Известия вузов. Математика
2015, №6, с. 24–30

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

М.Э. МУМИНОВ, А.М. ХУРРАМОВ

О КОМПАКТНОМ ВОЗМУЩЕНИИ ДВУХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА НА РЕШЕТКЕ

Аннотация. Рассматривается система двух произвольных квантовых частиц на трехмерной решетке с некоторыми дисперсионными функциями (описывающими перенос частицы с узла на узел), взаимодействующих с помощью потенциала притяжения только на ближайших соседних узлах. Найден класс потенциалов такой, что при возмущении двухчастичного оператора $h(k)$, соответствующего системе двух частиц, с потенциалом из этого класса дискретный спектр $h(k)$ сохраняется.

Ключевые слова: двухчастичный гамильтониан на решетке, виртуальный уровень, кратность виртуального уровня, собственное значение, дискретный спектр.

УДК: 517.984

Введение

В непрерывном случае изучение спектральных свойств полного гамильтониана системы двух частиц сводится к изучению двухчастичного оператора Шрёдингера с помощью выделения энергии движения центра масс так, что одночастичные связанные состояния суть собственные векторы оператора энергии с отделенным полным импульсом (при этом такой оператор фактически не зависит от значений полного импульса) [1]. На решетке "выделению центра масс" системы отвечает реализация гамильтониана как "расслоенного оператора", т. е. прямого интеграла семейства операторов $h(k)$ энергии двух частиц, зависящих от значений полного квазиимпульса $k \in T^d$ (T^d — d-мерный тор) [2], [3]. Конечность и бесконечность числа дискретных собственных значений многочастичных систем зависят от числа виртуальных уровней подсистем. В трехчастичной системе, если две или три двухчастичные подсистемы имеют виртуальные уровни, то дискретный спектр гамильтониана бесконечен [4], [5], и если в системе такой подсистемы не более одной, то дискретный спектр гамильтониана конечен [6], [7].

Вопрос о существовании виртуального уровня для системы n частиц ($n > 3$) рассматривался в работе Г.М. Жислина [8], [7]. Для системы двух частиц на решетке существование виртуального уровня изучалось в [9], [10] в случае, когда дисперсионные соотношения частиц линейно зависимы и имеют единственный невырожденный минимум в нуле. В [11] показано, что левый край существенного спектра одночастичного гамильтониана одновременно может оказаться виртуальным уровнем и собственным значением рассматриваемого гамильтониана.

Поступила 14.12.2013

В [12] рассматривается система двух произвольных квантовых частиц на 3-мерной решетке с некоторой дисперсионной функцией, описывающей перенос частицы с узла на соседний узел, взаимодействующих с помощью потенциала притяжения только на ближайших соседних узлах. Изучено существование и отсутствие собственных значений семейства операторов $h(k)$ в зависимости от энергии взаимодействия частиц и полного квазиимпульса $k \in T^3$ (T^3 — 3-мерный тор). Кроме того, найдены условия в зависимости от энергии взаимодействия частиц, при которых оператор $h(\mathbf{0})$ имеет простой, двукратный и трехкратный виртуальный уровень в нуле.

Данная статья является продолжением работы [12]. В ней изучаются спектральные свойства двухчастичного оператора $h(k)$, возмущенного некоторым интегральным оператором $\mathbf{v}_1$, ядро v_1 которого является функцией из специального класса. Доказывается, что дискретный спектр и виртуальный уровень невозмущенного оператора также являются дискретным спектром и виртуальным уровнем возмущенного оператора. Рассмотрен частный случай двухчастичного оператора Шрёдингера, кратность виртуального уровня которого больше кратности виртуального уровня невозмущенного оператора.

1. Формулировка основных результатов

Пусть $T = (-\pi, \pi]$, $L_2(T^3)$ — гильбертово пространство всех квадратично-интегрируемых функций, определенных на T^3.

Рассмотрим двухчастичный оператор Шрёдингера $h(k)$, $k \in T^3$ [12], действующий в пространстве $L_2(T^3)$ по формуле

$$h(k) = h_0(k) - \mathbf{v}_0;$$

здесь $h_0(k)$ — оператор умножения на функцию

$$\mathcal{E}_k(p) = \frac{1}{m_1}\varepsilon(p) + \frac{1}{m_2}\varepsilon(p-k), \quad \varepsilon(p) = \sum_{\alpha=1}^{3}(1-\cos 2p_\alpha)$$

и $\mathbf{v}_0$ — интегральный оператор с ядром $v_0(p-s) = \sum\limits_{\alpha=1}^{3} \mu_\alpha \cos(p_\alpha - s_\alpha)$, где $m_i > 0$ — масса частицы i, $i = 1, 2$, $\mu_\alpha > 0$.

Отметим, что из теоремы Вейля о существенном спектре [13] следует, что спектр $\sigma_{\text{ess}}(h(k))$ оператора $h(k)$ не меняется при компактном возмущении $\mathbf{v}$ и совпадает со спектром невозмущенного оператора $h_0(k)$. При этом $\sigma_{\text{ess}}(h(k))$ состоит из области значений функции $\mathcal{E}_k(\cdot)$, т. е.

$$\sigma_{\text{ess}}(h(k)) = \sigma(h_0(k)) = [m(k), M(k)],$$

где $m(k) = \min\limits_{p \in T^3} \mathcal{E}_k(p)$, $M(k) = \max\limits_{p \in T^3} \mathcal{E}_k(p)$.

Обозначим через $\mathcal{V}$ множество функций, квадратично-интегрируемых на T^3 и периодичных по каждому аргументу с периодом π. Ясно, что $\mathcal{V}$ является подпространством пространства $L_2(T^3)$.

Пусть $v_1 \in \mathcal{V}$ — непрерывная функция и $\mathbf{v}_1$ — интегральный оператор в $L_2(T^3)$ с ядром $v_1(p-s)$.

Пусть $C(T^3)$ — банахово пространство непрерывных (периодических) функций на T^3 и $G(k,z)$, $G_\alpha(k,z)$, $\alpha = 0, 1$, — интегральные операторы (Бирмана–Швингера) с ядрами (см.

лемму 1)

$$G(k,z;p,q)=\frac{v_0(p-q)+v_1(p-q)}{\mathcal{E}_k(q)-z},\quad G_\alpha(k,z;p,q)=\frac{v_\alpha(p-q)}{\mathcal{E}_k(q)-z},\quad p,q\in T^3,\ \ z\le m(k).$$

Определение. Если единица является собственным значением оператора $G_0(\mathbf{0},0)$ ($G(\mathbf{0},0)$) и соответствующая собственная функция ψ удовлетворяет условию

$$\frac{\psi(p)}{\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(p)}\in L_1(T^3)\setminus L_2(T^3),$$

то говорят, что оператор $h(\mathbf{0})$ ($h(\mathbf{0})-\mathbf{v}_1$) имеет виртуальный уровень в нуле (на левом крае существенного спектра). Число таких линейно независимых собственных векторов ψ оператора $G(\mathbf{0},0)$ ($G_1(\mathbf{0},0)$) назовем кратностью виртуального уровня оператора $h(\mathbf{0})$ ($h(\mathbf{0})-\mathbf{v}_1$).

В дальнейшем используем

Предположение A. *Пусть $m=m_1=m_2$ и $k\in\{k=(k_1,k_2,k_3)\in T^3,\ k_\alpha=-\frac{\pi}{2}$ или $k_\alpha=\frac{\pi}{2}$ хотя бы для одного $\alpha\in\{1,2,3\}\}$.*

Основным результатом данной работы является

Теорема. *Для каждого непрерывного $v_1\in\mathcal{V}$ имеет место включение*

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(h(k))\subset\sigma_{\mathrm{disc}}(h(k)-\mathbf{v}_1),$$

где $\sigma_{\mathrm{disc}}(h)$ — дискретный спектр оператора h. Кроме того, если оператор $h(\mathbf{0})$ имеет (n-кратный) виртуальный уровень в нуле, то нуль является (не менее n-кратным) виртуальным уровнем оператора $h(\mathbf{0})-\mathbf{v}_1$.

Замечание 1. Из теоремы, сформулированной выше, следует, что условие существования собственных значеный оператора $h(k)$, полученное в [12], также является условием существования собственных значений оператора $h(k)-\mathbf{v}_1$.

Пусть (см. лемму 1)

$$c_i(k;z)=\int_{T^3}\frac{\cos^2 s_i ds}{\mathcal{E}_k(s)-z},\quad s_i(k;z)=\int_{T^3}\frac{\sin^2 s_i ds}{\mathcal{E}_k(s)-z},\quad z\le m(k). \tag{1}$$

Положим $\mu^0=[c_1(\mathbf{0},0)]^{-1}$ и $R_0=[0;\mu^0)$, $R_1=\{\mu^0\}$. Из теоремы, сформулированной выше, и теоремы 3 работы [12] вытекает

Следствие. Пусть $\mu\in R_\alpha\times R_\beta\times R_\gamma$, $\alpha,\beta,\gamma\in\{0,1\}$. Тогда оператор $h(\mathbf{0})-\mathbf{v}_1$ имеет виртуальный уровень в нуле с кратностью не менее $\alpha+\beta+\gamma$.

Замечание 2. В следствии случай $\alpha+\beta+\gamma=0$ понимается как то, что $z=0$ не является виртуальным уровнем оператора $h(\mathbf{0})$. Отметим, что существуют такие случаи (см. ниже раздел 3), что кратность виртуального уровня в нуле оператора $h(\mathbf{0})$ может оказаться равной (больше) кратности виртуального уровня в нуле оператора $h(\mathbf{0})-\mathbf{v}_1$.

2. Доказательство теоремы 1

С использованием невырожденности точки минимума $m(k)$ функции $\mathcal{E}_k(\cdot)$ [12] доказывается

Лемма 1. *Пусть не выполняется предположение* A. *Тогда интеграл*

$$\int_{T^3} \frac{\varphi(s)ds}{\mathcal{E}_k(s) - m(k)}$$

сходится для всех $\varphi \in C(T^3)$.

Отсюда операторы $G(k; m(k))$, $G_0(k; m(k))$ и $G_1(k; m(k))$ определены и являются интегральными операторами.

Элементарно доказывается

Лемма 2 (Бирмана–Швингера)**.** *Число* $z \notin [m(k), M(k)]$ *является собственным значением оператора* $h(k) - \mathbf{v}_1$ *тогда и только тогда, когда единица является собственным значением оператора* $G(k; z)$.

Лемма 3. *Оператор* $G(k; z)$, $z \notin [m(k), M(k)]$, *оставляет пространство* $\mathcal{V}$ *инвариантным, точнее* $G(k; z) : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ *и* $G(k; z)f = G_1(k; z)f \quad \forall f \in \mathcal{V}$.

Доказательство. Для каждого $f \in \mathcal{V}$ вычислим интеграл

$$(G_0(k; z)f)(p) = \int_{T^3} \frac{v_0(s - p)f(s)ds}{\mathcal{E}_k(s) - z}. \tag{2}$$

Заметим,что функция $f \in \mathcal{V}$ является периодичной по каждому аргументу с периодом π и $\mathcal{E}_k \in \mathcal{V}$. Поэтому в интеграле в правой части (2), заменяя $s = t + \Pi$, $\Pi = (\pi, \pi, \pi)$ и учитывая $v(s \pm \Pi) = -v(s)$, имеем

$$(G_0(k; z)f)(p) = -\int_{T^3} \frac{v_0(t - p)f(t)dt}{\mathcal{E}_k(t) - z} = -(G_0(k; z)f)(p),$$

т. е. $(G_0(k; z)f)(p) \equiv 0$. Отсюда $G(k; z)f = G_1(k; z)f \quad \forall f \in \mathcal{V}$. Легко проверить, что $G(k; z)f \in \mathcal{V}$ при всех $f \in \mathcal{V}$. □

Доказательство теоремы. Согласно лемме 3

$$G_0(k; z)G_1(k; z) = G_1(k; z)G_0(k; z) = 0.$$

Следовательно,

$$I - G(k; z) = (I - G_0(k; z))(I - G_1(k; z)) \quad \text{при} \quad z \notin (m(k), M(k)],$$

где I — единичный оператор в $L_2(T^3)$. Поэтому и согласно теореме XIII.105 работы [13] для детерминанта Фредгольма $\det[I - G(k; z)]$ оператора $I - G(k; z)$ имеет место равенство

$$\det[I - G(k; z)] = \det(I - G_0(k; z)) \det(I - G_1(k; z)) \quad \text{при} \quad z \notin (m(k), M(k)). \tag{3}$$

Заметим, что число $z \notin [m(k), M(k)]$ является собственным значением оператора $h(k)$ тогда и только тогда, когда единица является собственным значением оператора $G_0(k; z)$. Следовательно, единица является собственным значением оператора $G_0(k; z)$ тогда и только тогда, когда $\det(I - G_0(k; z)) = 0$. Отсюда и из (3) в силу леммы 2 получим

$$\sigma_{\text{disc}}(h(k)) \subset \sigma_{\text{disc}}(h(k) - \mathbf{v_1}).$$

Изучим виртуальный уровень оператора $h(\mathbf{0})$. Для этого найдем собственные функции $G_0(\mathbf{0}; 0)$ $(G_0(\mathbf{0}; 0)\varphi = \varphi)$, соответствующие собственному значению единицы. При этом из равенства

$$\det(I - G_0(\mathbf{0}; 0)) = \prod_{\alpha=1}^{3} [1 - \mu_\alpha c_\alpha(\mathbf{0}; 0)][1 - \mu_\alpha s_\alpha(\mathbf{0}; 0)],$$

где $c_\alpha(\mathbf{0};0)$, $s_\alpha(\mathbf{0};0)$ — интегралы, определенные по формуле (1); если $1-\mu_\alpha c_\alpha(\mathbf{0};0)=0$, то функция $\varphi_\alpha(p)=\cos p_\alpha$ является собственной функцией оператора $G_0(\mathbf{0};0)$, соответствующей собственному значению единица; если единица является собственным значением оператора $G_0(\mathbf{0};0)$ при $\mu_\alpha=\frac{1}{s_\alpha(\mathbf{0};0)}$, то $\psi_\alpha(p)=\sin p_\alpha$ является соответствующей собственной функцией. Поэтому

$$h(\mathbf{0})f(p)=0,$$

где $f(p)=\frac{\sin p_\alpha}{\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(p)}\in L_2(T^3)$, т. е. $z=0$ является собственным значением оператора $h(\mathbf{0})$. При этом $z=0$ не является виртуальным уровнем оператора $h(\mathbf{0})$. Как уже отмечено, если $\mu_\alpha=\frac{1}{c_\alpha(\mathbf{0};0)}$, то единица является собственным значением оператора $G_0(\mathbf{0};0)$, соответствующим собственной функции $\varphi_\alpha(p)=\cos p_\alpha$. Поскольку $G_1(\mathbf{0};0)\varphi_\alpha=0$, то функция φ_α является собственной функцией оператора G, соответствующей собственному значению единица. Ясно, что

$$F(p)=\frac{\cos p_\alpha}{\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(p)}\in L_1(T^3)\setminus L_2(T^3),$$

т. е. $z=0$ является виртуальным уровнем операторов $h(\mathbf{0})$ и $h(\mathbf{0})-\mathbf{v}_1$.

Таким образом, доказано, что если оператор $h(\mathbf{0})$ имеет (n-кратный) виртуальный уровень в нуле, то нуль является не менее n-кратным виртуальным уровнем оператора $h(\mathbf{0})-\mathbf{v}_1$.

3. Случай $v_1=\mathrm{const}$

В этом разделе рассмотрим случай $v_1=\lambda>0$, изучим спектральные свойства оператора $h(\mathbf{0})-\mathbf{v}_1$. Пользуясь методами интегральных уравнений, легко вычислим детерминант Фредгольма оператора $I-G(\mathbf{0};z)$:

$$\det[I-G(\mathbf{0};z)]=[1-\lambda d(z)]\det(I-G_0(\mathbf{0};z)), \tag{4}$$

где

$$d(z)=\int_{T^3}\frac{ds}{\mathcal{E}_0(s)-z},$$

$$\det(I-G_0(\mathbf{0};z))=\prod_{i=1}^{3}[1-\mu_i c_i(\mathbf{0};z)][1-\mu_i s_i(\mathbf{0};z)].$$

Положим $\lambda_0=[d(0)]^{-1}$.

При этом, если $\lambda\le\lambda_0$, то $1-\lambda d(z)>0$ для всех $z<m(\mathbf{0})$. Поэтому из (4) и леммы 1 следует $\sigma_{\mathrm{disc}}(h(\mathbf{0}))=\sigma_{\mathrm{disc}}(h(\mathbf{0})-\mathbf{v}_1)$. Ясно, что если $\mu_i<\mu^0$, $i=1,2,3$, то $\sigma_{\mathrm{disc}}(h(\mathbf{0}))=\emptyset$ [12].

Поскольку $1-\lambda d(0)<0$ при $\lambda>\lambda_0$, из монотонности $d(\cdot)$ и $\lim\limits_{z\to-\infty}d(z)=0$ следует, что функция $\det(I-G_1(\mathbf{0};z))=1-\lambda d(z)$ равна нулю в единственной точке $z=z_0<0$. Поэтому в случае $\lambda>\lambda_0$ и $\mu_i<\mu^0$, $i=1,2,3$, получим

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(h(\mathbf{0})-v_1)\neq\emptyset,\quad \sigma_{\mathrm{disc}}(h(\mathbf{0}))=\emptyset.$$

Далее пусть $\lambda=\lambda_0$. Тогда легко проверить, что $\psi(p)\equiv 1$ является решением уравнения $G_1\psi=\psi$ и

$$\frac{\psi(p)}{\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(p)}\in L_1(T^3)\setminus L_2(T^3),$$

т. е. $z=0$ является виртуальным уровнем оператора $h(\mathbf{0})-\mathbf{v}_1$. Поскольку $\det(I-G_0(\mathbf{0};z))>0$ при $z<0$ и $\mu_i<\mu^0$, $i=1,2,3$, то уравнение $G_0\psi=\psi$ не имеет решений при $\mu_i<\mu^0$, $i=1,2,3$, т. е. нуль не является виртуальным уровнем оператора $h(\mathbf{0})$.

Легко проверить, что в случае $\mu_i\le\mu^0$, $i=1,2,3$, и $\lambda=\lambda_0$ нуль является $\alpha(1)+\alpha(2)+\alpha(3)$ $(\alpha(1)+\alpha(2)+\alpha(3)+1)$-кратным виртуальным уровнем оператора $h(\mathbf{0})$ $(h(\mathbf{0})-\mathbf{v}_1)$, где

$$\alpha(i)=\begin{cases}0 & \text{при } \mu_i\in(0,\mu^0);\\ 1 & \text{при } \mu_i=\mu^0.\end{cases}$$

Литература

[1] Фаддеев Л.Д. *Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц*, Тр. матем. ин-та им. В.А. Стеклова **LXIX** (1963).

[2] Mattis D.C. *The few-body problem on lattice*, Rew. mod. Phys. **58**, 361–379 (1986).

[3] Albeverio S., Lakaev S.N., Makarov K.A., Muminov Z.I. *The threshold effects for the two-particle Hamiltonians*, Commun. Math. Phys. **262**, 91–115 (2006).

[4] Яфаев Д.Р. *К теории дискретного спектра трехчастичного оператора Шрёдингера*, Матем. сб. **136** (4), 567–592 (1974).

[5] Sobolev A.V. *The Efimov effect. Discrete spectrum. Asymptotics*, Commun. Math. Phys. **156**, 101–126 (1993).

[6] Яфаев Д.Р. *О конечности дискретного спектра трехчастичного оператора Шрёдингера*, Теор. матем. физ. **25** (2), 185–195 (1975).

[7] Вугальтер С.А., Жислин Г.М. *О спектре операторов Шрёдингера многочастичных систем с короткодействующими потенциалами*, Тр. ММО **49** (Изд-во Московск. ун-та, М., 1986), с. 95–112.

[8] Жислин Г.М. *О виртуальных уровнях n-частичных систем*, Теор. матем. физ. **68** (2), 265–275 (1986).

[9] Лакаев С.Н., Тилавова Ш.М. *Слияние собственных значений и резонансов двухчастичного оператора Шрёдингера*, Теор. матем. физ. **101** (2), 235–252 (1994).

[10] Абдуллаев Ж.И., Лакаев С.Н. *Конечность дискретного спектра трехчастичного оператора Шрёдингера на решетке*, Теор. матем. физ. **111** (1), 94–108 (1997).

[11] Лакаев С.Н., Бозоров И.Н. *Число связанных состояний одночастичного гамильтониана на трехмерной решетке*, Теор. матем. физ. **158** (3), 425–443 (2009).

[12] Муминов М.Э., Хуррамов А.М. *Спектральные свойства двухчастичного гамильтониана на решетке*, Теор. матем. физ. **177** (3), 480–493 (2013).

[13] Рид М., Саймон Б. *Методы современной математической физики. 4. Анализ операторов* (Мир, М., 1982).

М.Э. Муминов

кафедра математических наук,
Технологический университет, Малайзия,
Джахор, Бахру, 81310, Малайзия,

`e-mail:` mmuminov@mail.ru

А.М. Хуррамов

ассистент, Самаркандский государственный университет,
Университетский бульвар, д. 15, г. Самарканд, 140101, Республика Узбекистан,

`e-mail:` xurramov@mail.ru

M.E. Muminov and A.M. Khurramov

On compact distribution of two-particle Schrödinger operator on a lattice

Abstract. We consider a system of two arbitrary quantum particles on three-dimensional lattice with certain dispersion functions (they describe a transfer of a particle from one node to another) which with the help of gravity potential interact on nearest neighboring nodes, only. We find a class of potentials such that under perturbation of two-particle operator $h(k)$, which corresponds to a system of two particles with a potential from this class, a discrete operator $h(k)$ is kept.

Keywords: two-particle Hamiltonian on a lattice, virtual level, multiplicity of virtual level, eigenvalue, discrete spectrum.

M.E. Muminov
Chair of Mathematics of Sciences,
Universiti Teknologi Malaysia,
Jahor, 81310 Bahru, Malaysia,
`e-mail:` mmuminov@mail.ru

A.M. Khurramov
Assistant, Samarkand State University,
15 Universitetskii Blvd., Samarkand, 140101 Republic of Uzbekistan,
`e-mail:` xurramov@mail.ru