ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 6 (541)

УДК 519.852

В.П. БУЛАТОВ, Т.И. БЕЛЫХ

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ МНОГОЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ, СВЯЗАННЫХ С ОБРАТНЫМИ ЗАДАЧАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Многим математическим задачам естественным образом можно сопоставить семейство так называемых обратных задач. Обычно пару задач называют взаимно обратными друг другу, если в постановку одной из них входит решение или часть решения другой. В данном определении кроется некоторый произвол в том, какую из задач называть прямой, а какую — обратной. Чаще прямой задачей называют наиболее изученную.

Приведем пример. Пусть дана матрица A размеров $m\times n$ и векторы $c\in E^n$, $b\in E^m$, требуется найти вектор

$$x^*\in \operatorname{Argmin}\{c^Tx : x\in R\}, \tag{1}$$

$$R=\{x : Ax\le b,\ x\ge 0\}, \tag{2}$$

где R — компакт.

Обратно: задан вектор x^*, матрица A размеров $m\times n$, требуется найти векторы $c^*\in R_c$, $b^*\in R_b$ такие, что

$$x^*=\operatorname*{argmin}_x\{{c^*}^T x : Ax\le b^*,\ x\ge 0\}, \tag{3}$$

где R_c, R_b — выпуклые компакты.

Естественно задачу (1), (2) назвать прямой, а задачу (3) — обратной задачей линейного программирования. Очевидно, задаче (1), (2) можно сопоставить целое семейство обратных задач вида (3) в зависимости от выбора варьируемых параметров технологической матрицы A, вектора цен c или вектора ресурсов b.

1. Обратные задачи математического программирования

В [1] введено более общее определение обратной задачи математического программирования, которое ниже будет использовано.

Пусть задано параметрическое семейство задач математического программирования

$$\min_x\{\varphi(x,u) : g(x,u)\le 0,\ x\in R_x\}, \tag{4}$$

где $R_x\subset E^n$ — компакт, $u\in E^m$ — векторный параметр, $\varphi(x,u)$ — непрерывная скалярная функция своих аргументов, $g(x,u)$ — непрерывная векторная функция ($g\in E^{m_1}$).

Из семейства (4) требуется определить пару векторов x^*, u^*, обладающую заданными свойствами

$$x^*,u^*\in R_{x,u}=\{x,u : f(x,u)\le 0,\ w(x,u)=0,\ u\in R_u\}, \tag{4'}$$

где $f\in E^{m_2}$, $w\in E^{m_3}$ — непрерывные вектор-функции, $R_u\subset E^m$ — компакт.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 06-01-00465-а.

Иначе, требуется найти пару x^*, u^* такую, что

$$x^* \in \operatorname{Argmin}\{\varphi(x,u^*), g(x,u^*) \le 0,\ x \in R_x\}, \tag{5}$$

$$f(x^*,u^*) \le 0, \quad w(x^*,u^*) = 0, \quad u^* \in R_u. \tag{6}$$

Обратной задаче (5), (6) можно сопоставить прямую задачу вида: *найти*

$$\overline{x}, \overline{u} \in \operatorname{Argmin}\{\varphi(x,u), g(x,u) \le 0,\ x \in R_x,\ x,u \in R_{x,u}\}. \tag{7}$$

Нетрудно видеть, что пара x^*, u^* является допустимой в задаче (7), следовательно,

$$\varphi(\overline{x},\overline{u}) \le \varphi(x^*,u^*).$$

Если в (5) R_x состоит из одной точки, т. е. в задаче (5), (6) неизвестным вектором является векторный параметр u, то получаем задачу типа (3), которая иллюстрируется примерами в конце статьи.

Последнее неравенство определяет связь решений прямой и обратной задач.

Если в (6) положить $f(x,u) \equiv 0$, $w(x,u) = x - x^* = 0$ $(m_3 = n)$, $R_u \equiv E^m$, то $x = x^*$ и из (5), (6) получим стандартную формулировку обратной задачи математического программирования: *найти вектор* u^* *такой, что*

$$x^* \in \operatorname{Argmin}\{\varphi(x,u^*) : g(x,u^*) \le 0,\ x \in R_x\}.$$

В дальнейшем будем предполагать, что целевая функция $\varphi(x,u)$, а также вектор-функция ограничений $g(x,u)$ выпуклы по совокупности переменных x, u, R_x и R_u — выпуклые замкнутые ограниченные множества, $f(x,u)$ — выпуклая вектор-функция по совокупности переменных x, u, $w(x,u)$ — аффинная вектор-функция. При сделанных предположениях прямая задача (7) является задачей выпуклого программирования.

Исследуем сложность обратной задачи (5), (6) с другой формой постановки этой задачи. Для удобства введем следующие обозначения:

$$\begin{gathered} R(u) = \{x : g(x,u) \le 0,\ x \in R_x\}, \\ \varphi_0(u) = \min_x\{\varphi(x,u) : x \in R(u)\}, \\ M(u) = \operatorname{Argmin}\{\varphi(x,u) : x \in R(u)\}. \end{gathered} \tag{8}$$

Допустим, что $R(u) \neq \emptyset$. В силу наших предположений $\varphi_0(u)$ — выпуклая функция [2].

Исходную обратную задачу можно трактовать следующим образом: *найти вектор* $u^* \in R_u$ *такой, что в множестве* $M(u^*)$ *решений задачи* (8) *найдется вектор*

$$x^* \in R_{x,u^*} = \{x : f(x,u^*) \le 0,\ w(x,u^*) = 0\}.$$

Ограничения $x \in M(u)$ в [2] названы ограничениями экстремального типа. Некоторые простые задачи с ограничениями экстремального типа изучались в [3]. Эти ограничения можно задать в стандартной форме в виде равенств и неравенств

$$\varphi(x,u) \le \varphi_0(u), \quad g(x,u) \le 0, \quad x \in R_x.$$

Тогда обратную задачу (5), (6) можно записать в виде [2]. Определить пару x^*, u^*, удовлетворяющую следующей системе условий:

$$\psi(x,u) = \varphi(x,u) - \varphi_0(u) \le 0, \tag{9}$$

$$g(x,u) \le 0, \quad f(x,u) \le 0, \quad w(x,u) = 0, \quad x \in R_x, \quad u \in R_u. \tag{10}$$

В силу выпуклости множеств R_x, R_u, вектор-функций $g(x,u)$, $f(x,u)$ по совокупности переменных x, u и линейности вектор-функции $w(x,u)$ ограничения (10) задают выпуклое множество E^{n+m}. Однако в левой части неравенств (9) присутствует разность двух выпуклых функций, что существенно усложняет решение обратной задачи.

Кроме того, функция $\varphi_0(u)$ задана неявно и множество, определяемое неравенством (9), не удовлетворяет условиям регулярности, т. к. при любом фиксированном векторе $u \in R_u$ множество $\{\varphi(x,u) - \varphi_0(u) < 0,\ x \in R(u)\}$ пусто. Эти факты еще более усложняют решение обратных задач математического программирования.

Вместе с тем прямая задача (7) при сделанных предположениях является задачей выпуклого программирования, что подтверждает известный тезис о том, что если даже прямая задача "хороша", обратная почти всегда "плоха".

Рассмотрим теперь частный случай задачи (9), (10). Допустим, что вектор-функции $g(x,u)$, $f(x,u)$ линейны, $w(x,u) \equiv 0$, а множества R_x и R_u — выпуклые многогранники, заданные системой линейных неравенств, т. е. условия (10) определены в виде $Ax + Bu \leq b$, где A и B — матрицы соответствующих размерностей, b — заданный вектор.

Тогда задаче (9), (10) сопоставим следующую, неявно заданную, задачу

$$\min\{\psi(x,u) = \varphi(x,u) - \varphi_0(u) : x, u \in R\}, \tag{11}$$

где $R = \{x, u : Ax + Bu \leq b\}$, $\varphi(x,u)$ непрерывно дифференцируема по x и u.

Для решения задачи (11) предлагаются итерационные процессы, аналогичные [4].

Допустим, что надграфик функции $\psi(x,u)$ на допустимом множестве R погружен в некоторый ограниченный снизу многогранник

$$R^k = \{x, u, \alpha : \alpha \in E^1,\ D^k y \leq d^k,\ Ax + Bu \leq b\}, \quad y = \{x, u; \alpha \in E^1\}.$$

Пусть $\{x^k, u^k, \alpha_k\} = y^k \in E^{m+n+1}$ (невырожденная крайняя точка R^k) разрешает задачу линейного программирования

$$\min\{\alpha : x, u, \alpha \in R^k\},$$

A^k — $(m+n+1) \times (m+n+1)$-матрица активных в точке x^k, u^k, α_k ограничений, т. е. $A^k y^k = b^k$, s^{kj} — столбцы матрицы, обратной к A^k.

Запишем уравнения лучей, исходящих из точки y^k в соседние вершины многогранника R^k

$$y = y^k - \lambda^j s^{kj}, \quad j = \overline{1, n+m+1}, \quad \lambda^j > 0. \tag{12}$$

Решим следующую задачу выпуклого программирования:

$$\min_x\{\varphi(x,u^k) : x \in R(u^k)\} = \varphi(\widetilde{x}^k, u^k) = \varphi_0(u^k).$$

Затем найдем точки $\{y^{k,1}, \ldots, y^{k,n+m+1}\}$ пересечения лучей (12) с графиком функции

$$\psi_k(x,u) = \varphi(x^k,u^k) + \nabla\varphi_x(x^k,u^k)^T(x - x^k) + \nabla\varphi_u(x^k,u^k)^T(u - u^k) - \varphi(\widetilde{x}^k, u),$$

т. е. с поверхностью $\psi_k(x,u) = \alpha$. Через эти точки проведем секущую плоскость $\widetilde{\alpha}^{k^T} y = \beta_k$ и определим многогранник

$$R^{k+1} = \{x, u, \alpha : x, u, \alpha \in R^k, \widetilde{\alpha}^{k^T} y \leq \beta_k\},$$

не содержащий предыдущего решения $\{x^k, u^k, \alpha_k\}$. По построению $R^{k+1} \subset R^k$. Следующее приближение x^{k+1}, u^{k+1}, α_{k+1} найдем из решения задачи линейного программирования

$$\min\{\alpha : x, u, \alpha \in R^{k+1}\}.$$

Для (4), (4$'$) в случае, если $\|x_k\| \leq c < \infty$, доказана сходимость подобных итерационных процессов в задачах математического программирования при поиске глобального минимума функций на выпуклом многограннике, которые в каждой точке имеют вогнутую функцию миноранту. Принадлежность к этому классу задачи (11) доказывает

Лемма. Имеют место следующие утверждения:
1) $\psi_k(x,u)$ — *вогнутая функция*,
2) $\psi_k(x^k,u^k) = \varphi(x^k,u^k) - \varphi_0(u^k)$,
3) $\psi_k(x,u) \leq \varphi(x,u) - \varphi_0(u)$.

Утверждения пп. 1), 2) очевидны.

Докажем п. 3). Для любого фиксированного x по определению $\varphi_0(u) \le \varphi(x,u)$ или $\varphi_0(u) \le \varphi(\widetilde{x}^k, u)$, т. е. $\varphi(x,u) - \varphi_0(u) \ge \varphi(x,u) - \varphi(\widetilde{x}^k,u)$. Тогда в силу выпуклости $\varphi(x,u)$ будем иметь

$$\varphi(x,u) - \varphi_0(u) \ge \varphi(x,u) - \varphi(\widetilde{x}^k,u) \ge \varphi(x^k,u^k) + \nabla\varphi_x(x^k,u^k)^T(x-x^k) + \\ + \nabla\varphi_u(x^k,u^k)^T(u-u^k) - \varphi(\widetilde{x}^k,u) = \psi_k(x,u),$$

т. е. $\psi_k(x,u)$ является вогнутой минорантой минимизируемой функции и, следовательно, $\psi_k(x,u)$ может быть использована для построения правильного отсечения в E^{m+n+1} [3], т. е. такого отсечения $\widetilde{\alpha}^k y \le \beta_k$, что множество R^{k+1} содержит надграфик функции $\psi(x,u)$. Как уже отмечено, сходимость итерационного процесса доказана ранее в [4], [5].

2. Метод центров Хьюарда в обратных задачах математического программирования

Метод допускает непосредственное обобщение на случай нелинейных ограничений (10). Рассмотрим решение задачи математического программирования вида

$$\min\{\varphi_0(z) : \varphi_i(z) \le 0,\ i = \overline{1,m},\ z \in R\}, \tag{13}$$

где $R \in E^n$ — выпуклый многогранник, $\varphi_0(z)$, $\varphi_i(z)$ — выпуклые функции. Нелинейные ограничения $\varphi_i(z) \le 0$ методом Хьюарда [4] для задачи (13) вносятся во вспомогательный минимизируемый функционал

$$\psi_k(z) = \max\{\varphi_0(z) - \varphi_0(z^k), \varphi_1(z), \dots, \varphi_m(z)\}. \tag{14}$$

Тогда предлагается использовать следующий итерационный процесс [4]:

$$z^{k+1} = \operatorname{argmin}\{\psi_k(z) : z \in R\}. \tag{15}$$

Установим связь метода Хьюарда [4] с методами погружения, изученными в [3].

Пусть $\varphi_0^* = \min\{\varphi_0(z) : z \in R^0\}$, где $R^0 = \{z : z \in R,\ \varphi_i(z) \le 0,\ i = \overline{1,m}\}$. Тогда решение задачи (14) эквивалентно решению задачи математического программирования

$$\min\{\psi(z) : z \in R\}, \tag{16}$$

где

$$\psi(z) = \max\{\varphi_0(z) - \varphi_0^*, \varphi_1(z), \dots, \varphi_m(z)\}. \tag{17}$$

Определим надграфик функции $\psi(z)$ как множество

$$R_{n+1} = \{z, z_{n+1} : z \in R,\ z_{n+1} \in E^1,\ \psi(z) \le z_{n+1}\}.$$

Тогда (16), (17) эквивалентна задаче

$$\min\{z_{n+1} : z, z_{n+1} \in R_{n+1}\}. \tag{18}$$

В [3] дано следующее определение методов погружения для решения задачи (18).

Пусть построено множество $R^k_{n+1} \supset R_{n+1}$ и точка $\{z^k, z^k_{n+1}\}$ разрешает задачу

$$\min\{z_{n+1} : z, z_{n+1} \in R_{n+1}\}. \tag{19}$$

Сконструируем множество $R^k_{n+1} \supset R_{n+1}$ такое, что $z^k, z^k_{n+1} \notin R^{k+1}_{n+1}$. Затем найдем следующее приближение z^{k+1}, z^{k+1}_{n+1} из решения задачи

$$\min\{z_{n+1} : z, z_{n+1} \in R^{k+1}_{n+1}\}. \tag{20}$$

Если существует $K_1 \subset K = \{1, 2, \dots\}$ со свойством

$$\lim_{k\to\infty} z^k_{n+1} = \varphi_0^*, \quad k \in K_1, \tag{21}$$

то описанный выше метод (19)–(21) назовем методом последовательного погружения надграфика целевой функции или просто методом погружения. Справедливы следующие достаточные условия сходимости методов погружения.

Теорема 1. *Пусть заданы множества*

$$R_{n+1}^k = \{z, z_{n+1} : z \in R,\ \Phi_k(z) \le z_{n+1}\} \quad \forall k \in K,$$

где $\{\Phi_k(z)\}$ *— такое семейство равностепенно непрерывных функций вектора* $z \in E^n$*, что*

$$\Phi_i(z^i) \le \Phi_k(z^k) \quad \forall k, i \in K \quad (k > i), \tag{22}$$

$$\Phi_k(z^i) \ge \varphi_0^* \qquad \forall k, i \in K \quad (k > i), \tag{23}$$

где $z^i = \operatorname{argmin}\{z_{n+1} : z, z_{n+1} \in R_{n+1}^i\}$, $i \in K$. *Тогда существует* $K_1 \subset K$ *такое, что*

$$\lim_{k\to\infty} z_{n+1}^k = \varphi^*, \quad k \in K_1.$$

Доказательство. Выделим из последовательности $\{z^k\}$ сходящуюся подпоследовательность с номерами $k \in K_1 \subset K$.

В силу условия (22) $\varphi_0^* \ge \Phi_k(z^k) \ge \Phi_i(z^i) \quad \forall k, i \in K_1$ $(k > i)$. Следовательно, существует

$$\lim_{k\to\infty} \Phi_k(z^k) = \lim_{k\to\infty} z_{n+1}^k = \varphi^1 \le \varphi_0^*, \quad k \in K_1,$$

или

$$\Phi_k(z^k) \le \varphi^1 \le \varphi_0^* \quad \forall k \in K_1. \tag{24}$$

Допустим

$$\varphi^1 < \varphi_0^*, \quad \text{т. е.} \quad \varphi_0^* - \varphi^1 \ge \varepsilon > 0. \tag{25}$$

Подставляя левую часть (23) и (24) в (25), только усилим последнее неравенство

$$\Phi_k(z^i) - \Phi_k(z^k) \ge \varepsilon \quad \forall\, k > i, \quad k, i \in K_1 \subset K.$$

В силу равностепенной непрерывности $\{\Phi_k(z)\}$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\|z^i - z^k\| > \delta \quad \forall k > i.$$

Последнее противоречит сходимости z^k и, следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} z_{n+1}^k = \varphi_0^*, \quad k \in K_1. \quad \square$$

Многие итерационные процессы укладываются в схему методов погружения и удовлетворяют достаточным условиям сходимости, сформулированным в теореме 1. Например, методы типа Пиявского и Шуберта, методы отсекающих плоскостей в выпуклом программировании и многие другие. Здесь покажем, что метод центров Хьюарда укладывается в указанную схему.

Теорема 2. *Итерационный процесс* (13), (15) *для решения задачи* (14) *есть метод погружения для решения эквивалентной задачи* (16), (17).

Доказательство. Рассмотрим задачу (16), (17) в виде (18). Определим множество

$$R_{n+1}^k = \{z, z_{n+1} : z \in R,\ \psi_k(z) \le x_{n+1}\}.$$

Тогда итерационный процесс (13), (15) можно переписать в виде

$$x^{k+1} = \operatorname{argmin}\{z_{n+1} : z, z_{n+1} \in R_{n+1}^k\}.$$

Очевидно, $R_{n+1}^k \supset R_{n+1}$, причем в силу построения $z^k, z_{n+1}^k \notin R_{n+1}^{k+1}$.

Остается доказать, что существует множество индексов $K_1 \subset K$ такое, что

$$\lim_{k\to\infty} \psi_k(z^k) = \lim_{k\to\infty} z_{n+1}^k = 0, \quad k \in K_1.$$

Последовательность $\{\psi_i(z^i)\}$ по построению монотонно неубывающая и неположительная, т. е.

$$\psi_i(z^i) < \psi_k(z^k) \leq 0 \quad \forall k \in K, \quad i < k.$$

В силу (15)

$$\psi_k(z^i) \geq 0 \quad \forall i, k \in K, \quad i < k. \tag{26}$$

Следовательно, существует

$$\lim_{k\to\infty} \psi_k(z^k) = \lim_{k\to\infty} z^k_{n+1} = P \leq 0,$$

т. е. $\psi_k(z^k) \leq P \leq 0$.

Допустим, что

$$-P \geq \varepsilon > 0. \tag{27}$$

Складывая (26) и (27), получим

$$\psi_k(z^i) - \psi_k(z^k) > \varepsilon, \quad k > i, \tag{28}$$

а т. к.

$$\psi_k(z^i) = \varphi_0(z^i) - \varphi_0(z^k), \quad \psi_k(z^k) = \varphi_0(z^k) - \varphi_0(z^k),$$

то из (28) будем иметь $|\varphi_0(z^i) - \varphi_0(z^k)| > \varepsilon$.

Тогда в силу непрерывности $\varphi_0(z)$ существует $\delta > 0$ такое, что $\|z^i - z^k\| > \delta$, $i > k$, $i, k \in K$. Последнее противоречит ограниченности R. □

По существу, при доказательстве теоремы 2 проверялось выполнение условий (22) и (23) теоремы 1.

Вернемся теперь к применению метода центров (13), (15) к решению обратных задач вида (9), (10). Если $\varphi_0(z)$ — разность двух выпуклых функций, а $\varphi_i(z)$ — выпуклые функции, то вогнутую миноранту, необходимую для построения правильного отсечения в методе Хьюарда, на каждом шаге процесса определяем или леммой, или разложением в ряд Тейлора, ограничиваясь линейными членами функции $\varphi_i(z)$, $i = \overline{1, m}$, в окрестности текущей точки $\{z^k, u^k\}$.

Пример 1. Пусть в задаче (9) $n = 2$, $m_1 = 2$, $m = 1$, $x^* = (1, 1)$,

$$\begin{gathered}
\varphi(x, u) = x_1^2 + 2x_2^2 - ux_1 - 2ux_2,\\
g_1(x, u) = x_1 + ux_2 - 8,\\
g_2(x, u) = u_1 - x_2 - 12,\\
R_x = E^2_+ = \{x : x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\},\\
R_u = E^1_+.
\end{gathered}$$

Тогда задача (15) может быть переписана в следующей форме:

$$\begin{gathered}
\min\{\psi(x^*, u) = \varphi(x^*, u) - \varphi_0(u)\},\\
0 \leq u \leq 7,
\end{gathered}$$

где $\varphi(x^*, u) = 3 - 3u$. Задавая точность $\varepsilon = 10^{-3}$ и начальное значение $u^0 = 0$, получим решение $u^* = 2$ за восемь итераций метода отсечений.

Пример 2. Пусть в задаче (9) $n = 2$, $m_1 = 2$, $m = 2$, $x^* = (1, 1)$,

$$\begin{gathered}
\varphi(x, u) = u_2x_1^2 + u_1x_2^2 - u_1x_1 - 2u_2x_2,\\
g_1(x, u) = u_2x_1 + u_1x_2 - 8,\\
g_2(x, u) = u_1x_1 - u_2x_2 - 12,\\
R_x = R_u = E^2_+.
\end{gathered}$$

При старте с различных начальных точек u^0 было получено (в среднем за десять итераций) четыре различных решения: (5.35,2.65), (3,5.15), (2.69,1.38), (2,1).

Литература

1. Антипин А.С. *Обратные задачи оптимизации: постановка задачи и подходы к решению* // Сб. "Обратные задачи математического программирования". – М.: Изд-во ВЦ РАН, 1992. – С. 3–33.
2. Левитин Е.С. *Задачи математического программирования при наличии ограничений экстремального типа* // Сб. "Обратные задачи математического программирования". – М.: Изд-во ВЦ РАН, 1992. – С. 102–132.
3. Булатов В.П. *Методы погружения в задачах оптимизации.* – Новосибирск: Наука, 1977. – 158 с.
4. Булатов В.П. *Методы решения многоэкстремальных задач* // Методы численного анализа и оптмизации. – Новосибирск: Наука, 1987. – С. 133–157.
5. Bulatov V.P., Khamisov O.V. *The branch and bound method with cuts in E^{n+1} for solving concave programming problem* // Lecture Notes in Control and Informat. Sci. – 1992. – V. 180. – P. 273–281.

Институт систем энергетики
им. Л.А. Мелентьева
Сибирского отделения
Российской академии наук

Поступила
12.12.2006