i=1}^4 e_i Y_i$ задается с помощью формул

$$e'_1 = ce_1 - t_1 e_3, \quad e'_2 = c^{-b} d^{2+b} e_2 + t_2 (be_3 - (2+b)e_4), \quad e'_3 = e_3, \quad e'_4 = e_4, \quad c > 0, \quad d > 0.$$

Вычисленная на их основе оптимальная система подалгебр алгебры L_4^b приведена в табл. 3.

Таблица 3. Оптимальная система подалгебр алгебры L_4^b

$k = 1$	$Y_i; Y_3 + \mu Y_4; Y_1 \pm Y_2; Y_1 + \mu Y_4; Y_3 + \frac{b}{2+b} Y_4 \pm Y_2$
$k = 2$	$Y_i, Y_j; Y_1, Y_3 + \mu Y_4; Y_2, Y_3 + \mu Y_4; Y_2, Y_1 + \mu Y_4; Y_1 \pm Y_2, Y_3 + \frac{b+1}{b+2} Y_4; Y_1, Y_3 + \frac{b}{b+2} Y_4 \pm Y_2$
$k = 3$	$Y_i, Y_j, Y_s; Y_1, Y_2, Y_3 + \mu Y_4$

Наконец, полагая $b = 0$ в табл. 3, получим оптимальные системы подалгебр алгебры L_4^c . Параметр μ в таблицах принимает любые вещественные значения, причем любые две подалгебры с различными значениями μ не подобны. Размерности подалгебр в табл. 1–3 обозначены через k .

6. Инвариантные решения

Полученные таблицы полностью классифицируют с точностью до преобразований из допускаемой группы инвариантные на ее подгруппах решения всех найденных инвариантных уравнений. Однако нас в первую очередь будут интересовать инвариантные решения уравнения

$$u_t = (\operatorname{sgn} u_x u^2 f(|v|))_x, \quad v = uu_x, \quad (6.1)$$

где $f(z)$ — монотонно возрастающая при $z > 0$ функция, удовлетворяющая условию А. Именно уравнение (6.1) полностью описывает гидродинамику пленки неньютоновской жидкости с реологическим законом Рейнера–Ривлина [1], [2], неизвестная функция u в уравнении (6.1) — толщина пленки.

Результатами группового анализа уравнения (6.1) можно воспользоваться, рассматривая его монотонные решения (поскольку любое решение можно “сшить” из монотонных, это ограничение несущественно). Наибольший интерес среди инвариантных решений уравнения (6.1) представляют решения, инвариантные на однопараметрических группах. Интересны также зависящие от параметра μ семейства инвариантных решений на подалгебре $X_a = X_3 + \mu X_4^a$ и $X_b = X_3 + \mu X_4^b$. В первом случае (f — степенная функция, что соответствует реологическому закону Оствальда–Ли) инвариантные решения автомодельны и полностью изучены [3]. Рассмотрим второй случай, т. е. уравнение

$$u_t = \left(\operatorname{sgn} u_x u^2 \left(\frac{|v|}{|v|+1} \right)^\beta \right)_x, \quad v = uu_x, \quad \beta > 0. \quad (6.2)$$

Для монотонного инвариантного на подгруппе $X_3 + \mu X_4^b$ решения u уравнения (6.2) справедливо представление

$$u = t^{1+\mu(1+\beta)} p(J), \quad J = t^{-(2+\mu(1+2\beta))} \left(x \pm \frac{u^2}{2} \right) \quad (6.3)$$

(знаки “+” в инварианте J для возрастающего, “–” для убывающего решений), $p(J)$ в случае возрастающей u — решение нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения

$$(p^{2+\beta} p'^\beta)' + (2 + \mu(1 + 2\beta)) J p' - (1 + \mu(1 + \beta)) p = 0, \quad (6.4)$$

а в случае убывающей u — решение уравнения

$$(p^{2+\beta}(-p')^\beta)' - (2 + \mu(1 + 2\beta))Jp' + (1 + \mu(1 + \beta))p = 0. \quad (6.5)$$

Важной особенностью группы X_b является отсутствие у нее в отличие от X_a инвариантов, зависящих лишь от x и t . Поэтому представление (6.3) для инвариантного решения u даже в случае определения функции p из уравнения (6.4) дает лишь трансцендентное уравнение для u . В силу условия монотонности функции u для ее определения из уравнения (6.3) необходимо найти ее область определения (в которой она монотонна). Рассмотрим этот вопрос для монотонно возрастающего решения. Из представления (6.3) следует, что необходимым и достаточным условием возрастания (убывания) инвариантного решения является справедливость неравенства $0 < pp' < t^{-\mu}$, $p > 0$ ($0 > pp' > -t^{-\mu}$, $p > 0$). Пусть решение $p(J)$ уравнения (6.4) монотонно возрастает на интервале (J_0, J_1) (возможно, что $J_0 = -\infty$, $J_1 = \infty$). Рассмотрим в плоскости J , q абсциссы $\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots$ точек пересечения кривой $q = pp'$ с прямой $q = t^{-\mu}$ ($t > 0$ фиксировано), принадлежащие интервалу $I = (J_0, J_1)$. Эти точки разбивают интервал I на подынтервалы и пусть $I_i = (\gamma_i, \gamma_{i+1})$ (возможно, что $\gamma_i = J_0$, $\gamma_{i+1} = J_1$) — такой подынтервал, на котором $0 < q(J) < t^{-\mu}$. Тогда можно показать, что решение u уравнения (6.3) будет возрастать на интервале $(x_i(t), x_{i+1}(t))$, где

$$\begin{aligned} x_i &= t^{2+\mu(1+2\beta)} \left(\gamma_i(t) - t^\mu \frac{p^2(\gamma_i(t))}{2} \right), \\ x_{i+1} &= t^{2+\mu(1+2\beta)} \left(\gamma_{i+1}(t) - t^\mu \frac{p^2(\gamma_{i+1}(t))}{2} \right). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Объединение этих интервалов и дает при заданном $t > 0$ область определения монотонно возрастающего инвариантного решения u уравнения (6.2).

Аналогично, если $p(J)$ — монотонно убывающее на интервале I решение уравнения (6.5), $\delta_1(t), \delta_2(t), \dots$ — абсциссы точек пересечения кривой $q = pp'$ и прямой $q = -t^{-\mu}$ и $I_i = (\delta_i, \delta_{i+1})$ — подынтервал, на котором $0 > q(J) > -t^{-\mu}$, то решение u уравнения (6.3) убывает на интервале $(x_i(t), x_{i+1}(t))$, где

$$x_i = t^{2+\mu(1+2\beta)} \left(\delta_i + t^\mu \frac{p^2(\delta_i)}{2} \right), \quad x_{i+1} = t^{2+\mu(1+2\beta)} \left(\delta_{i+1} + t^\mu \frac{p^2(\delta_{i+1})}{2} \right). \quad (6.7)$$

Рассмотрим следующий пример. Положим $\mu = -\frac{3}{2+3\beta}$ и $J_0 > 0$ произвольно. Тогда уравнение (6.5) имеет на интервале $I = (0, J_0)$ монотонно убывающее решение

$$p(J) = c_\beta (J_0^{-\chi} - J^{-\chi})^\lambda, \quad \chi = -\frac{\beta+1}{\beta}, \quad \lambda = \frac{\beta}{2\beta+1}, \quad c_\beta = (-\chi\lambda)^{-\lambda} (2+3\beta)^{-\chi/\beta}.$$

Функция

$$q = pp' = \chi\lambda c_\beta^2 J^{1/\beta} (J_0^{-\chi} - J^{-\chi})^{-\lambda/\beta} < 0$$

монотонно убывает на интервале I , причем $q(0) = 0$, $q(J_0) = -\infty$. Следовательно, при любом $t > 0$ существует единственное решение $J = \delta(t)$ уравнения $q = -t^{-\mu}$, причем $0 > q(J) > -t^{-\mu}$ на интервале $(0, \delta(t))$. С помощью соотношений (6.7) получаем, что уравнение (6.3) определяет монотонно убывающее инвариантное решение u уравнения (6.2) (его можно найти численно, напр., методом Ньютона) на интервале (x_0, x_1) , где

$$\begin{aligned} x_0 &= c_\beta^2 J_0^{-2\chi\lambda} t^{-2\chi}, \quad \chi = (2+3\beta)^{-1}, \\ x_1 &= t^{-\chi} \left(\delta + \frac{1}{2} \chi^2 \delta^2 t^{-(3+6\beta)\chi} \right). \end{aligned} \quad (6.8)$$

При выводе соотношений (6.8) воспользовались уравнением

$$-\chi\lambda c_\beta^2 \delta^{1/\beta} (J_0^{-\chi} - \delta^{-\chi})^{-\lambda/\beta} = t^{3\chi} \quad (6.9)$$

для функции $\delta(t)$. Для значений u на концах интервала получаем

$$u_{\max} = c_{\beta} J_0^{-\varkappa\lambda} t^{-\varkappa}, \quad u_{\min} = \delta \varkappa t^{-(3\beta+1)\varkappa}.$$

Из уравнения (6.9) нетрудно найти асимптотику $\delta(t)$ при $t \ll 1$ и $t \gg 1$, а затем изучить динамику волны на малых и больших временах. Будем иметь

$$\begin{aligned} x_1 &\sim c_{\beta} \varkappa^{-1} J_0^{-\chi\lambda} t^{(3\beta+1)\varkappa} + x_0(t), & u(t, x_1) &\sim u(t, x_0), & t &\ll 1; \\ x_1 &\sim J_0 t^{-\varkappa}, & u(t, x_1) &\sim \varkappa J_0 t^{-(3\beta+1)\varkappa}, & t &\gg 1. \end{aligned}$$

Таким образом, $u(t, x)$ — идущая из ∞ δ -образная на малых временах волна, которая на больших временах размывается вдоль всей полуоси $x > 0$.

7. Классификация монотонных решений уравнений (6.4), (6.5)

Из результатов п. 6 следует, что задача классификации монотонных инвариантных решений уравнения (6.2) сводится к задаче классификации монотонно убывающих при $J > 0$ решений уравнения (6.5) и монотонно возрастающих при $J > 0$ решений уравнения (6.4).

Уравнение (6.5) допускает группу растяжений, следовательно, и понижение порядка. Полагая при $J > 0$

$$p = zJ^{-\chi\lambda}, \quad y = J \frac{dz}{dJ}, \quad W = y - \chi\lambda z, \quad (7.1)$$

так что

$$p' = J^{-\lambda} W, \quad (7.2)$$

получим уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dz} = \frac{R_1(y, z)}{Q_1(y, z)}, \quad (7.3)$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= z^{\beta+1} (-W)^{\beta-1} \left((2 + \beta)yW + (3\beta + 2) \frac{\lambda}{\beta} zW - \beta\lambda\chi yz \right) + (2 + \mu(1 + 2\beta))y + \frac{\lambda}{\beta} z, \\ Q_1 &= -\beta y z^{2+\beta} (-W)^{\beta-1}. \end{aligned}$$

Монотонно убывающие решения $p(J)$ уравнения (6.5) порождаются в силу уравнений (7.1) интегральными кривыми уравнения (7.3), принадлежащими сектору I плоскости z, y , который является пересечением полуплоскостей $z > 0$ и $W < 0$, причем каждое однопараметрическое семейство интегральных кривых порождает двухпараметрическое семейство решений уравнения (6.5), а каждая интегральная кривая — однопараметрическое семейство решений. Таким образом, задача классификации монотонно убывающих решений уравнения (6.5) сводится к задаче классификации интегральных кривых уравнения (7.3), которая может быть рассмотрена с помощью стандартных методов теории динамических систем на плоскости [4]. Ниже будем полагать, что $\beta > 1$ целое (случай $\beta = 1$ здесь не исследуется). Опуская детали достаточно громоздких исследований (изучение ветвей изоклины нуля, конечных особых точек и особых точек в ∞ , асимптотики интегральных кривых в окрестности особых точек), приведем окончательные результаты. В дальнейшем будем использовать следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\beta}{2\beta + 1}, \quad \sigma = \frac{\beta + 1}{2\beta + 1}, \quad \chi = -\frac{\beta + 1}{\beta}, \quad \nu = \frac{1}{\beta - 1}, \quad \zeta = -\frac{\beta + 2}{\beta}, \quad \varphi = -\frac{1}{\beta + 1}, \\ \varkappa &= 1 + \mu(1 + \beta), \quad \rho = 2 + \mu(1 + 2\beta), \quad d_1 = |\varkappa|, \quad d_2 = \sigma^{-1/\beta} d_1 z_0^{\zeta}, \\ d_3 &= |\rho|^{\nu}, \quad k_1 = -\frac{2\beta + 1}{\rho}, \quad k_2 = \frac{\lambda\varphi(3\beta + 2)}{2\beta}, \quad p_1 = |J_0^{-\chi} - J^{-\chi}|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_2 &= \left| \frac{J - J_1}{J_1} \right|, \quad \tau(A) = (2|A|)^{-1/2\chi} J_0^{-\lambda/2\beta}; \\
i &= 0, 1, 2, \quad y_i = -\sigma z_i, \quad l_i = (\beta\sigma\nu(\beta + 1)z_i^{\beta+3})^{-\nu}, \\
R_i^\pm &= y_i \pm d_2|z_i - z|^{1/\beta}, \quad T^\pm(d_2) = J_1^\sigma \left(z_i \pm d_2 \frac{(\sigma z_i)^{1/\beta}}{\chi p_2^\chi} \right), \\
S_i^\pm &= y_i \pm l_i|z_i - z|^\nu, \quad V_i^\pm = J_1^\sigma \left(z_i \pm l_i \frac{(\sigma z_i)^\nu}{\beta\nu p_2^{\beta\nu}} \right), \\
K(D) &= p_0(1 + Dp_0^{-1/\sigma}J), \quad L(d_1) = p_0 \left(1 - \frac{d_1}{\chi p_0^{1/\lambda} J^\chi} \right); \\
\theta_0(\mu) &= \begin{cases} 0, & \mu_2 < \mu < 0; \\ \frac{1}{2}J_0^2, & \mu = 0; \\ \infty, & \mu > 0, \end{cases} & \theta_1(\mu) = \begin{cases} 0, & \mu_2 < \mu < 0; \\ \frac{1}{2}J_1^2, & \mu = 0; \\ \infty, & \mu > 0, \end{cases} \\
F_0(t, A) &= J_0 t^\rho \left(1 + \left(\frac{\tau^2(A)t^\mu}{2} \right)^{-1/\varphi} \right), \quad F_1^\pm(t) = J_0 t^\rho \left(1 \pm \frac{\lambda}{2\beta} J_0 d_3^{2\beta} t^{\rho-2} \right), \\
G_i^\pm(t) &= J_1 t^\rho \left(1 \pm \frac{z_i^2}{2} J_1^{\lambda/\beta} t^\mu \right).
\end{aligned}$$

Оказывается, существуют две точки бифуркации $\mu_1 = -2\lambda/\beta$ и $\mu_2 = \varphi$, поэтому приходится по отдельности рассматривать четыре случая: 1) $\mu \leq \mu_1$, 2) $\mu_1 < \mu < \mu_2$, 3) $\mu = \mu_2$, 4) $\mu > \mu_2$.

Во всех случаях в секторе I имеются два однопараметрических семейства L_1 и L_2 интегральных кривых уравнения (7.3) и разделяющая их интегральная кривая S (рис. 1–3). В табл. 4 приведены асимптотики интегральных кривых и определяющие их параметры.

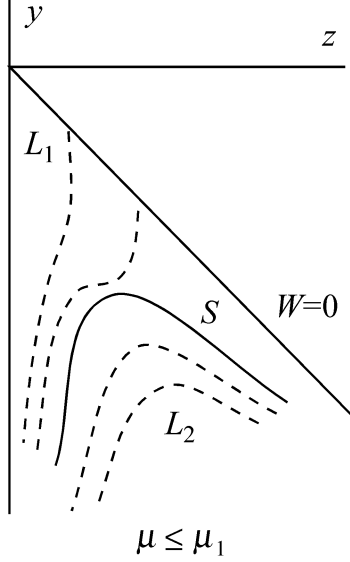


Рис. 1

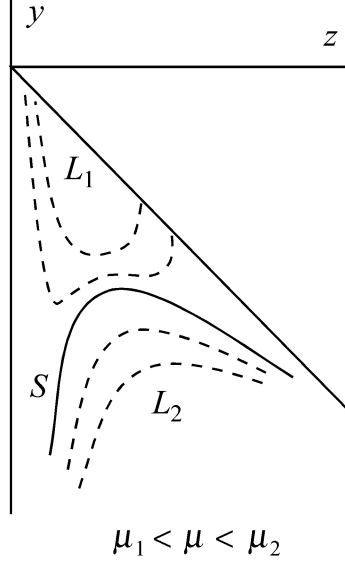


Рис. 2

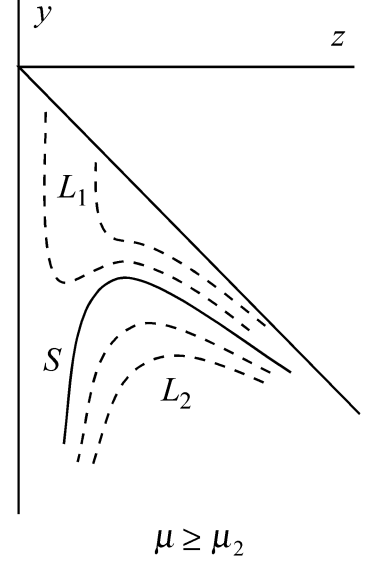


Рис. 3

Замечание 1. В формулах табл. 4 $\tilde{A} < 0$, $\tilde{D} < 0$ — коэффициенты, которые определяются лишь численно для каждого заданных значений μ , β ; $z_0 > 0$, $A < 0$ — соответственно параметры семейств L_1 и L_2 . Запись вида $A = A(z_0)$, $D = D(z_0)$ и т. п. означает, что соответствующий коэффициент в асимптотике является функцией параметра.

Таблица 4. Асимптотики интегральных кривых уравнения (7.3)

S	$\mu \leq \mu_1, y \sim \tilde{A}z^\zeta,$ $z \rightarrow 0; W \sim -d_1z^\chi,$ $z \rightarrow \infty$	$\mu_1 < \mu < \mu_2,$ $y \sim -d_3z^\chi, z \rightarrow 0;$ $W \sim -d_1z^\chi,$ $z \rightarrow \infty$	$\mu = \mu_2,$ $y \sim -(-\varphi)^{1/\beta}z^\chi,$ $z \rightarrow 0; W \sim \tilde{D}z^{1/\chi},$ $z \rightarrow \infty$	$\mu > \mu_2, y \sim -d_3z^\chi,$ $z \rightarrow 0; W \sim \tilde{D}z^{1/\chi},$ $z \rightarrow \infty$
L_1	$y \sim Az^\zeta, z \rightarrow 0,$ $A = A(z_0) > \tilde{A};$ $y \sim R_0^-(d_2),$ $z \rightarrow z_0 - 0, y \rightarrow y_0 - 0$	$y \sim k_1z,$ $z \rightarrow 0; y \sim R_0^-(d_2),$ $z \rightarrow z_0 - 0, y \rightarrow y_0 - 0$	$y \sim R_0^-(l_0), z \rightarrow$ $z_0 + 0, y \rightarrow y_0 - 0;$ $W \sim Dz^{1/\chi}, z \rightarrow \infty,$ $D = D(z_0) > \tilde{D}$	$y \sim R_0^-(d_2), z \rightarrow$ $z_0 + 0, y \rightarrow y_0 - 0;$ $W \sim Dz^{1/\chi}, z \rightarrow \infty,$ $D = D(z_0) > \tilde{D}$
L_2	$y \sim Az^\zeta, z \rightarrow 0,$ $A < \tilde{A}, W \sim Dz^{1/\chi},$ $z \rightarrow \infty,$ $D = D(A) < 0$	$y \sim Az^\zeta, z \rightarrow 0,$ $A < 0, W \sim Dz^{1/\chi},$ $z \rightarrow \infty, D = D(A) < 0$	$y \sim Az^\zeta, z \rightarrow 0,$ $A < 0, W \sim Dz^{1/\chi},$ $z \rightarrow \infty, D = D(A) < \tilde{D}$	$y \sim Az^\zeta, z \rightarrow 0,$ $A < 0, W \sim Dz^{1/\chi},$ $z \rightarrow \infty, D = D(A) < \tilde{D}$

С целью классификации монотонно возрастающих при $J > 0$ решений уравнения (6.4) снова выполним подстановку (7.1). Получим соотношение (7.2) и уравнение

$$\frac{dy}{dz} = \frac{P_2(z, y)}{Q_2(z, y)}, \quad (7.4)$$

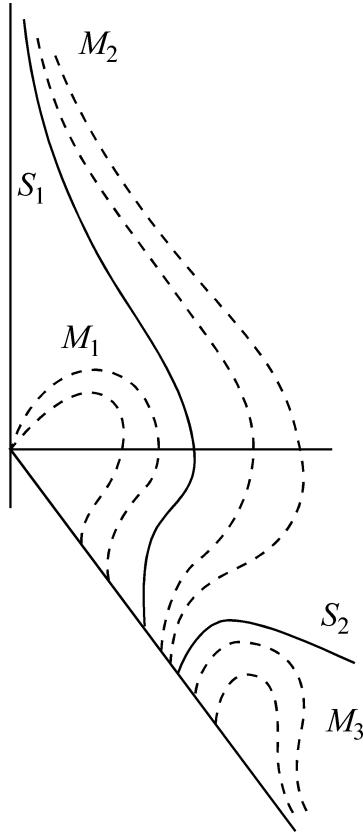
$$P_2 = z^{\beta+1}W^{\beta-1}[(2 + \beta)yW + (1 + \sigma)zW + \beta\sigma yz] + (2 + \mu(1 + 2\beta))W - (1 + \mu(1 + \beta))z,$$

$$Q_2 = -\beta yz^{2+\beta}W^{\beta-1}.$$

Монотонно возрастающие при $J > 0$ решения уравнения (6.4) порождаются в силу (7.1), (7.2) интегральными кривыми уравнения (7.4), принадлежащими сектору Π — пересечению плоскостей $z > 0$ и $W > 0$. Точками бифуркации уравнения (7.4) снова являются $\mu = \mu_1$ и $\mu = \mu_2$. В секторе Π имеем три однопараметрических семейства M_1, M_2, M_3 интегральных кривых уравнения (7.4) и две разделяющие их интегральные кривые: S_1 и S_2 (рис. 4–6). Асимптотики интегральных кривых S_1, S_2 и семейств M_1, M_2 и M_3 представлены в табл. 5.

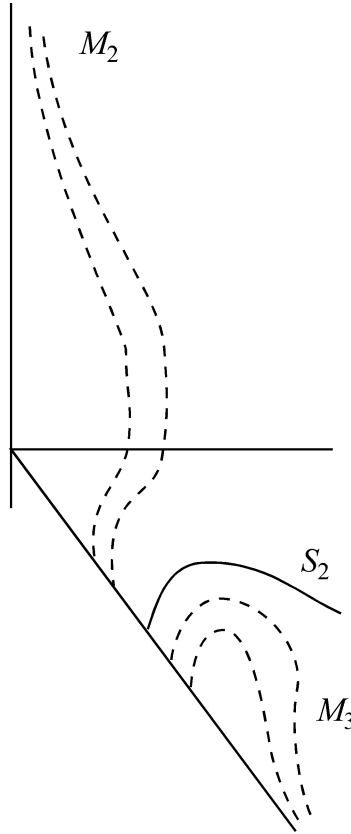
Таблица 5. Асимптотики интегральных кривых уравнения (7.4)

	$\mu \leq \mu_1$	$\mu_1 < \mu < \mu_2$	$\mu = \mu_2$	$\mu > \mu_2$
S_1	$y \sim d_3z^\chi, z \rightarrow 0;$ $y \sim R_1^+(d_2), z \rightarrow$ $z_1 + 0, y \sim y_1 + 0$			$y \sim k_1z, z \rightarrow 0;$ $y \sim k_2z, z \rightarrow \infty$
S_2	$y \sim R_2^+(d_2), z \rightarrow$ $z_2 + 0, y \rightarrow y_2 + 0,$ $z_2 > z_1; y \sim k_2z,$ $z \rightarrow \infty$	$y \sim R_2^+(d_2), z \rightarrow$ $z_2 + 0, y \rightarrow y_2 + 0,$ $z_2 > z_1; y \sim k_2z,$ $z \rightarrow \infty$	$y \sim S_2^+; z \rightarrow z_2 + 0,$ $y \rightarrow y_2 + 0, z_2 > z_1;$ $y \sim k_2z, z \rightarrow \infty$	$y \sim k_1z, z \rightarrow 0;$ $W \sim d_1z^\chi, z \rightarrow \infty$
M_1	$y \sim k_1z, z \rightarrow 0; y \sim$ $R_0^+(d_2), z \rightarrow z_0 + 0,$ $y \rightarrow y_0 + 0, z_0 < z_1$			$y \sim k_1z, z \rightarrow 0; y \sim$ $Az^\zeta, z \rightarrow 0, A > 0$
M_2	$y \sim R_0^+(d_2), z \rightarrow$ $z_0 + 0, y \rightarrow y_0 + 0,$ $z_1 < z_0 < z_2;$ $y \sim Az^\zeta, z \rightarrow 0,$ $A = A(z_0) > 0$	$y \sim R_0^+(d_2), z \rightarrow$ $z_0 + 0, y \rightarrow y_0 + 0,$ $0 < z_0 < z_2;$ $y \sim Az^\zeta, z \rightarrow 0,$ $A = A(z_0) > 0$	$y \sim S_0^+, z \rightarrow$ $z_0 + 0, y \rightarrow y_0 + 0,$ $0 < z_0 < z_2; y \sim Az^\zeta,$ $z \rightarrow 0,$ $A = A(z_0) > 0$	$y \sim k_1z, z \rightarrow 0;$ $W \sim Dz^{1/\chi}, z \rightarrow \infty,$ $D > 0$
M_3	$y \sim R_0^+(d_2), z \rightarrow$ $z_0 + 0, y \rightarrow y_0 + 0,$ $z_0 > z_2; W \sim Dz^{1/\chi},$ $z \rightarrow \infty,$ $D = D(z_0) > 0$	$y \sim R_0^+(d_2), z \rightarrow$ $z_0 + 0, y \rightarrow y_0 + 0,$ $z_0 > z_2; W \sim Dz^{1/\chi},$ $z \rightarrow \infty,$ $D = D(z_0) > 0$	$y \sim S_0^+ z \rightarrow z_0 + 0,$ $y \rightarrow y_0 + 0, z_0 > z_2;$ $W \sim Dz^{1/\chi}, z \rightarrow \infty,$ $D = D(z_0) > 0$	$y \sim k_1z, z \rightarrow 0;$ $y \sim R_0^+(d_2),$ $z \rightarrow z_0 - 0,$ $y \rightarrow y_0 - 0$



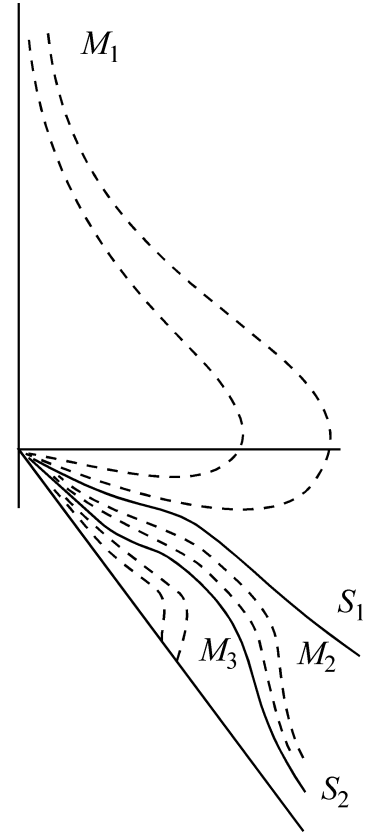
$$\mu \leq \mu_1$$

Рис. 4



$$\mu_1 < \mu \leq \mu_2$$

Рис. 5



$$\mu > \mu_2$$

Рис. 6

Замечание 2. В формулах табл. 5 $z_0 > 0$ — параметр семейств M_1, M_2, M_3 при $\mu \leq \mu_2$. При $\mu \geq \mu_2$ параметром семейства M_1 является $A > 0$, семейства M_2 — $D > 0$, семейства M_3 — $z_0 > 0$. Величины z_1, z_2 , определяющие интегральные кривые S_1, S_2 ($(z_1, y_1), (z_2, y_2)$ — координаты точек прямой $W = 0$, из которых выходят эти кривые), могут быть определены лишь численно.

Используя асимптотики табл. 4 и 5 и соотношения (7.1), можно исследовать асимптотическое поведение монотонно убывающих решений уравнения (6.5) и монотонно возрастающих решений уравнения (6.4) вблизи концов интервалов, на которых решение монотонно.

В табл. 6 приведены асимптотики монотонно убывающих решений $p(J)$ уравнения (6.5), принадлежащих однопараметрическому семейству $N(S, J_0)$, порожденному в силу (7.1) интегральной кривой S уравнения (7.3), и решений $p(J)$, принадлежащих двухпараметрическим семействам $N(L_1, J_0, z_0), N(L_2, J_0, A)$ ($J_0 > 0, z_0 > 0, A < 0$ — параметры семейств), порожденным однопараметрическими семействами L_1 и L_2 интегральных кривых уравнения (7.3).

С помощью соотношения (7.2) нетрудно убедиться, что асимптотика производной p' в окрестности концов интервала, на котором определено монотонно убывающее решение p , получается дифференцированием асимптотики $p(J)$, после чего без труда находится и асимптотика функции $q = pp'$. Для удобства читателя приводим в табл. 6 значения функции q на концах интервала (используем при этом обозначения $p_0 = p(0), q_0 = q(0)$).

Аналогичные результаты для монотонно возрастающих решений уравнения (6.4) (однопараметрические семейства $N(S_1, J_0), N(S_2, J_0)$ и двухпараметрические семейства $N(M_i, J_0, z_0)$) представлены в табл. 7.

Таблица 6. Асимптотики убывающих решений $p(J)$ уравнения (6.5)

	$N(S)$	$N(L_1)$
$\mu \leq \mu_1$	$p \sim \tau(A)p_1^{-1/2\chi}, J \rightarrow J_0 - 0; p \sim L(d_1), J \rightarrow 0; 0 \leq J \leq J_0, q_0 = 0, q(J_0) = -\infty$	$p \sim \tau(A)p_1^{-1/2\chi}, J \rightarrow J_0 - 0; p \sim T_0^+(d_2), J \rightarrow J_1 + 0; J_1 \leq J \leq J_0, q(J_1) = 0, q(J_0) = -\infty$
$\mu_1 < \mu < \mu_2$	$p \sim (d_3 p_1 \sigma^{-1})^\lambda, J \rightarrow J_0 - 0; p \sim L(d_1), J \rightarrow 0; 0 \leq J \leq J_0, q_0 = 0, q(J_0) = -\infty$	$p \sim J_0 J^{\sigma+k_1}, J \rightarrow \infty; p \sim T_0^+(d_2), J \rightarrow J_1 + 0; J_1 \leq J < \infty, q(J_1)=0, q(\infty)=0$
$\mu = \mu_2$	$p \sim \frac{(\beta p_1 \lambda^{-1})^\lambda}{(\beta+1)^\sigma}, J \rightarrow J_0 - 0; p \sim K(\tilde{D}), J \rightarrow 0; 0 \leq J \leq J_0, q_0 = \tilde{D} p_0^{-\varphi} < 0, q(J_0) = -\infty$	$p \sim V_0^-, J \rightarrow J_1 - 0; p \sim K(D), J \rightarrow 0; 0 \leq J \leq J_1, q_0 = D p_0^{-\varphi} < 0, q(J_1) = 0$
$\mu > \mu_2$	$p \sim (d_3 p_1 \sigma^{-1})^\lambda, J \rightarrow J_0 - 0; p \sim K(\tilde{D}), J \rightarrow 0; 0 \leq J \leq J_0, q_0 = \tilde{D} p_0^{-\varphi} < 0, q(J_0) = -\infty$	$p \sim T_0^-(d_2), J \rightarrow J_1 - 0; p \sim K(D), J \rightarrow 0; 0 \leq J \leq J_1, q_0 = D p_0^{-\varphi} < 0, q(J_1) = 0$
	$N(L_2)$	
$-\infty < \mu < \infty$	$p \sim \tau(A)p_1^{-1/2\chi}, J \rightarrow J_0 - 0; p \sim K(D), J \rightarrow 0; 0 \leq J \leq J_0, q_0 = D p_0^{-\varphi} < 0, q(J_0) = -\infty, D = D(A)$	

 Таблица 7. Асимптотики возрастающих решений $p(J)$ уравнения (6.4)

	$N(S_1)$	$N(M_1)$
$\mu \leq \mu_1$	$p \sim (d_3 p_1 \sigma^{-1})^\lambda, J \rightarrow J_0 + 0; p \sim T_1^+(d_2), J \rightarrow J_1 - 0, J_0 \leq J \leq J_1, q(J_0) = \infty, q(J_1) = 0$	$p \sim J_0 J^{k_1+\sigma}, J \rightarrow 0; p \sim T_0^+(d_2), J \rightarrow J_1 - 0; 0 \leq J \leq J_1, q_0 = 0, q(J_1) = \infty$
$\mu > \mu_2$	$p \sim J_0 J^{-1/2\chi}, J \rightarrow 0; p \sim J_1 J^{k_1+\sigma}, J \rightarrow \infty; 0 \leq J < \infty, q_0 = \infty, q(\infty) = \theta_1(\mu)$	$p \sim \tau(A)p_1^{-1/2\chi}, J \rightarrow J_0 + 0; p \sim J_1 J^{k_1+\sigma}, J \rightarrow \infty; J_0 \leq J < \infty, q(J_0) = \infty, q(\infty) = \theta_1(\mu)$
	$N(S_2)$	
$\mu < \mu_2$	$p \sim J_0 J^{-1/2\chi}, J \rightarrow 0; p \sim T_2^+(d_2), J \rightarrow J_1 - 0; 0 \leq J \leq J_1, q_0 = \infty, q(J_1) = 0$	$p \sim \tau(A)p_1^{-1/2\chi}, J \rightarrow J_0 + 0; p \sim T_0^+(d_2), J \rightarrow J_1 - 0; J_0 \leq J \leq J_1, q(J_0) = \infty, q(J_1) = 0$
$\mu = \mu_2$	$p \sim J_0 J^{-1/2\chi}, J \rightarrow 0; p \sim V_2^-, J \rightarrow J_1 - 0; 0 \leq J \leq J_1, q_0 = \infty, q(J_1) = 0$	$p \sim \tau(A)p_1^{-1/2\chi}, J \rightarrow J_0 + 0; p \sim V_0^+, J \rightarrow J_1 - 0; J_0 \leq J \leq J_1, q(J_0) = \infty, q(J_1) = 0$
$\mu > \mu_2$	$p \sim L(d_1), J \rightarrow 0; p \sim J_0 J^{k_1+\sigma}, J \rightarrow \infty; 0 \leq J < \infty, q_0 = 0, q(\infty) = \theta_0(\mu)$	$p \sim K(D), J \rightarrow 0; p \sim J_0 J^{k_1+\sigma}, J \rightarrow \infty; 0 \leq J < \infty, q_0 = D p_0^{-\varphi} > 0, q(\infty) = \theta_0(\mu)$
	$N(M_3)$	
$\mu < \mu_2$	$p \sim K(D), J \rightarrow 0; p \sim T_0^+(d_2), J \rightarrow J_1 - 0; 0 \leq J \leq J_1, q_0 = D p_0^{-\varphi} > 0, q(J_1) = 0$	
$\mu = \mu_2$	$p \sim K(D), J \rightarrow 0; p \sim V_0^-, J \rightarrow J_1 - 0; 0 \leq J \leq J_1, q_0 = D p_0^{-\varphi} > 0, q(J_1) = 0$	
$\mu > \mu_2$	$p \sim J_0 J^{k_1+\sigma}, J \rightarrow \infty; p \sim T_0^+(d_2), J \rightarrow J_1 + 0; J_1 \leq J < \infty, q(J_1) = 0, q(\infty) = \theta_0(\mu)$	

Итак, классифицированы монотонно возрастающие при $J = x + \frac{u^2}{2} > 0$ решения $p(J)$ уравнения (6.4) и монотонно убывающие при $J = x - \frac{u^2}{2} > 0$ решения $p(J)$ уравнения (6.5). Полагая $\tilde{p} = z(-J)^\sigma, y = J \frac{dz}{dJ}, W = y + \sigma z$ при $J < 0$, получим в случае возрастающего решения $\tilde{p}(J), J = x + \frac{u^2}{2}$, из (6.4) уравнение (7.3) в секторе I, а в случае убывающего решения $\tilde{p}(J), J = x - \frac{u^2}{2}$, из (6.5) — уравнение (7.4) в секторе II. Отсюда следует, что возрастающие при $J < 0$ решения $\tilde{p}(J)$ уравнения (6.4) получаются из убывающих решений p уравнения (6.5), которые полностью классифицированы вместе с асимптотиками в табл. 6 согласно формуле $\tilde{p}(J) = p(-J), J = x + \frac{u^2}{2} < 0$. Точно так же получаются убывающие при $J = x - \frac{u^2}{2} < 0$ решения \tilde{p} урав-

нения (6.5) из возрастающих решений p уравнения (6.4), указанных в табл. 7. Таким образом, в табл. 6, 7 полностью классифицированы монотонные решения уравнений (6.4) (возрастающие решения) и (6.5) (убывающие решения).

8. Асимптотические свойства инвариантных решений

В пункте 6 показано, что каждое монотонное решение $p(J)$ уравнений (6.4), (6.5) порождает по меньшей мере одно монотонное решение $u_i(t, x)$, определенное на интервале I_i , который определяется с помощью соотношения (6.6) для монотонно возрастающих и (6.7) — для монотонно убывающих решений. После определения интервала I_i (для чего приходится решать уравнение $q = pp' = t^{-\mu}$ в случае возрастающих и уравнение $q = pp' = -t^{-\mu}$ в случае убывающих решений) решение u_i находится из трансцендентного уравнения (6.3), где $x \in (x_i, x_{i+1})$. Очевидно, что как уравнения (6.4), (6.5), так и уравнения для определения границ интервала I_i , а затем и уравнение (6.3) для u_i могут быть решены лишь численно. Однако с помощью указанных в табл. 6, 7 асимптотических представлений для $p(J)$, из которых нетрудно получить и асимптотику $q(J)$, удастся показать, что как на малых, так и на больших временах каждое монотонное решение $p(J)$ порождает не более одного (в исключительных случаях — двух) монотонного решения u , определенного на интервале $(x_0(t), x_1(t))$, причем для граничных точек x_0, x_1 и значений решения $u(t, x)$ в этих точках удастся получить их асимптотику для малых и больших времен (следует, однако, отметить, что не все монотонные решения существуют, сохраняя свою монотонность, глобально по t). Соответствующие результаты приводим, опуская выкладки, в табл. 8, 9 для $t \gg 1$.

Таблица 8. Асимптотические свойства убывающих решений уравнения (6.2) ($t \gg 1$)

	$N(S)$
$\mu \leq \mu_1$	$x_0 = 2^{-1}p_0^2t^{2\kappa}, u_0 = p_0t^\kappa; x_1 \sim F_0(t, \tilde{A}), u_1 \sim 2^{-\beta/2}J_0^{1/2}(\tau(\tilde{A}))^{-1/\varphi}t^{\kappa+\frac{\beta\mu}{2}}$
$\mu_1 < \mu < \mu_2$	$x_0 = 2^{-1}p_0^2t^{2\kappa}, u_0 = p_0t^\kappa; x_1 \sim F_1^+(t), u_1 \sim J_0d_3^\beta t^{\rho-1}$
$\mu = \mu_2$	$x_0 = 2^{-1}p_0^2, u_0 = p_0; x_1 \sim J_0t^{-\varphi}(1 - \frac{\sigma J_0\varphi^\sigma}{2t^{1/\sigma}}), u_1 \sim -J_0\varphi t^{1/\chi}$
$\mu_2 < \mu < 0$	$x_0 = 2^{-1}p_0^2t^{2\kappa}, u_0 = p_0t^\kappa; x_1 \sim F_1^+(t), u_1 \sim J_0d_3^\beta t^{\rho-1}$
	$N(L_1)$
$\mu \leq \mu_1$	$x_0 \sim G_0^+(t), u_0 \sim J_1^\sigma z_0 t^\kappa; x_1 \sim F_0(t, A), u_1 \sim 2^{-\beta/2}J_0^{1/2}(\tau(A))^{-1/\varphi}t^{\kappa+\frac{\beta\mu}{2}}$
$0 < \mu < \infty$	$x_0 \sim x_1 + \frac{J_1^\sigma \varphi z_0^{1/\varphi}}{\sigma d_2^\beta} t^{\rho-\beta\mu}, u_0 \sim u_1 - \frac{t}{\sigma \chi d_2^\beta z_0^{\beta+2}}; x_1 = G_0^+(t), u_1 = J_1^\sigma z_0 t^\kappa$
	$N(L_2)$
$\mu < 0$	$x_0 = 2^{-1}J_0\tau^2(A)t^{2\kappa}, u_0 = p_0t^\kappa; x_1 \sim J_0t^\rho(1 - 2^{1/\varphi}(\tau(A))^{-2/\varphi}t^{-\mu/\varphi}),$ $u_1 \sim 2^{-\beta/2}J_0^{1/2}(\tau(A))^{-1/\varphi}t^{\kappa+\frac{\beta\mu}{2}}$

Таблица 9. Асимптотические свойства возрастающих решений $u(t, x)$ уравнения (6.2) ($t \gg 1$)

	$N(S_1)$
$\mu \leq \mu_1$	$x_0 \sim F_1^-(t), u_0 \sim J_0d_3^\beta t^{\rho-1}; x_1 = G_1^-(t), u_1 = J_1^\sigma z_1 t^\kappa$
$\mu_2 < \mu < 0$	$x_0 \sim -\beta^{-1}(-\frac{2\chi}{J_0^\beta})^{1/\varphi}t^{\rho+\kappa-1}, u_0 \sim (-\frac{1}{2\chi})^{\beta/2}J_0^{\beta+1}t^{(\rho+\kappa-1)/2}; x_1 = \infty, u_1 = \infty$
	$N(S_2)$
$\mu \leq \mu_2$	$x_0 \sim -\beta^{-1}(-\frac{2\chi}{J_0^\beta})^{1/\varphi}t^{\rho+\kappa-1}, u_0 \sim (-\frac{1}{2\chi})^{\beta/2}J_0^{\beta+1}t^{(\rho+\kappa-1)/2}; x_1 = G_2^-(t),$ $u_1 = J_1^\sigma z_2 t^\kappa$
$\mu_2 < \mu < 0$	$x_0 = -2^{-1}p_0^2t^{2\kappa}, u_0 = p_0t^\kappa; x_1 = \infty, u_1 = \infty$
$\mu > 0$	$x_0 = -2^{-1}p_0^2t^{2\kappa}, u_0 = p_0t^\kappa; x_1 \sim -p_0t^{2\kappa}(\frac{p_0}{2} - \frac{t^{1-\kappa}}{\beta d_1^\beta}), u_1 \sim p_0t^\kappa(1 - \frac{\chi t^{1-\kappa}}{p_0 d_1^\beta})$

Асимптотика функций $x_0(t), x_1(t) > x_0(t)$ и $u_0 = u_{\max} = u(t, x_0), u_1 = u_{\min} = u_1(t, x_1)$ для убывающих решений $u(t, x)$ уравнения (6.2), порожденных убывающими при $J > 0$ решениями $p(J)$ уравнения (6.5) из табл. 6, приведена в табл. 8, а для возрастающих решений $u(t, x)$, порожденных возрастающими при $J > 0$ решениями $p(J)$ уравнения (6.4) из табл. 7 — в табл. 9,

где $u_0 = u_{\min} = u(t, x_0)$, $u_1 = u_{\max} = u(t, x_1)$ (желая избежать чрезмерной громоздкости табл. 9, ограничились семействами $N(S_1)$, $N(S_2)$ из табл. 7).

С учетом сказанного в конце п. 7 нетрудно получить аналогичные результаты и для монотонных решений $u(t, x)$ уравнения (6,2), порожденных возрастающими при $J < 0$ решениями уравнения (6.4) и убывающими при $J < 0$ решениями уравнения (6.5).

Литература

1. *CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations // Appl. in Engineering and Physical Sci.* / Ed. Ibragimov N.H. – CRC Press. – London–Tokyo, 1995. – V. 2. – P. 546.
2. Астарита Дж., Маруччи Дж. *Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей.* – М.: Мир, 1978. – 309 с.
3. Chugunov V.A., Eskin L.D., Tonkonog S.L. *Methods of group analysis in dynamics of non-Newtonian fluid // Proc. Chebotarev Centennial Conf.* – Kazan, 1994, June 6–11. – Valter de Gruyter: Amsterdam, Berlin, New York, 1996. – P. 31–40.
4. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости.* – М.: Наука, 1990. – 488 с.

*Казанский государственный
университет*

*Поступили
первый вариант 19.12.2000
окончательный вариант 13.06.2003*