ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 4 (503)

УДК 517.958

Г.Н. АГЛЯМЗЯНОВА, Р.С. ХАЙРУЛЛИН

ЗАДАЧА ТРИКОМИ В КЛАССЕ ФУНКЦИЙ, НЕОГРАНИЧЕННЫХ НА ХАРАКТЕРИСТИКЕ

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{sgn} y u_{xx} + u_{yy} + \frac{2q}{y} u_x + \frac{2p}{y} u_y = 0, \quad p < 0, \tag{1}$$

где p, q — вещественные параметры, в смешанной области D, эллиптическая подобласть которой D_1 совпадает со всей верхней полуплоскостью, а гиперболическая подобласть D_2 представляет собой треугольник, ограниченный характеристиками BC: $x - y = 1$, AB: $x + y = 0$ и отрезком AC оси абсцисс.

Введем следующие обозначения: $2p = \beta + \beta'$, $2q = \beta - \beta'$. Задача Трикоми для уравнения (1) была исследована в работе [1]. Было доказано, что в случае $\beta > 0$, $\beta' < 0$ задача имеет единственное решение при выполнении $n + 1$ или $n + 2$ условий разрешимости в зависимости от значения параметра c, входящего в условие склеивания. Здесь $n \in N_0 = N \cup \{0\}$ и выполняется неравенство $0 < \beta - n < 1$, $\beta_0 = \beta - n$.

Отличительной особенностью данной статьи является исследование задачи Трикоми в классе функций, неограниченных на характеристике BC, что позволяет снять указанные условия разрешимости.

Пусть $k, m \in N$ и $0 < \beta' + k < 1$, $\beta_0' = \beta' + k$, $0 < 2p + m < 1$; $\delta = 2p + m$. Будем исследовать случай $1 < \beta_0 + \beta_0' < 2$. Тогда имеем $\beta_0 > \delta$, $\beta_0' > \delta$, $m = k - n - 1$.

Задача T. *Найти функцию $u(x, y)$ со свойствами*

1) *$u(x, y)$ принадлежит $C(D_1 \cup D_2 \cup AB \cup \{(x; 0)\})$ и ограничена на бесконечности;*
2) *$u(x, y)$ принадлежит $C^2(D_1 \cup D_2)$ и удовлетворяет уравнению (1) в $D_1 \cup D_2$;*
3) *существуют пределы*

$$v_j(x) = \lim_{\substack{y \to 0 \\ (x,y) \in D_j}} |y|^{2p} [u(x, y) - A^j_{p,q}(x, y, \tau)]_y, \quad 0 < x < 1, \quad j = 1, 2, \tag{2}$$

и на AC выполняется условие склеивания

$$v_1(x) = c v_2(x), \quad 0 < x < 1, \tag{3}$$

где

$$\tau(x) = u(x, 0), \quad 0 \le x \le 1, \tag{4}$$

$A^j_{p,q}(x, y, \tau) = \sum\limits_{l=1}^{m} \frac{a^j_l}{l!} \tau^{(l)}(x) y^l$, $a^1_l = l_1 (-1)^l \int\limits_0^{\pi} e^{2q\xi} \cos^l \xi \sin^{-2p-l} \xi \, d\xi$, $l_1 = B(1 - p - iq,\ 1 - p + iq)/4^p \pi e^{\pi q}$, *$B$ — бета-функция, $c > 0$ — параметр, $a^2_l = F(-l, \beta, \beta + \beta', 2)$, F — гипергеометрическая функция Гаусса;*

4) *$u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям*

$$u(x, 0) = 0, \ x \le 0 \ \text{ или } \ x \ge 1, \ u(x, y)|_{AB} = \psi(x), \ 0 \le x \le \tfrac{1}{2}.$$

Здесь $\psi(x)$ — заданная функция, для которой выполняется

Условие 1. Функция $\psi(\frac{x}{2}) \in C[0,1)$ при $x=0$ имеет нуль порядка больше $1-\delta$, а при $x=1$ имеет особенность порядка меньше β.

Решение задачи Трикоми будем искать в классе функций $\tau(x)$, $v_i(x)$, для которых выполняется

Условие 2. Функция $\tau(x)$ принадлежит $C[0,1] \cap C^{m-1}(0,1] \cap C^k(0,1)$, $\tau^{(m)}(x)$ при $x = 1$ имеет особенность порядка меньше δ, $\tau(x)$ при $x=0$ имеет нуль порядка больше $1-\delta$; функции $v_i(x) \in C^n(0,1)$ могут иметь особенности при $x = 1$ порядка меньше 1, при $x = 0$ — порядка меньше m.

Задачу будем решать методом интегральных уравнений. Соотношения из эллиптической и гиперболической подобластей, полученные в [1], справедливы для класса функций, где $\tau(x) \in C[0,1] \cap C^m(0,1]$, $v_i(x) \in C^n(0,1)$. Поэтому эти соотношения можно использовать и в данном случае. Они имеют вид

$$v_1(x) = -l_1\Gamma(2p)D_{0x}^{1-2p}\tau(x) - l_1 e^{2\pi q}\Gamma(2p)D_{x1}^{1-2p}\tau(x), \tag{5}$$

$$v_2(x) = l_2\Gamma(2p)D_{0x}^{1-2p}\tau(x) - \frac{\Gamma(1-\beta')2^{1-\beta-\beta'}}{\Gamma(1-\beta-\beta')}x^{\beta'}D_{0x}^{1-\beta}\psi\left(\frac{x}{2}\right), \tag{6}$$

где $l_2 = \frac{2\Gamma(1-\beta')}{\Gamma(\beta)(1-\beta-\beta')}$, D_{0x}^{1-2p}, D_{x1}^{1-2p} — дробные производные.

Из условий 1, 2 и формулы (5) получим

$$\tau^{(s)}(1) = 0, \quad s = \overline{0, m-1}. \tag{7}$$

Перейдем к выводу интегрального уравнения. Используя условие склеивания (3), из соотношений (5) и (6) имеем

$$(l_1 + cl_2)D_{0x}^{1-2p}\tau(x) + l_1 e^{2\pi q}D_{x1}^{1-2p}\tau(x) = l_3 x^{\beta'}D_{0x}^{1-\beta}\psi\left(\frac{x}{2}\right), \tag{8}$$

где $l_3 = \frac{c2^{1-\beta-\beta'}\Gamma(1-\beta')}{\Gamma(2p)(1-\beta-\beta')}$.

Дальнейший способ вывода уравнения отличается от предложенного в [1]. Обе части равенства (8) при $x = 0$ имеют особенности порядка меньше m. Применим к нему оператор $\int\limits_0^x (x-\xi)^{-\delta}\xi^m \ldots d\xi$. Используя формулу ([2], с. 78) $x^{-a-b}M(a,b,l,x) = \frac{d^l}{dx^l}x^{l-a-b}M(a,b-l,0,x)$, где $M(a,b,l,x) = \int\limits_0^x g^{(l)}(\sigma)\sigma^b(x-\sigma)^{a-1}d\sigma$, $a > 0$, $b > l-1$, получим

$$(l_1 + cl_2)x^{1-2p}\frac{d^m}{dx^m}x^{\delta-1}D_{0x}^{\delta-1}D_{0x}^{1-\delta}\tau(x) + l_1 e^{2\pi q}x^{1-2p}\frac{d^m}{dx^m}x^{\delta-1}D_{0x}^{\delta-1}D_{x1}^{1-\delta}\tau(x) = \\ = l_3\int_0^x (x-\xi)^{-\delta}\xi^{m+\beta'}D_{0\xi}^{1-\beta}\psi\left(\frac{\xi}{2}\right)d\xi. \tag{9}$$

На основе формул композиции дробных производных и интегралов ([3], сс. 18, 24) выражение (9) примет вид

$$(l_1 + cl_2)x^{1-2p}\frac{d^m}{dx^m}x^{\delta-1}\tau(x) + l_1 e^{2\pi q}x^{1-2p}\frac{d^m}{dx^m}x^{\delta-1}\Bigg[\tau(x)\cos\pi(1-\delta) - \\ - \frac{\sin\pi(1-\delta)}{\pi}\int_0^1\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{1-\delta}\frac{\tau(\sigma)d\sigma}{\sigma - x}\Bigg] = l_3 D_{0x}^{\delta-1}x^{m+\beta'}D_{0x}^{1-\beta}\left(\frac{x}{2}\right).$$

Обозначим $\mu(x) = x^{\delta-1}\tau(x)$ и после приведения подобных членов получим интегральное уравнение

$$\mu^{(m)}(x)\operatorname{ctg}\pi\varphi - \frac{1}{\pi}\frac{d^m}{dx^m}\int_0^1 \frac{\mu(\sigma)d\sigma}{\sigma - x} = f(x), \tag{10}$$

где

$$f(x) = \frac{l_3\Gamma(1-\delta)x^{2p-1}}{l_1 e^{2\pi q}\sin\pi(1-\delta)} D_{0x}^{\delta-1} x^{m+\beta'} D_{0x}^{1-\beta}\psi\left(\frac{x}{2}\right), \quad \varphi = \frac{1}{\pi}\operatorname{arcctg}\left(\frac{l_1 + cl_2}{l_1 e^{2\pi q}\sin\pi(1-\delta)} + \operatorname{ctg}\pi(1-\delta)\right).$$

У функции $\mu^{(m)}(x)$ допускаются особенности при $x = 0$ порядка меньше m, при $x = 1$ — меньше δ. Такие же особенности имеет функция $f(x)$.

Учитывая равенства (7), получим

$$\mu^{(s)}(1) = 0, \quad s = \overline{0, m-1}. \tag{11}$$

Преобразуем уравнение (10). Будем заносить операцию дифференцирования под знак интеграла. Первую производную можно вычислить, непосредственно дифференцируя плотность интеграла типа Коши. Для следующих производных можно использовать формулу дифференцирования интеграла с ядром типа Коши с плотностью, допускающей интегрируемые особенности. Она имеет вид [4]

$$Q(x)\frac{d}{dx}\int_0^1 \frac{g(\sigma)d\sigma}{\sigma - x} = \int_0^1 \frac{[Q(\sigma)g(\sigma)]'}{\sigma - x}d\sigma + \int_0^1 \frac{g(\sigma)}{\sigma - x}\frac{Q(x) - Q(\sigma)}{\sigma - x}d\sigma.$$

Чтобы избавиться от особенности при $x = 0$, положим $Q = x$. Тогда последнее соотношение примет вид

$$\frac{d}{dx}\int_0^1 \frac{g(\sigma)d\sigma}{\sigma - x} = \int_0^1 \left(\frac{\sigma}{x}\right)\frac{g'(\sigma)}{\sigma - x}d\sigma. \tag{12}$$

Рассмотрим выражение

$$\frac{d^{m-s}}{dx^{m-s}}\int_0^1 \left(\frac{\sigma}{x}\right)^{s-1}\frac{\mu^{(s)}(\sigma)d\sigma}{\sigma - x} =$$
$$= \frac{d^{m-s-1}}{dx^{m-s-1}}\left\{-\frac{s-1}{x^s}\int_0^1 \frac{\sigma^{s-1}\mu^{(s)}(\sigma)}{\sigma - x}d\sigma + \frac{1}{x^{s-1}}\frac{d}{dx}\int_0^1 \frac{\sigma^{s-1}\mu^{(s)}(\sigma)}{\sigma - x}d\sigma\right\}, \quad s = \overline{0, m-1}.$$

Применяя формулу (12) ко второму слагаемому в правой части, имеем

$$\frac{d^{m-s}}{dx^{m-s}}\int_0^1 \left(\frac{\sigma}{x}\right)^{s-1}\frac{\mu^{(s)}(\sigma)d\sigma}{\sigma - x} = \frac{d^{m-s-1}}{dx^{m-s-1}}\left\{\frac{-(s-1)}{x^s}\int_0^1 \frac{\sigma^{s-1}\mu^{(s)}(\sigma)}{\sigma - x}d\sigma + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{x^{s-1}}\int_0^1 \frac{\sigma}{x}\frac{(s-1)\sigma^{s-2}\mu^{(s)}(\sigma)}{\sigma - x}d\sigma + \frac{1}{x^{s-1}}\int_0^1 \frac{\sigma}{x}\frac{\sigma^{s-1}\mu^{(s+1)}(\sigma)}{\sigma - x}d\sigma\right\} = \frac{d^{m-s-1}}{dx^{m-s-1}}\int_0^1 \left(\frac{\sigma}{x}\right)^s \frac{\mu^{(s+1)}(\sigma)d\sigma}{\sigma - x}.$$

Отсюда получим

$$\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\int_0^1 \frac{\mu(\sigma)d\sigma}{\sigma - x} = \int_0^1 \left(\frac{\sigma}{x}\right)^{m-1}\frac{\mu^{(m)}(\sigma)d\sigma}{\sigma - x}.$$

В результате уравнение (10) примет вид

$$\mu^{(m)}(x)\operatorname{ctg}\pi\varphi - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \left(\frac{\sigma}{x}\right)^{m-1}\frac{\mu^{(m)}(\sigma)d\sigma}{\sigma - x} = f(x). \tag{13}$$

Обозначим $\rho(x) = \mu^{(m)}(x)x^{m-1}$, $g(x) = x^{m-1}f(x)$. Тогда (13) перейдет в уравнение

$$\rho(x)\operatorname{ctg}\pi\varphi - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\rho(\sigma)d\sigma}{\sigma - x} = g(x). \tag{14}$$

Функция $g(x)$ может иметь особенности при $x = 0$ порядка меньше 1, при $x = 1$ — меньше δ. Такие же особенности имеет функция $\psi(x)$. Заметим, что уравнение (14) в классе функций, неограниченных при $x = 0$ и $x = 1$, имеет решение с особенностью при $x = 0$ порядка φ, при $x = 1$ — порядка $1 - \varphi$ ([5]). Но $\varphi < \frac{1}{\pi} \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} \pi(1-\delta)) = 1 - \delta$, т. е. $1 - \varphi > \delta$. Поэтому необходимо использовать формулу решения, ограниченного при $x = 1$. Такое решение единственно. Далее решение исходной задачи находится по стандартной схеме. При восстановлении функции $\mu(x)$ используются равенства (11). Единственность решения задачи Трикоми следует из однозначности определения вспомогательных функций и единственности решений задачи Дирихле и задачи типа Коши.

Итак, доказана

Теорема 1. *Если функция $\psi(x)$ удовлетворяет условию 1, то в классе функций $\tau(x)$, $v_i(x)$, удовлетворяющих условию 2, задача Трикоми имеет единственное решение.*

Исследуем поведение решения $u(x, y)$ на характеристике BC. Решение задачи типа Коши (1), (2), (4) записывается формулой [1]

$$
\begin{aligned}
u(x,y) = \sum_{s=0}^{k-1} \frac{\tau^{(s)}(x-y)2^s(\beta')_s}{s!(\beta+\beta')_s} y^s - \sum_{s=0}^{n-1} \frac{v^{(s)}(x-y)2^s(-1)^s(1-\beta)_s}{s!(1-\beta-\beta')_{s+1}}(-y)^{1-\beta-\beta'+s} + \\
+ \frac{\Gamma(\beta+\beta')2^k y^k}{\Gamma(\beta')\Gamma(\beta+k)} \int_0^1 \tau^{(k)}(\varsigma)\sigma^{\beta+k-1} F(\beta,\, 1-\beta',\, \beta+k,\, \sigma)d\sigma - \\
- \frac{\Gamma(1-\beta-\beta')2^n(-1)^n(-y)^{1-\beta-\beta'+n}}{\Gamma(1-\beta'+n)\Gamma(1-\beta)} \int_0^1 v^{(n)}(\varsigma)\sigma^{n-\beta'} F(\beta,\, 1-\beta',\, 1-\beta'+n,\, \sigma)d\sigma.
\end{aligned}
$$

С новой переменной интегрирования $\varsigma = x + y(1 - 2\sigma)$ получим

$$
\begin{aligned}
u(x,y) = \sum_{s=0}^{k-1} \frac{\tau^{(s)}(x-y)2^s(\beta')_s}{s!(\beta+\beta')_s} y^s - \sum_{s=0}^{n-1} \frac{v^{(s)}(x-y)2^s(-1)^s(1-\beta)_s}{s!(1-\beta-\beta')_{s+1}}(-y)^{1-\beta-\beta'+s} + \\
+ \frac{\Gamma(\beta+\beta')2^{-\beta}y^{-\beta}}{\Gamma(\beta')\Gamma(\beta+k)} \int_{x+y}^{x-y} \tau^{(k)}(\varsigma)(x+y-\varsigma)^{\beta+k-1} F\Big(\beta,\, 1-\beta',\, \beta+k,\, \frac{x+y-\varsigma}{2y}\Big)d\varsigma - \\
- \frac{\Gamma(1-\beta-\beta')2^{\beta'-1}(-1)^{\beta'-1}(-y)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta'+n)\Gamma(1-\beta)} \int_{x+y}^{x-y} v^{(n)}(\varsigma)(x+y-\varsigma)^{n-\beta'} F\Big(\beta,\, 1-\beta',\, 1-\beta'+n,\, \frac{x+y-\varsigma}{2y}\Big)d\varsigma = \\
= S_1(x-y) - S_2(x-y) + I_1(x-y) - I_2(x-y). \quad (15)
\end{aligned}
$$

Оценим каждое слагаемое из правой части (15) при $x - y = t \to 1$. Учитывая

$$
\tau^{(k-1)}(t) = o\big((1-t)^{1-2p-k}\big) \;\; \text{при} \;\; t \to 1, \tag{16}
$$

имеем

$$
|S_1(t)| \le \sum_{s=0}^{k-1} \left| \frac{\tau^{(s)}(x-y)2^s(\beta')_s}{s!(\beta+\beta')_s}(x-t)^s \right| \le \frac{2^{k-1}(\beta')_{k-1}}{(k-1)!(\beta+\beta')_{k-1}} M(x-t)^{k-1}(1-t)^{-\delta-n}.
$$

Отсюда получим $S_1 = o\big((1-t)^{-n}\big)$ при $t \to 1$.

Аналогично из $v(t) = o\big((1-t)^{-1}\big)$ при $t \to 1$ имеем $S_2(t) = o\big((1-t)^{-n}\big)$ при $t \to 1$.

С использованием переменной $t = x - y$ запишем

$$
I_1(t) = \frac{\Gamma(\beta+\beta')2^{-\beta}(t-x)^{-\beta}}{\Gamma(\beta')\Gamma(\beta+k)} \int_{2x-t}^{t} \tau^{(k)}(\varsigma)(\varsigma-(2x-t))^{\beta+k-1} F\Big(\beta,\, 1-\beta',\, \beta+k,\, \frac{\varsigma-(2x-t)}{2(t-x)}\Big)d\varsigma.
$$

Применяя последовательно соотношение (16) и формулу автотрансформации для гипергеометрической функции, получим

$$|I_1(t)| \le C_1(t-x)^{-\beta}\int_{2x-t}^{t}(1-\zeta)^{-2p-k+\varepsilon}(\varsigma-(2x-t))^{\beta+k-1}\left(1-\frac{\varsigma-(2x-t)}{2(t-x)}\right)^{\beta_0'-1}d\varsigma =$$

$$= C_1(t-x)^{1-\beta-\beta_0'}\int_{2x-t}^{t}(1-\zeta)^{-2p-k+\varepsilon}(\varsigma-(2x-t))^{\beta+k-1}(t-\zeta)^{\beta_0'-1}d\varsigma,$$

где $\zeta = t-(2t-2x)z$. Тогда

$$|I_1(t)| \le C_3(t-x)^k(1-t)^{-2p-k+\varepsilon}F(\beta_0',\, 2p+k-\varepsilon,\, \beta_0'+\beta+k,\, \eta), \quad \eta = 2(x-t)/(1-t).$$

Используя формулу Больца (15.3.4) [6], имеем

$$|I_1(t)| \le C_3(t-x)^k(1-t)^{-2p-k+\varepsilon}(1-\eta)^{-\beta_0'}F\left(\beta_0',\, \beta_0'+\beta-2p+\varepsilon,\, \beta_0'+\beta+k,\, \frac{\eta}{\eta-1}\right) =$$

$$= C_3(t-x)^k(1-t)^{-2p-k+\beta_0'+\varepsilon}(1-(2x-t))^{-\beta_0'}F\left(\beta_0',\, \beta_0'+\beta-2p+\varepsilon,\, \beta_0'+\beta+k,\, \frac{2x-2t}{2x-t-1}\right) =$$

$$= O\big((1-t)^{-\beta+\varepsilon}\big) \ \text{ при } \ t\to 1.$$

Аналогично получим $I_2(t) = O\big((1-t)^{-\beta+\varepsilon}\big)$ при $t\to 1$.

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Решение $u(x,y)$ при $x-y=t\to 1$ имеет особенность порядка ниже β.*

Литература

1. Хайруллин Р.С. *Задача Трикоми для одного уравнения с сингулярными коэффициентами* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 3. – С. 68–76.
2. Хайруллин Р.С. *Задача Трикоми для дифференциальных уравнений с сильным вырождением на линии изменения типа*: Дисс. … докт. физ.-матем. наук. – Казань, 1994. – 289 с.
3. Смирнов М.М. *Уравнения смешанного типа.* – М.: Наука, 1970. – 295 с.
4. Чибрикова Л.И., Плещинский Н.Б. *Об интегральных уравнениях с обобщенными логарифмическими и степенными ядрами* // Изв. вузов. Математика. – 1978. – № 6. – С. 129–146.
5. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – 3-е изд. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
6. *Справочник по специальным функциям*: Пер. с англ. / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 830 с.

Казанская государственная
архитектурно-строительная академия

Поступила
09.07.2002