ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 6 (541)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.968:519.642

Л.Е. ШУВАЛОВА

КВАДРАТУРНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

1. Введение

Данная работа посвящена квадратурным методам решения нелинейных сингулярных интегральных уравнений (НСИУ) вида

$$Kx \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x(\tau)}{(\tau-t)\sqrt{1-\tau^2}}\,d\tau+\frac{\lambda}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{h(t,\tau,x(\tau))}{\sqrt{1-\tau^2}}\,d\tau=y(t),\quad -1<t<1, \tag{1}$$

при дополнительном условии

$$\int_{-1}^{1}\frac{x(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt=0; \tag{2}$$

здесь $y(t)$ и $h(t,\tau,u)$ — известные функции, определенные при $-1\le t,\tau\le 1$, $-\infty<u<\infty$, λ — числовой параметр, $x(t)$ — искомая функция, а сингулярный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши ([1], гл. 2, § 1). К таким НСИУ на разомкнутом контуре сводятся многие важные в прикладном отношении задачи (см., напр., [1]–[3] и библиографию в них). Ниже рассматриваются некоторые вычислительные схемы метода механических квадратур, основанные на аппроксимации сингулярных операторов конечномерными операторами, порождаемыми квадратурными формулами. Квадратурные методы являются наиболее простыми при численной реализации, но представляют значительные трудности при теоретическом обосновании, которое ведется на основе результатов из нелинейного функционального анализа (напр., [4]) и теории сингулярных интегральных уравнений [5], [6], [2].

2. Вычислительные схемы метода механических квадратур (м. м. к.)

Пусть $y(t)$ и $h(t,\tau,u)$ — непрерывные функции в своих областях определения. Используя результаты ([2], с. 113), сначала приведем вычислительные схемы м. м. к.

Схема А. Приближенное решение задачи (1)–(2) будем искать в виде

$$x_n(t)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k T_k(t),\quad -1<t<1,\ \ n\in N,$$

где $T_k(t)=\cos k\arccos t$ — полином Чебышева первого рода, так что условие (2) для $x_n(t)$ выполнено. Неизвестные коэффициенты α_k, $k=\overline{1,n}$, будем определять из системы нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ)

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k U_{k-1}(t_j)+\frac{\lambda}{n+1}\sum_{r=0}^{n}h\Big(t_j,\tau_r,\sum_{k=1}^{n}\alpha_k T_k(\tau_r)\Big)=y(t_j),\quad j=\overline{1,n},$$

где $U_n(t)=\frac{\sin(n+1)\arccos t}{\sqrt{1-t^2}}$ — полином Чебышева второго рода, узлы заданы в виде

$$\tau_r=\cos\frac{2r+1}{2n+2}\pi,\quad r=\overline{0,n},\quad t_j=\cos\frac{j\pi}{n+1},\quad j=\overline{1,n},\quad n\in N. \tag{3}$$

Схема Б. Приближенное решение задачи (1)–(2) ищется в виде

$$x_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\beta_k l_k(t),\quad l_k(t)=\frac{T_{n+1}(t)}{(t-\tau_k)\,T'_{n+1}(\tau_k)},$$

где $l_k(t)$ — фундаментальные многочлены Лагранжа по системе узлов $\tau_0,\tau_1,\dots,\tau_n$ из (3). Используя формулу Гаусса–Чебышева (напр., [7], часть III, гл. V, § 4)

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt\approx\frac{\pi}{n+1}\sum_{k=0}^{n}f\left(\cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right),\quad n\in N,\quad f\in C[-1,1],$$

получим СНАУ для определения неизвестных коэффициентов $\beta_0,\beta_1,\dots,\beta_n$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\beta_k}{\tau_k-t_j}+\frac{\lambda}{n+1}\sum_{k=0}^{n}h(t_j,\tau_k,\beta_k)=y(t_j),\quad j=\overline{1,n},\\&\sum_{k=0}^{n}\beta_k=0,\quad n\in N,\end{aligned} \tag{4}$$

где узлы t_j и τ_k определены в (3).

Вычислительные схемы А и Б эквивалентны. Поэтому достаточно обосновать одну из схем, например, схему Б.

3. Основные результаты

Введем квадратично суммируемые по Лебегу весовые пространства с соответствующими нормами

$$X=\overset{0}{L}_2(p)=\left\{x\in L_2:\int_{-1}^{1}p(t)\,x(t)\,dt=0\right\},\quad \|x\|_X=\left\{\int_{-1}^{1}p(t)\,|x(t)|^2\,dt\right\}^{\frac12},\quad p(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}};$$

$$Y=L_2(q),\quad \|y\|_Y=\left\{\int_{-1}^{1}q(t)\,|y(t)|^2\,dt\right\}^{\frac12},\quad q(t)=\sqrt{1-t^2}.$$

Такой выбор основных пространств позволяет решение некорректной задачи (1)–(2) считать корректно поставленной. Тогда задачу (1)–(2) можно представить как операторное уравнение вида

$$K(x)\equiv Sx+\lambda Th(x)=y\quad (x\in X,\quad y\in Y), \tag{5}$$

где линейный оператор $S:\mathrm{X}\to Y$ и нелинейный оператор $T:X\to Y$ задаются соотношениями

$$Sx=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x(\tau)}{(\tau-t)\sqrt{1-\tau^2}}\,d\tau,\quad Th(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{h(t,\tau,x(\tau))}{\sqrt{1-\tau^2}}\,d\tau.$$

Обоснование корректности решения поставленной задачи в определенных таким образом пространствах опирается на

Утверждение ([2], с. 97). *Оператор $S:X\to Y$ непрерывно обратим и при этом*

$$\|S\|_{X\to Y}=\left\|S^{-1}\right\|_{Y\to X}=1.$$

Отсюда в силу известных результатов (напр., [4], [6], [8]) для операторных уравнений, приводящихся к уравнениям второго рода в банаховых пространствах, и принципа сжимающих отображений доказывается

Теорема 1. *Пусть функция $h(t,\tau,u)$ при любых $(t,\tau)\in[-1,1]^2$ и $u_1,u_2\in R$ удовлетворяет условиям*

$$|h(t,\tau,u_1)-h(t,\tau,u_2)|\le M|u_1-u_2|, \quad M=\mathrm{const}>0, \quad h(t,\,\tau,\,0)=0.$$

Тогда при λ таких, что $|\lambda|<\frac{\sqrt{2}}{M}$, уравнение (5) *имеет единственное решение $x^*\in X$ при любой правой части $y\in Y$ и*

$$\|x^*\|_X\le(1-q)^{-1}\|y\|_Y, \quad q=|\lambda|\frac{M}{\sqrt{2}}.$$

Запишем теперь систему (4) в операторной форме. Для этого в пространствах X и Y введем конечномерные подпространства $X_n=H_n\cap X$, $Y_n=H_{n-1}\cap Y$, где через H_n обозначено множество всех алгебраических многочленов степени не выше $n\in N$. Введем операторы проектирования пространства всех непрерывных на $[-1,1]$ функций $C\equiv C[-1,1]$ на подпространства X_n, Y_n, т. е. $P^\tau_{n+1}:C\to X$ и $Q^t_n:C\to Y$, определяемые по формулам соответственно

$$P^\tau_{n+1}(\varphi;\tau)=\sum_{k=0}^{n}\varphi(\tau_k)\frac{T_{n+1}(\tau)}{(\tau-\tau_k)\,T'_{n+1}(\tau_k)}, \quad \varphi\in C[-1,1],$$
$$Q^t_n(f;t)=\sum_{j=1}^{n}f(t_j)\frac{U_n(t)}{(t-t_j)\,U'_n(t_j)}, \qquad f\in C[-1,1],$$

где узлы τ_k и t_j даны в (3).

Тогда в силу результатов ([2], с. 117) приближенное решение задачи (1)–(2) определим как точное решение операторного уравнения

$$K_n(x_n)\equiv Sx_n+Q^t_nTP^\tau_{n+1}h(x_n)=Q^t_ny \quad (x_n\in X_n,\ \ Q^t_ny\in Y_n).$$

Приведем известные структурные и аппроксимативные свойства введенных выше операторов Лагранжа (напр., [7], [9])

$$P^\tau_{n+1}=\left(P^\tau_{n+1}\right)^2, \ \ \left\|P^\tau_{n+1}\right\|_{C\to X}\le\sqrt{\int_{-1}^{1}p(t)\,dt}=\sqrt{\pi}; \ \ Q^t_n=\left(Q^t_n\right)^2, \ \ \left\|Q^t_n\right\|_{C\to Y}\le\sqrt{\int_{-1}^{1}q(t)\,dt}=\sqrt{\frac{\pi}{2}};$$

$$\left\|y(t)-Q^t_n(y;t)\right\|_Y\le2\left(\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}dt\right)^{\frac12}E_{n-1}(y)_C=\sqrt{2\pi}\,E_{n-1}(y)_C, \quad y\in C[-1,1], \ \ n\in N;$$

$$\left\|f(t)-P^\tau_{n+1}(f;t)\right\|_X\le2\left(\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right)^{\frac12}E_n(f)_C=2\sqrt{\pi}\,E_n(f)_C, \quad f\in C[-1,1], \ \ n\in N,$$

где $E_n(\phi)_C$ — наилучшее равномерное приближение функции $\phi\in C[-1,1]$ алгебраическими многочленами из H_n.

С учетом свойств операторов проектирования, по аналогии с теоремой 1, для вычислительной схемы м. м. к. доказывается

Теорема 2. *Если $y\in \mathrm{C}[-1,1]$, то в условиях теоремы* 1 *система уравнений* (5) *имеет единственное решение $\beta^*_0,\beta^*_1,\ldots,\beta^*_n\in R$ при любых $n\in N$, а приближенное решение*

$$x^*_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\beta^*_kl_k(t)$$

удовлетворяет неравенству

$$\|x^*_n\|_X\le\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(1-q)^{-1}\|y\|_C.$$

Скорость сходимости м. м. к. устанавливает

Теорема 3. *Пусть непрерывные функции* $y(t)$ *и* $h(t,\tau,u)$ *таковы, что в условиях теоремы* 1 *решение* $x^*(t) \in C[-1,1]$ *и функция* $S(x^*;t) \in C[-1,1]$. *Тогда м. м. к., изложенный выше, сходится в пространстве* X *со скоростью, определяемой неравенством*

$$\|x^* - x_n^*\| \le \frac{\sqrt{2\pi}}{1-q}\left\{E_{n-1}(Sx^*)_C + |\lambda|\, E_{2n+1}^{\tau}(h(x^*))_C + |\lambda|\, ME_n(x^*)_C\right\}, \quad n \in N,$$

где $E_n^{\tau}(h)_C$ *— частное наилучшее равномерное приближение функции* $g(t,\tau) = h(t,\tau,x^*(\tau))$ *по переменной* τ, *а постоянные* q *и* M *определены выше.*

Приведем схему доказательства. Для точного и приближенного решений $x^*(t)$ и $x_n^*(t)$ справедливы тождества

$$Sx^* \equiv y - \lambda Th(x^*), \quad Sx_n^* \equiv Q_n^t y - \lambda Q_n^t TP_{n+1}^{\tau} h(x_n^*).$$

Так как по условию теоремы $Sx^* \in C[-1,1]$, то находим

$$S(x^* - x_n^*) = (Sx^* - Q_n^t Sx^*) + Q_n^t S(x^* - x_n^*),$$
$$Q_n^t Sx^* - Q_n^t Sx_n^* = -\lambda Q_n^t T\left[h(x^*) - P_{n+1}^{\tau} h(x^*)\right] - \lambda Q_n^t TP_{n+1}^{\tau}\left[h(x^*) - h(x_n^*)\right].$$

Отсюда, применяя неравенство треугольника для нормы, имеем

$$\begin{aligned}\|x^* - x_n^*\|_X = \left\|S^{-1}\right\|_{Y\to X}\|Sx^* - Sx_n^*\|_Y \le \left\|Sx^* - Q_n^t Sx^*\right\|_Y + \\ + |\lambda|\,\left\|Q_n^t\right\|_{C\to Y}\left\|T\left[h(x^*) - P_{n+1}^{\tau} h(x^*)\right]\right\|_C + |\lambda|\,\left\|Q_n^t\right\|_{C\to Y}\left\|TP_{n+1}^{\tau}\left[h(x^*) - h(x_n^*)\right]\right\|_C. \quad (6)\end{aligned}$$

С помощью свойств оператора Q_n^t первое слагаемое в (6) оценивается просто

$$\left\|Sx^* - Q_n^t Sx^*\right\|_Y \le \sqrt{2\pi} E_{n-1}\,(Sx^*)_C. \tag{7}$$

Далее, учитывая известное неравенство (напр., [9], с. 9)

$$\left|\int_{-1}^{1}\frac{f(t) - P_n(f;t)}{\sqrt{1-t^2}}dt\right| \le 2E_{2n-1}(f)_C\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2\pi E_{2n-1}(f)_C, \quad f \in C[-1,1],$$

где $P_n(f;t)$ — определенный выше интерполяционный многочлен по узлам Чебышева первого рода, для второго слагаемого из правой части (6) имеем

$$|\lambda|\,\left\|Q_n^t\right\|_{C\to Y}\left\|T\left[h(x^*) - P_{n+1}^{\tau} h(x^*)\right]\right\|_C \le |\lambda|\sqrt{2\pi}\, E_{2n+1}^{\tau}(h(x^*))_C. \tag{8}$$

Для оценки третьего слагаемого из (6) воспользуемся тем фактом, что квадратурная формула (4) является формулой наивысшей степени точности. Следовательно, она точна для любого алгебраического многочлена степени не выше $2n+1$. Отсюда находим

$$\begin{aligned}|\lambda|\,\left\|Q_n^t\right\|_{C\to Y}\left\|TP_{n+1}^{\tau}\left[h(x^*) - h(x_n^*)\right]\right\|_C \le |\lambda|\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left[h(t,\tau_k,x^*(\tau_k)) - h(t,\tau_k,x_n^*(\tau_k))\right]\right\|_C \le \\ \le |\lambda|\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{M}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|x^*(\tau_k) - x_n^*(\tau_k)| \le \frac{|\lambda|\,M}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left|P_{n+1}^{\tau}\left(x^*;\tau_k\right) - x_n^*(\tau_k)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \\ \le \frac{|\lambda|\,M}{\sqrt{2}}\left(\left\|x^* - P_{n+1}^{\tau}x^*\right\|_X + \|x^* - x_n^*\|_X\right). \quad (9)\end{aligned}$$

Из неравенств (7)–(9) следует утверждение теоремы 3.

Литература

1. Michlin S.G., Prößdorf S. *Singuläre Integraloperatoren.* – Berlin: Akademic-Verlag, 1986. – 514 S.
2. Габдулхаев Б.Г. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений* I*-го рода.* – Казань: Изд-во КГУ, 1995. – 288 с.
3. Гусейнов А.И., Мухтаров Х.Ш. *Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений.* – М.: Наука, 1980. – 414 с.
4. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ в нормированных пространствах.* – М.: Физматгиз, 1959. – 684 с.
5. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике.* – М.: Наука, 1968. – 512 с.
6. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977. – 638 с.
7. Натансон И.П. *Конструктивная теория функций.* – М.–Л.: Гостехиздат, 1949. – 688 с.
8. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П. и др. *Приближенное решение операторных уравнений.* – М.: Наука, 1969. – 456 с.
9. Габдулхаев Б.Г. *Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы.* – Казань: Изд-во КГУ, 1995. – 230 с.

Нижнекамский химико-технологический институт

Поступила
12.05.2006