И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2000 МАТЕМАТИКА № 1 (452)

УДК 517.929

А.И. МАЛИКОВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ СТРУКТУРНЫМИ ИЗМЕНЕНИЯМИ

1. Введение

Рассматриваются системы с конечным числом структурных состояний. Предполагается, что в каждом структурном состоянии система описывается своим обыкновенным векторным дифференциальным уравнением, а процесс изменения структурных состояний представляется однородной марковской цепью с заданными вероятностями переходов [1]-[3]. В данной работе для исследования вероятностной устойчивости таких систем, называемых системами случайной структуры [4], используется метод векторных функций Ляпунова (ВФЛ). Аналогичные модели систем со случайными параметрическими и структурными изменениями рассматривались в ряде работ [1]–[12]. В них исследование вероятностной устойчивости проводилось с помощью метода функций Ляпунова [1], [5]–[10], и ВФЛ [2], [11], [12]. При этом однако предполагалось, что размерность фазового пространства остается неизменной при смене структурных состояний.

Отметим, что для стохастических дифференциальных уравнений Ито теория устойчивости развита в работах [5]–[7]. Обзор современного состояния прикладной теории стохастической устойчивости дан в [8], [9].

2. Постановка задачи

Пусть возмущенное движение системы, находящейся в момент времени t в l-м структурном состоянии, описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), l(t)), \tag{1}$$

где $x \in R^{n_l}$ — n_l-вектор фазовых координат системы в l-м структурном состоянии, $t \in I = [0, +\infty)$, $l(t) \in J = \{1, 2, \dots, k\}$; вектор-функция f непрерывна по $(t, x) \in I \times \Omega_l$ ($\Omega_l \subseteq R^{n_l}$) при каждом фиксированном $l(t)$, $f(t, 0, l) = 0$, удовлетворяет условию Липшица по x равномерно относительно $t \in I$ и $l(t) \in J$: при любых $x', x'' \in \Omega_l$, $t \in I$

$$\|f(t, x', l) - f(t, x'', l)\|_{l(t)} \le L\|x' - x''\|_{l(t)},$$

где величины

$$\|x\|_{l(t)} = \max_{j=\overline{1, n_{l(t)}}} |x_j|; \quad \|x\|_{l(t)} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n_{l(t)}} |x_j|^2}, \tag{2}$$

при каждом t ($l(t)$) будут, очевидно, удовлетворять всем аксиомам нормы.

Структурное состояние системы в момент времени t определяется переменной $l(t)$, изменение которой описывается однородной марковской цепью с конечным числом состояний J. Переходы марковской цепи, для которых задана матрица $P(\tau)$ вероятностей переходов в виде

$$P(\tau) = (p_{ij}(\tau))_{i,j=1}^{k} = [P(l(t+\tau)) = i \mid l(t) = j]_{i,j=1}^{k}, \quad p_{ij}(\tau) = \alpha_{ij}\tau + O(\tau), \tag{3}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93-011-16112).

где $\alpha_{ij} \geq 0$ при $i,j = \overline{1,k}$, $i \neq j$; $\alpha_{ii} = \alpha_i = \sum\limits_{j \neq i}^{k} \alpha_{ji}$, определяют процесс смены структурных состояний в исходной системе. Обозначим через t_s, $s = 1,2,\dots$, моменты скачков процесса $l(t)$, а через $\Theta = \{t_s,\ s = 1,2,\dots\}$ — их множество. Будем предполагать, что если в момент $t = t_s$ происходит скачок из состояния j в состояние i, то в этот момент выполняется условие стыковки процесса $x(t)$ при переходе из j-го структурного состояния в i-е

$$x(t_s + 0) = x(t_s) = \varphi_{ij}(t, x(t_s - 0)), \quad i,j \in J, \ \ t \in \Theta, \tag{4}$$

где $x(t_s - 0)$, $x(t_s + 0)$ — соответственно левый и правый пределы $x(t)$ в точке t_s; $\varphi_{ij} : \Theta \times \Omega_j \to \Omega_i$, $\varphi_{ij}(t,x)$ — известные непрерывные по $x \in \Omega_j$ функции, $\varphi_{ij}(t,0) = 0$, $t \in \Theta$, и для них удовлетворяются условия Липшица

$$\|\varphi_{ij}(t,x') - \varphi_{ij}(t,x'')\|_i \leq L_{ij}\|x' - x''\|_j, \quad t \in \Theta.$$

Уравнения (1) вместе с соотношениями (3), (4) и начальные условия $x(t_0) = x_0$, $l(t_0) = l_0 \in J$ определяют в пространстве $R^{n_{l(t)}} \times J$ марковский процесс $z(t) = \{x(t), l(t)\}$, компонента $x(t)$ которого непрерывна при $t \in I \setminus \Theta$, непрерывна справа при $t \in \Theta$ и не имеет разрывов второго рода. Очевидно, система (1) при сделанных предположениях допускает решение $z(t) = (0, l(t))$, $t \in I$.

Исследуем вопрос о среднеквадратической устойчивости решения $x = 0$ системы (1). При этом устойчивость будем понимать в смысле обычных определений среднеквадратической устойчивости, в которых в качестве нормы вектора x будем подразумевать одну из норм (2).

3. Вектор-функции Ляпунова в исследовании устойчивости в среднеквадратичном

Исследование среднеквадратической устойчивости будем проводить с помощью метода ВФЛ [13]. Будет использована вектор-функция с компонентами в виде матричных функций для каждого состояния $l(t) \in J$. Аналог такой вектор-функции был введен Г.Н. Мильштейном [2], где с ее помощью исследована среднеквадратическая устойчивость линейной системы, находящейся под воздействием марковской цепи (в предположении непрерывности ее решений).

Введем конечномерное линейное нормированное пространство $G^k = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_k$ векторов $q = (Q_1, \dots, Q_k)^T$, компонентами которых являются симметрические $(n_i \times n_i)$-матрицы [2]. В пространстве G^k введем отношение частичного порядка с помощью конуса G^k_+ векторов $K = (K_1, \dots, K_k)^T \in G^k_+ = G_{1+} \times \dots \times G_{k+}$, компонентами которых являются неотрицательно определенные симметрические матрицы $K_i \in G_{i+}$, следующим образом: будем говорить, что $q_1 \leq q_2$, $q_1, q_2 \in G^k_+$, если $q_2 - q_1 \in G^k_+$; аналогично $q_1 < q_2$, если $q_2 - q_1 \in G^{k^+}$, где G^{k^+} — множество векторов из G^k, компонентами которых являются положительно определенные симметрические матрицы K_i.

Обозначим через $G^*_i = \{\psi \in R^{n_i} : \forall K_i \in G_{i^+},\ \psi^T K_i \psi \geq 0\}$ конус, сопряженный конусу G_{i^+}, а через $G^{k^*} = G^*_1 \times \dots \times G^*_k$ — конус, сопряженный конусу G^k_+. Отметим, что конус G^k_+ является воспроизводящим и телесным [2].

Определение. Назовем непрерывную векторно-матричную функцию $F(t,q) = \operatorname*{col}\limits_{s=\overline{1,k}}(F_s(t, Q_1, \dots, Q_k))$, $q \in G^k$, квазимонотонной относительно конуса G^k_+, если для любых $q_1, q_2 \in G^k$ таких, что $q_2 - q_1 \in G^k_+$, и для каждой ее s-й компоненты ($s = \overline{1,k}$) выполняются условия

1) для $Q'_\nu = Q''_\nu$ ($\nu \neq s$, $\nu = \overline{1,k}$), $Q''_s \geq Q'_s$ и некоторого $\psi \in G^*_s$ из условия $\psi^T(Q''_s - Q'_s)\psi = 0$ следует
$$\psi^T[F_s(t, Q''_1, \dots, Q''_s, \dots, Q''_k) - F_s(t, Q'_1, \dots, Q'_s, \dots, Q'_k)]\psi \geq 0;$$
2) для $Q''_\nu \geq Q'_\nu$ ($\nu \neq s$, $\nu = \overline{1,k}$), $Q'_s = Q''_s$ имеет место
$$F_s(t, Q''_1, \dots, Q''_s, \dots, Q''_k) - F_s(t, Q'_1, \dots, Q'_s, \dots, Q'_k) \geq 0$$

(неравенство относительно конуса G_{s+}).

Обозначим класс функций F, квазимонотонных относительно конуса G^k_+, через $W(G^k)$. Введем вектор-функцию $V = (v_1, \dots, v_k)^T$, компоненты $v_i(x)$ которой являются $(n_i \times n_i)$-матричные функции вектора x вида

$$v_i(x) = M[x(t)x^T(t)\chi_i(l(t)) \mid x_0, l(t_0)], \tag{5}$$

где $\chi_i(l(t) = j) = \delta_{ij}$ (δ_{ij} — символ Кронекера). Обозначим

$$M_i(l(t)) \overset{\text{def}}{=} M[x(t+\Delta t)x^T(t+\Delta t)\chi_i(l(t+\Delta t)) \mid x(t), l(t)].$$

С учетом (1), (3), (4) с точностью до $O(t)$ имеем

$$\begin{aligned} M_i(i) &= [x(t) + \Delta t f(t,x,i)][x(t) + \Delta t f(t,x,i)]^T \left(1 - \Delta t \sum_{j\neq i}^{k} \alpha_{ji}\right) = \\ &= x(t)x^T(t)\left(1 - \Delta t \sum_{j\neq i}^{k} \alpha_{ji}\right) + (f(t,x,i)x^T(t) + x(t)f^T(t,x,i))\Delta t, \\ M_i(j) &= \varphi_{ij}(t,x(t))\varphi_{ij}^T(t,x(t))\alpha_{ij}\Delta t. \end{aligned}$$

Полученные соотношения можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} M_i(l(t)) = x(t)x^T(t)\chi_i(l(t))(1 - \alpha_i\Delta t) + (f(t,x,i)x^T(t) + x(t)f^T(t,x,i))\chi_i(l(t))\Delta t + \\ + \sum_{j\neq i}^{k} \alpha_{ij}\varphi_{ij}(t,x(t))\varphi_{ij}^T(t,x(t))\chi_i(l(t))\Delta t. \end{aligned}$$

Предположим, что в области $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_k$ выполняются соотношения

$$\begin{gathered} \forall i \in J,\ \ x \in \Omega_i \subseteq R^{n_i} \quad (f(t,x,i)x^T + xf^T(t,x,i)) \le P_i(t, xx^T), \\ \forall i,j \in J,\ \ x \in \Omega_j \subseteq R^{n_j} \quad \varphi_{ij}(t,x)\varphi_{ij}^T(t,x) \le P_{ij}(t, xx^T), \end{gathered} \tag{6}$$

где $P_i : I \times G_i \to G_i$, $P_{ij} : I \times G_j \to G_i$ — непрерывные, симметрические матричные функции, $P_i(t,0) = 0$, $P_{ij}(t,0) = 0$, P_i квазимонотонные, а P_{ij} неубывающие в смысле упорядоченности, определенной с помощью конуса неотрицательно определенных матриц K_i. С учетом соотношений (6), применяя формулу повторных математических ожиданий и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$ в выражении для $[v_i(x(t+\Delta t)) - v_i(x(t))]/\Delta t$, получаем систему нелинейных матричных дифференциальных неравенств для указанной вектор-функции

$$\dot v_i \le P_i(t, v_i) - \alpha_i v_i + \sum_{j\neq i}^{k} \alpha_{ij}P_{ij}(t, v_j), \quad v_i(t_0) = x_0x_0^T\delta_{ij}, \quad l(t_0) = j. \tag{7}$$

Наряду с неравенствами (7) рассмотрим соответствующую им систему матричных дифференциальных уравнений

$$\dot Q_i = P_i(t, Q_i) - \alpha_i Q_i + \sum_{j\neq i}^{k} \alpha_{ij}P_{ij}(t, Q_j). \tag{8}$$

Лемма 1. *Векторно-матричная функция $F(t,q)$ правых частей системы матричных дифференциальных уравнений (8) квазимонотонна по конусу G^k_+ в G^k.*

Доказательство. Условие 1) определения квазимонотонности функции $F(t,q)$ выполнено в силу предположения о квазимонотонности функции P_i. Для доказательства справедливости условия 2) возьмем любые $q', q'' \in G^k$ такие, что для некоторого $s \in \{1, \dots, k\}$ $Q'_s = Q''_s$, а $Q'_\nu \le Q''_\nu$, $\nu \ne s$, $\nu = \overline{1,k}$. Тогда

$$F_s(t, q'') - F_s(t, q') = \{P_s(t, Q''_s) - \alpha_s Q''_s - P_s(t, Q'_s) + \alpha_s Q'_s\} + \sum_{j \ne s}^{k} \alpha_{sj} \{P_{sj}(t, Q''_j) - P_{sj}(t, Q'_j)\}.$$

Так как по условию $Q'_s = Q''_s$, $Q'_\nu \le Q''_\nu$, а функции P_{sj} неубывающие, то $P_{sj}(t, Q''_j) - P_{sj}(t, Q'_j) \ge 0$ и, следовательно,

$$F_s(t, q'') - F_s(t, q') = \sum_{j \ne s}^{k} \alpha_{sj} \{P_{sj}(t, Q''_j) - P_{sj}(t, Q'_j)\} \ge 0,$$

что и требовалось доказать.

Известно ([13], с. 29; [14]), что для удовлетворяющих условию квазимонотонности систем в конечномерном векторном пространстве справедлива теорема о дифференциальных неравенствах типа Чаплыгина. Почти дословно повторяя ее доказательство, получим теорему о дифференциальных неравенствах для системы (8) в пространстве G^k.

Теорема 1. *Пусть $\dot{q} = F(t, q)$, $F \in W(G^k)$. Тогда через каждую точку (t_0, q_0) проходит верхнее решение $\overline{q}(t, t_0, q_0)$, определенное на промежутке $[t_0, \mu)$. Если также дана функция $u(t)$-непрерывно-дифференцируемая в промежутке $[t_0, \mu)$, $\mu \le \infty$, такая, что $u(t_0) \le q(t_0)$ и выполняется дифференциальное неравенство $du/dt \le F(t, u(t))$ при $t \in [t_0, \mu)$, то $u(t) \le \overline{q}(t, t_0, q_0)$ при $t \in [t_0, \mu)$.*

Как следствие из теоремы 1 о дифференциальных неравенствах, а также монотонности оператора дифференциального уравнения (8) вытекает (в случае единственности решений системы (8))

Лемма 2. *Решения системы матричных дифференциальных уравнений (8) с правыми частями, удовлетворяющими условию квазимонотонности по конусу G^k_+ в G^k, будут монотонными по конусу G^k_+ в G^k, т. е. при $q'_0, q''_0 \in G^k$ таких, что $q'_0 \le q''_0$, выполняется неравенство $q(t, t_0, q'_0) \le q(t, t_0, q''_0)$ для всех $t > t_0$, где $q(t, t_0, q'_0)$, $q(t, t_0, q''_0)$ — частные решения системы (8) с начальными условиями q'_0, q''_0 соответственно.*

Применяя теорему о дифференциальных неравенствах и учитывая приведенные выше оценки (7) для производной вектор-функции (5), получаем теорему об оценке сверху поведения ее на решениях системы (1).

Теорема 2. *Если $x(t) \in R^{n_{l(t)}}$ — решение системы (1) с марковскими структурными изменениями $l(t)$ (3) и с начальными условиями $x(t_0) = x_0$, $l(t_0) = j \in L$, то для вектор-функции с компонентами $v_i(x(t))$ вида (5), определенными на этом решении, будет выполняться при всех $t > t_0$ $v_i(x(t)) \le Q_i(t)$, где $Q_i(t)$ — решение системы матричных дифференциальных уравнений (8) с начальным условием $Q_i(t_0) = v_i(x_0) = x_0 x_0^T \delta_{ij}$, $i = \overline{1,k}$.*

В результате приходим к следующей теореме сравнения свойств типа устойчивости системы (1) со случайными структурными изменениями и свойств детерминированной системы (8).

Теорема 3. *Нулевое решение системы (1) с марковскими структурными изменениями (3) является устойчивым (асимптотически, экспоненциально устойчивым) в среднеквадратичном, если решение $q = 0$ детерминированной матричной системы дифференциальных уравнений (8) является соответственно устойчивым (асимптотически, экспоненциально устойчивым).*

Доказательство проводится непосредственным применением лемм 1, 2 и теоремы 2. При этом для решений системы (1) со случайными структурными изменениями имеет место оценка, вытекающая из оценки на вектор-функцию (5)

$$M[\|x(t)\|^2_{l(t)} \mid x_0, l(t_0)] \le \sum_{j=1}^{k} \operatorname{tr} Q_i(t),$$

где $\operatorname{tr} Q$ — след матрицы Q.

Для того чтобы получить теорему о динамическом свойстве типа устойчивости в среднеквадратичном согласно технологии метода ВФЛ [13], необходимо иметь условия устойчивости детерминированной системы сравнения (8) в терминах ее правых частей. Отметим, что системы сравнения с условием квазимонотонности по произвольному конусу изучались в [15], где получены критерии асимптотической устойчивости и оценки решений системы сравнения. Основываясь на результатах из [15], получаем следующую теорему о свойстве устойчивости в среднеквадратичном системы со случайными структурными изменениями.

Теорема 4. *Для асимптотической устойчивости в среднеквадратичном системы* (1) *достаточно, чтобы существовала вектор-функция с компонентами* (5), *система сравнения* (8) *и вектор* $q = (Q_1, \ldots, Q_k)$ *с положительно определенными компонентами, удовлетворяющий взаимосвязанной системе нелинейных алгебраических матричных неравенств*

$$P_i(t, Q_i) - \alpha_i Q_i + \sum_{j \neq i}^{k} \alpha_{ij} P_{ij}(t, Q_j) < 0,$$

которые понимаются в смысле упорядоченности по конусу G_{i+}.

Рассмотрим теперь, при каких условиях линейная система с марковскими структурными изменениями

$$\dot{x} = A(l(t))x, \quad x \in R^{n_{l(t)}}, \quad x(\tau + 0) = A_{ij}x(\tau - 0), \tag{9}$$

где $A(l(t))$ — $(n_{l(t)} \times n_{l(t)})$-постоянная матрица при каждом $l(t)$, $l(t) \in J$, A_{ij} — $(n_i \times n_j)$-постоянная матрица, устанавливающая связь координат системы при переходе ее из состояния $l(t-0) = j$ в состояние $l(t+0) = i$, причем A_{ii} — $(n_i \times n_i)$-единичная матрица, обладает экспоненциальной устойчивостью в среднеквадратичном. При этом предполагается, что $l(t)$ описывает однородную марковскую цепь с конечным числом состояний, для которой заданы разложения переходных вероятностей (3).

Отметим, что для системы вида (9), но при неизменной размерности n вектора состояния в [6] получены детерминированные уравнения для первых и вторых моментов ее решений. Аналогичные уравнения можно получить и для случая, когда размерность вектора состояния изменяется с n_i на n_j при переходе марковской цепи из состояния $l(t - 0) = j$ в состояние $l(t + 0) = i$.

Применяя, как и в [2], [6], формулу повторных математических ожиданий и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$ в выражении для $[v_i(x(t + \Delta t)) - v_i(x(t))]/\Delta t$, получим систему линейных матричных уравнений сравнения для указанной вектор-функции

$$\dot{Q}_i = A_i Q_i + Q_i A_i^T - \alpha_i Q_i + \sum_{j \neq i}^{k} \alpha_{ij} A_{ij} Q_j A_{ij}^T, \quad Q_i(t_0) = x_0 x_0^T \delta_{ij}. \tag{10}$$

Легко показать, что для линейной матричной функции $P_i(Q_i) - \alpha_i Q_i = A_i Q_i + Q_i A_i^T - \alpha_i Q_i$ выполняются условия квазимонотонности относительно конуса неотрицательно определенных матриц. Действительно, пусть для $Q_i', Q_i'' : Q_i' \leq Q_i''$ и некоторого $\psi \in G_i^*$ имеет место равенство $\psi^T(Q_i'' - Q_i')\psi = 0$. Тогда $\psi^T(P_i(Q_i'') - \alpha_i Q_i'' - P_i(Q_i') + \alpha_i Q_i')\psi = \psi^T A_i(Q_i'' - Q_i')\psi + \psi^T(Q_i'' - Q_i')A_i^T\psi - \alpha_i\psi^T(Q_i'' - Q_i')\psi = \psi^T A_i(Q_i'' - Q_i')\psi + \psi^T(Q_i'' - Q_i')A_i^T\psi$. Как известно, любую неотрицательно определенную симметрическую матрицу $K_i = Q_i'' - Q_i'$ можно представить в виде $K_i = S_i^T S_i$, где S_i — некоторая матрица. С учетом данного представления получаем $\psi^T(Q_i'' - Q_i')\psi = \psi^T S_i^T S_i \psi = \|S_i\psi\|^2 = 0$. Откуда $(\psi^T S_i^T)^T = S_i\psi = 0$ и, следовательно, $\psi^T A_i(Q_i'' - Q_i')\psi + \psi^T(Q_i'' - Q_i')A_i^T\psi = \psi^T A_i S_i^T S_i\psi + \psi^T S_i^T S_i A_i^T\psi = 0$.

Таким образом, в силу квазимонотонности векторно-матричной функции правой части системы сравнения (10) из теоремы 4 вытекает (аналогичное [6])

Следствие. Если $x(t) \in R^{n_{l(t)}}$ — решение линейной системы (9) с марковскими структурными изменениями $l(t)$ (3) с начальными условиями $x(t_0) = x_0$, $l(t_0) = j \in J$, то для вектор-функции (5), определенной на этом решении $v_i(x(t))$ будет выполняться при всех $t > t_0$

$v_i(x(t)) = Q_i(t)$, где $Q_i(t)$ — решение системы линейных матричных дифференциальных уравнений (10) с начальным условием $Q_i(t_0) = v_i(x_0) = x_0 x_0^T \delta_{ij}$, $i = \overline{1,k}$. При этом справедливо равенство $M[\|x(t)\|^2_{l(t)} \mid x_0, l(t_0)] = \sum\limits_{i=1}^{k} \operatorname{tr} Q_i(t)$, где $\operatorname{tr} Q$ — след матрицы Q.

Аналогом соответствующей теоремы об эквивалентности среднеквадратической устойчивости линейной стохастической системы и детерминированной матричной системы дифференциальных уравнений [2], [6] является

Теорема 5. *Нулевое решение системы* (10) *с марковскими структурными изменениями является устойчивым* (*экспоненциально устойчивым, неустойчивым*) *в среднеквадратичном тогда и только тогда, когда решение* $q = 0$ *детерминированной матричной системы дифференциальных уравнений* (11) *является соответственно устойчивым* (*экспоненциально устойчивым, неустойчивым*).

Очевидно, для линейной матричной системы дифференциальных уравнений (11) с правой частью, удовлетворяющей условию квазимонотонности по конусу G^k_+, имеют место аналогичные, как и для линейных систем дифференциальных уравнений с постоянной позитивной матрицей, утверждения об устойчивости [13], [15]. В частности, справедлива

Теорема 6. *Система* (11) *асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда найдется такой положительный вектор* $q \in G^{k^+}$, *что* $G(q) < 0$ (*неравенство по конусу* G^k_+).

Значит, для среднеквадратической устойчивости системы (9) необходимо, чтобы для любого набора $(n_i \times n_i)$-матриц $C_i > 0$ $(i = \overline{1,k})$, а достаточно, чтобы для некоторого набора таких матриц взаимосвязанная система линейных алгебраических матричных уравнений Ляпунова

$$A_i Q_i + Q_i A_i^T - \alpha_i Q_i + \sum_{j \neq i}^{k} \alpha_{ij} A_{ij} Q_j A_{ij}^T = -C_i \quad (i = \overline{1,k}) \tag{11}$$

имела положительное решение ($Q_i > 0$, $i = \overline{1,k}$).

4. Пример

Рассматривается линейная система вида (9) с двумя структурными состояниями ($k = 2$). В структурном состоянии ($l(t) = 1$), соответствующем нормальному режиму функционирования, система характеризуется вектором $x \in R^2$ размерности 2 $A(l(t) = 1) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{smallmatrix}\right)$. При $l(t) = 2$ в соответствующем аварийному режиму структурном состоянии $x \in R^1$ $A(l(t) = 2) = 0.15$. Пусть известны соотношения, связывающие фазовые координаты при переходах из одного структурного состояния в другое: $x(t+0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) x(t-0)$ при переходе из состояния 1 в состояние 2 (при возникновении нарушений в системе); $x(t+0) = (2, -1) x(t-0)$ при обратном переходе и восстановлении нормального режима.

Предположим также, что переходы описываются однородным процессом Маркова с двумя состояниями, соответствующими структурным состояниям 1 и 2. Пусть также заданы вероятности переходов в виде (3) с интенсивностью возникновения нарушений в системе $\alpha_{21} = 0.2$, и интенсивностью восстановления нормального режима $\alpha_{12} = 0.6$.

Устойчивость в среднеквадратичном рассматриваемой системы устанавливается на основе теоремы 6. Для этого будем решать алгебраические матричные уравнения Ляпунова (11), которые в данном случае имеют вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - \alpha_{21} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{pmatrix} + \alpha_{12} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} q(1 \ -1) = -\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix},$$

$$0.15q + 0.15q - \alpha_{12} q + \alpha_{21} (1 \ 1) \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -c.$$

Полагая $C_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1.8 & -0.6 \\ -0.6 & 1.6 \end{smallmatrix}\right)$, $C_2 = c = 0.1$, находим $Q_1 = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $Q_2 = q = 1$. Таким образом, найден вектор $q = (Q_1, Q_2)$ с положительно определенными компонентами, который является решением системы алгебраических матричных уравнений Ляпунова. Поэтому по теореме 6 рассматриваемая линейная система со случайными структурными изменениями является асимптотически устойчивой в среднеквадратичном.

Литература

1. Кац И.Я., Красовский Н.Н. *Об устойчивости систем со случайными параметрами* // ПММ. – 1960. – Т. 24. – № 5. – С. 809–823.
2. Мильштейн Г.Н. *Среднеквадратическая устойчивость линейных систем, находящихся под воздействием марковской цепи* // ПММ. – 1972. – Т. 36. – № 3. – С. 537–545.
3. Кац И.Я. *Устойчивость по первому приближению стохастических систем с марковскими параметрическими возмущениями* // Метод функций Ляпунова в анал. динам. систем. – Новосибирск: Наука, 1987. – С. 83–92.
4. Казаков И.Е..Артемьев В.М. *Оптимизация динамических систем случайной структуры.* – М.: Наука, 1980. – 384 с.
5. Хасьминский Р.З. *Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров.* – М.: Наука, 1969. – 367 с.
6. Кац И.Я. *Об устойчивости движения стохастических систем с разрывными фазовыми траекториями* // Вопр. качеств. теории дифференц. уравнений. – Новосибирск: Наука, 1988. – С. 179–185.
7. Кушнер Г.Дж. *Стохастическая устойчивость и управление.* – М.: Мир, 1969. – 200 с.
8. Малышев В.В., Пакшин П.В. *Прикладная теория стохастической устойчивости и оптимального стационарного управления.* Ч. 1 // Изв. АН СССР. Сер. техн. кибернет. – 1990. – № 1. – С. 42–66.
9. Малышев В.В., Пакшин П.В. *Прикладная теория стохастической устойчивости и оптимального стационарного управления.* Ч. 2 // Изв. АН СССР. Сер. техн. кибернет. – 1990. – № 2. – С. 97–120.
10. Пакшин П.В. *Устойчивость линейных систем со случайными параметрами и структурой* // Изв. АН СССР. Сер. техн. кибернет. – 1990. – № 3. – С. 115–120.
11. Козлов Р.И., Петряков М.Г. *Построение вектор-функций Ляпунова и систем сравнения для некоторых стохастических дифференциальных систем* // Динамика нелинейных систем. – Новосибирск: Наука, 1983. – С. 6–21.
12. Ladde G.S., Siljak D.D. *Multiplex control systems*: *stochastic stability and dynamic reliability* // Int. J. Control. – 1983. – V. 38. – № 3. – P. 515–524.
13. *Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости* / Под ред. А.А. Воронова, В.М. Матросова. – М.: Наука, 1987. – 312 с.
14. Deimling K. *Ordinary differential equations in Banach spaces* // Lect. Notes Math. – 1977. – № 596. – 137 p.
15. Маликов А.И. *Оценки решений нелинейных систем сравнения* // Динамика нелинейных систем. – Новосибирск: Наука, 1983. – С. 49–57.

Казанский государственный технический университет

Поступила 23.01.1995