

УДК 533.9.01

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ЕМКОСТНОГО РАЗРЯДА ПРИ АТМОСФЕРНОМ ДАВЛЕНИИ В АРГОНЕ

В.Ю. Чебакова

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

В работе построена одномерная математическая модель высокочастотного емкостного разряда в аргоне в локальном приближении между симметричными электродами при атмосферном давлении. В модели учтено наличие электронов, атомарных и молекулярных ионов, метастабильных атомов и димеров аргона, а также атомов в основном состоянии. Описан численный алгоритм реализации математической модели, основанный на конечномерной аппроксимации задачи с помощью разностных схем с последующим применением для ее решения итерационного процесса. Для реализации итерационного процесса разработан комплекс программ в среде MatLab. С помощью этого комплекса для модельной задачи построены характеристики высокочастотного емкостного разряда в плазматроне с межэлектродными расстояниями 0.2 и 2 см при атмосферном давлении. Получено хорошее качественное и количественное согласование результатов численных расчетов с известными из литературы данными натуральных экспериментов и расчетными данными.

Ключевые слова: математическое моделирование, высокочастотный емкостной разряд, разряд при атмосферном давлении, локальное приближение, численные эксперименты

Введение

Низкотемпературная плазма широко применяется в различных областях науки и техники [1–6]. Для получения плазмы используются различные типы разрядов, и в их числе большое место занимают высокочастотные разряды, в частности высокочастотные емкостные (ВЧЕ) разряды [7–12]. В качестве плазмообразующего газа часто используется аргон. Для связи внутренних и внешних параметров разряда применяются экспериментально-расчетные методики, которые, взаимно дополняя друг друга, позволяют решать многие задачи физики и химии низкотемпературной плазмы [13, 14]. В предыдущих работах автора [15, 16] был дан обзор работ, посвященных моделированию ВЧЕ-разрядов. При этом отмечалось, что, как правило, в работах, посвященных моделированию ВЧЕ-разряда в аргоне, предполагается, что плазма состоит из электронов, атомарных ионов, метастабильных атомов и атомов в основном состоянии. Однако в статье [17] для СВЧ-разряда исследована зависимость соотношений концентраций молекулярных и атомных ионов в аргоне при атмосферном давлении от температуры газа и выявлено, что при температурах порядка 500 К преобладают молекулярные ионы, тогда как при температурах от 1500 К начинается рост концентрации атомарных ионов. Поэтому в работах [18–21] путем решения модельных задач, учитывающих наличие электронов, атомарных ионов, метастабильных атомов и атомов в основном состоянии, исследована зависимость газовой температуры и остальных характеристик разряда от граничных

условий, описывающих свойства образца-электрода, и сделан вывод о необходимости включения в кинетическую схему молекулярных ионов и димеров аргона.

В настоящей работе предложена одномерная самосогласованная модель ВЧЕ-разряда при атмосферном давлении в аргоне, учитывающая вышеуказанные факторы. Разработан приближенный алгоритм численной реализации предложенной нелинейной модели, основанный на ее конечномерной аппроксимации с последующим применением итерационного метода. Отметим, что различные итерационные методы решения нелинейных задач, в том числе с частными производными, предлагались и ранее (см., например, [22–26] и др.). Однако изучаемая нами задача имеет ряд особенностей, в частности наличие разных временных масштабов изменения основных характеристик установившегося состояния ВЧЕ-разряда пониженного давления. Кроме того, характерной особенностью задачи является большие градиенты плотности заряженных частиц и напряженности электрического поля, электронной температуры в приэлектродных слоях на границах расчетной области. Поэтому потребовалась разработка специальных методов, учитывающих эти особенности. Результаты проведенных численных экспериментов хорошо качественно и количественно согласуются с известными из литературы данными натуральных экспериментов, а также с результатами численных расчетов.

1. Постановка задачи

Изучается ВЧЕ-разряд между двумя плоско-параллельными электродами, один из которых заземлен, а другой соединен с ВЧЕ-генератором, расстояние между электродами меньше размеров самих электродов. В этих условиях электрическое поле близко к потенциальному и разряд однороден вдоль электродов, что позволяет применить одномерную модель, которая допускает в диффузионно-дрейфовой постановке учесть кинетику плазмохимических процессов. Оценки времени и расстояния, за которые электроны теряют приобретенную от поле энергию, показывают, что при моделировании ВЧЕ-разряда при атмосферных давлениях можно использовать локальное приближение, при котором параметры электронной компоненты плазмы (коэффициенты диффузии, подвижности, а также средняя энергия, скорости процессов плазмохимических реакций и т. д.) зависят от локального значения приведенного электрического поля (отношения E/N напряженности электрического поля E к концентрации тяжелых частиц N – концентрации атомов аргона в основном состоянии) [27]. Разработанная модель учитывает следующие особенности ВЧЕ-разряда: существование областей, где квазинейтральность не наблюдается, изменение во времени приложенного напряжения, а также наличие процессов с участием метастабильных атомов, молекулярных ионов и димеров. Эффективное перемешивание четырех низших близкорасположенных электронно-возбужденных состояний позволяет заменить их единым уровнем [28, 29].

Обозначим через b расстояние между электродами, считаем, что заземленный электрод находится в точке $x = 0$, нагруженный – в точке $x = b$ (ось Ox направлена перпендикулярно поверхности электродов).

Процессы, происходящие в ВЧЕ-разряде при атмосферных давлениях, описываются с помощью следующих начально-краевых задач и задач Коши.

1.1. Уравнение конвекции-диффузии для атомарных ионов.

$$\frac{\partial n_+}{\partial t} + \frac{\partial G_+}{\partial x} = R_1 n_e N + R_2 n_m^2 + R_3 n_m n_e - R_5 n_+ n_e^2 - R_4 n_+ n_e + R_{12} n_e n_{2+} - R_{11} n_+ N^2 + R_{20} N n_{2+}, \quad 0 < x < b, \quad t > 0, \quad (1)$$

где n_e , n_{2+} – концентрации электронов и атомарных и молекулярных положительно заряженных ионов соответственно, n_m – эффективная концентрация

метастабильных атомов аргона, $G_+ = -D_+ \partial n_+ / \partial x + n_+ \mu_+ E$ – плотность потока атомарных ионов, μ_+ – подвижность атомарных ионов, D_+ – коэффициент диффузии атомарных ионов, $E = \partial \varphi / \partial x$, φ – потенциал электрического поля.

Здесь и далее R_i , $i = 1, 2, \dots, 20$, – коэффициенты скоростей плазмохимических реакций, приведенные в табл. 1.

В соответствии с [28] уравнение (1) дополним следующими граничными условиями:

при $x = 0$

$$\begin{cases} G_+(0, t) = (-n_+ v_+ + \mu_+ n_+ E)|_{(0+, t)}, & E < 0, \\ G_+(0, t) = (-n_+ v_+)|_{(0+, t)}, & E \geq 0; \end{cases} \quad (2)$$

при $x = b$

$$\begin{cases} G_+(b, t) = (n_+ v_+ + \mu_+ n_+ E)|_{(b-, t)}, & E \geq 0, \\ G_+(b, t) = (n_+ v_+)|_{(b-, t)}, & E < 0. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь m_+ – масса атомарного иона, $v_+ = \sqrt{8kT_a / (\pi m_+)}/4$ – средняя тепловая скорость атомарных ионов, k – постоянная Больцмана.

В модели предполагается равенство температур T_a атомов, атомарных ионов и возбужденных атомов, что отражено при формулировке граничных условий (2), (3), а также ниже – (5), (6) и (13).

1.2. Уравнение конвекции-диффузии для молекулярных ионов Ar_{2+}

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{2+}}{\partial t} + \frac{\partial G_{2+}}{\partial x} = & R_{10} n_m^2 + R_{11} n_+ N^2 - R_{13} n_{2+} n_e + R_{16} n_{2*}^2 + \\ & + R_{17} n_m n_{2*} - R_{20} N n_{2+}, \quad 0 < x < b, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где n_{2*} – концентрация димеров аргона, $G_{2+} = -D_{2+} \partial n_{2+} / \partial x + n_{2+} \mu_{2+} E$ – плотность потока молекулярных ионов, μ_{2+} – подвижность молекулярных ионов, D_{2+} – коэффициент диффузии молекулярных ионов.

Как и для уравнения конвекции-диффузии для атомарных ионов, граничные условия сформулируем в следующем виде (m_{2+} – масса молекулярного положительно заряженного иона):

при $x = 0$

$$\begin{cases} G_{2+}(0, t) = (-n_{2+} v_{2+} + \mu_{2+} n_{2+} E)|_{(0+, t)}, & E < 0, \\ G_{2+}(0, t) = (-n_{2+} v_{2+})|_{(0+, t)}, & E \geq 0; \end{cases} \quad (5)$$

при $x = b$

$$\begin{cases} G_{2+}(b, t) = (n_{2+} v_{2+} + \mu_{2+} n_{2+} E)|_{(b-, t)}, & E \geq 0, \\ G_{2+}(b, t) = (n_{2+} v_{2+})|_{(b-, t)}, & E < 0, \end{cases} \quad (6)$$

где $v_{2+} = \sqrt{8kT_a / (\pi m_{2+})}/4$ – средняя тепловая скорость молекулярных ионов.

1.3. Уравнение конвекции-диффузии для электронного газа

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial G_e}{\partial x} = & R_1 n_e N + R_2 n_m^2 + R_3 n_m n_e - R_4 n_e n_+ - R_5 n_+ n_e^2 + \\ & + R_{10} n_m^2 - R_{13} n_{2+} n_e + R_{16} n_{2*}^2 + R_{17} n_m n_{2*}, \quad 0 < x < b, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где $G_e = -D_e \partial n_e / \partial x - n_e \mu_e E$ – плотность потока электронов, μ_e – подвижность электронов, D_e – коэффициент диффузии электронов.

Граничные условия при $x = 0$ выбираются в виде

$$\begin{cases} G_e(0, t) = (-n_e v_e - \mu_e n_e E)|_{(0+, t)}, & E \geq 0, \\ G_e(0, t) = (-n_e v_e - \gamma(\mu_+ n_+ E + \mu_{2+} n_{2+} E))|_{(0+, t)}, & E < 0; \end{cases} \quad (8)$$

а при $x = b$ – в виде

$$\begin{cases} G_e(b, t) = (n_e v_e - \mu_e n_e E)|_{(b-, t)}, & E < 0, \\ G_e(b, t) = (n_e v_e - \gamma(\mu_+ n_+ E + \mu_{2+} n_{2+} E))|_{(b-, t)}, & E \geq 0. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь γ – коэффициент вторичной электронной эмиссии с электродов, T_e – температура электронов, m_e – масса электрона, $v_e = \sqrt{8kT_e/(\pi m_e)}/4$ – средняя тепловая скорость электронов.

При нормальных условиях считается, что в газе содержится $\sim 10^4$ см⁻³ заряженных частиц. Это значение примем за начальное условие для полной концентрации заряженных положительных частиц и электронов.

1.4. Уравнение Пуассона для потенциала электрического поля

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{q_e}{\varepsilon_0} (n_+ + n_{2+} - n_e), \quad 0 < x < b, \quad t > 0, \quad (10)$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} \varphi(b, t) = V_a \sin(\omega t) & (\text{нагруженный электрод}), \\ \varphi(0, t) = 0 & (\text{заземленный электрод}). \end{cases} \quad (11)$$

Здесь q_e – заряд электрона, ε_0 – электрическая постоянная вакуума, ω – круговая частота электромагнитного поля, V_a – амплитуда колебания напряжения на нагруженном электроде.

1.5. Уравнение баланса концентрации метастабильных атомов

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_m}{\partial t} - \frac{\partial G_m}{\partial x} = & R_6 n_e N + R_{18} n_e n_{2*} - R_2 n_m^2 - R_3 n_m n_e - R_7 n_m - R_8 n_m N - \\ & - R_9 n_m n_e - R_{10} n_m^2 - R_{15} n_m N^2 - R_{17} n_m n_{2*} - R_{19} n_m N^2, \quad 0 < x < b, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $G_m = D_m \partial n_m / \partial x$ – плотность потока метастабильных атомов, D_m – коэффициент диффузии метастабильных атомов аргона.

Граничные условия для уравнения (12) имеют вид

$$\begin{cases} G_m(0, t) = (-n_a v_a)|_{(0+, t)}, \\ G_m(b, t) = (n_a v_a)|_{(b-, t)}, \end{cases} \quad (13)$$

где $v_a = \sqrt{8kT_a/(\pi m_a)}/4$ – средняя тепловая скорость возбужденных атомов.

Начальные условия для уравнения (12) зададим в виде

$$n_m(x, 0) = 0. \quad (14)$$

1.6. Кинетическое уравнение для димеров аргона Ar_2^*

$$\frac{\partial n_{2*}}{\partial t} = R_{19} n_m N^2 + R_{15} N^2 n_m - R_{14} n_{2*} - R_{16} n_{2*}^2 - R_{17} n_m n_{2*} - R_{18} n_e n_{2*}. \quad (15)$$

Начальные условия выберем нулевыми, так же как и для метастабильных атомов:

$$n_{2*}(x, 0) = 0. \quad (16)$$

1.7. Кинетическое уравнение для нейтральных атомов

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} = & -R_1 n_e N + R_2 n_m^2 + R_4 n_+ n_e + R_5 n_+ n_e^2 - R_6 n_e N + R_7 n_m + \\ & + R_8 n_m N + R_9 n_m n_e - R_{11} n_+ N^2 + R_{12} n_{2+} n_e + 2R_{13} n_{2+} n_e + R_{14} n_{2*} - \\ & - R_{15} n_m N^2 + 2R_{16} n_{2*} + R_{17} n_m n_{2*} - R_{19} n_m N^2, \quad 0 < x < b, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Начальные условия, исходя из уравнения идеального газа, будем ставить как $P/(kT_a(x, 0)) = N(x, 0)$.

1.8. Уравнение теплопроводности атомно-ионного газа. Вследствие того, что флуктуации атомной температуры возле средних за период изменения поля значений пренебрежимо малы, уравнение баланса атомной температуры можно рассматривать усредненным по периоду колебания электрического поля, определяемому частотой $f = 13.56$ МГц высокочастотного генератора. Кроме того, считаем, что коэффициент передачи энергии, полученной ионами при перемещении их полем к атомам, равен единице [11], что не должно привести к существенному завышению атомной температуры, так как энергия, полученная в результате столкновений атомов и электронов, много больше, чем энергия, полученная в результате столкновения атомов и ионов.

В дальнейшем крышкой будем обозначать усреднение соответствующей величины по периоду $T = 2\pi/\omega = 1/f$, где $\omega = 2\pi f$ – круговая частота генератора. Например, для n_e при $t \in ((p-1)T, pT]$, $p = 1, 2, \dots$ (p – номер периода), полагаем

$$\hat{n}_e^p(x) = \int_{(p-1)T}^{pT} n_e(x, \xi) d\xi. \quad (18)$$

Аналогичным образом проводим усреднение и других параметров, входящих в уравнение теплопроводности атомно-ионного газа. С учетом вышесказанного это уравнение при $t \in ((p-1)T, pT]$, $p = 1, 2, \dots$, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\lambda_a \frac{\partial T_a}{\partial x} \right) = \hat{j}_i^p \hat{E}^p + \hat{Q}_{y\Pi}^p \hat{n}_e^p \hat{N}^p, \quad (19)$$

где $j_i = q_e (G_+ + G_{2+})$ – ионный ток, λ_a – коэффициент теплопроводности атомно-ионного газа, $Q_{y\Pi}$ – энергия, получаемая тяжелыми частицами при упругих столкновениях.

Будем считать, что электрод охлаждается водой. Тогда уравнение (19) дополняется граничными условиями

$$\begin{aligned} -\lambda_a \frac{\partial T_a(0)}{\partial x} &= -\chi (T_a(0) - T_B), \\ -\lambda_a \frac{\partial T_a(b)}{\partial x} &= \chi (T_a(b) - T_B), \end{aligned} \quad (20)$$

где χ – полный коэффициент теплоотдачи образца, T_B – температура охлаждающей электроды воды.

Табл. 1

№	Процесс/характеристика	Значение параметра	Источник
1	Прямая ионизация $\text{Ar} + e \rightarrow \text{Ar}^+ + 2e$	R_1 рассчитывается с помощью программы BOLSIG+, версия 1.2	[31]
2	Пеннинговая ионизация $\text{Ar}^* + \text{Ar}^* \rightarrow \text{Ar} + \text{Ar}^+ + e$	$R_2 = \text{const} = 6.2 \cdot 10^{-16}$ $R_2 = 7 \cdot 10^{-16} (T_a/300)^{0.5}$ $R_2 = 1.2 \cdot 10^{-15} (T_a/300)^{0.5}$ $R_2 = \text{const} = 5 \cdot 10^{-16}$	[32] [33] [34, 35] [36]
3	Ступенчатая ионизация $\text{Ar}^* + e \rightarrow \text{Ar}^+ + 2e$	$R_3 = 2 \cdot 10^{-11} \exp(-25524.4/T_e)$	[33]
4	Рекомбинация фото $\text{Ar}^+ + e \rightarrow \text{Ar} + h_\nu$	$R_4 = 2.7 \cdot 10^{-19} (T_e/11602)^{-3/4}$	[13]
5	Тройная рекомбинация $\text{Ar}^+ + 2e \rightarrow \text{Ar} + e$	$R_5 = 8.75 \cdot 10^{-39} (T_e/11602)^{-9/2}$	[13]
6	Возбуждение метастабильных атомов $\text{Ar} + e \rightarrow \text{Ar}^* + e$	R_6 рассчитывается с помощью программы BOLSIG+, версия 1.2 $R_6 = 10^{-9} (T_e/11602) \times \exp(-134583/T_e)$	[31] [13]
7	Излучение $\text{Ar}^* \rightarrow \text{Ar} + h_\nu$	$R_7 = \text{const} = 2.5 \cdot 10^{-11}$ $R_7 = \text{const} = 5 \cdot 10^{-11}$	[29] [34, 35]
8	$\text{Ar}^* + \text{Ar} \rightarrow 2\text{Ar}$	$R_8 = \text{const} = 3 \cdot 10^{-21}$	[32]
9	$\text{Ar}^* + e \rightarrow \text{Ar} + e$	$R_9 = \text{const} = 10^{-11}$	[32]
10	Хемоионизация $\text{Ar}^* + \text{Ar}^* \rightarrow \text{Ar}_2^+ + e$	$R_{10} = \text{const} = 1.2 \cdot 10^{-11}$	[29]
11	Конверсия ионов $2 \text{Ar} + \text{Ar}^+ \rightarrow \text{Ar}_2^+ + \text{Ar}$	$R_{11} = \text{const} = 2.5 \cdot 10^{-43}$ $R_{11} = 2.25 \cdot 10^{-43} (T_a/300)^{-0.4}$ $R_{11} = 2.5 \cdot 10^{-43} (T_a/300)^{3/2}$ $R_{11} = 2.5 \cdot 10^{-43}$	[29] [17] [34, 35] [36]
12	$\text{Ar}_2^+ + e \rightarrow \text{Ar} + \text{Ar}^+ + e$	$R_{12} = 1 \cdot 10^{-11} \exp(-23204/T_e)$	[33]
13	$\text{Ar}_2^+ + e \rightarrow \text{Ar} + \text{Ar}$	$R_{13} = 1 \cdot 10^{-13} T_e^{-0.6} (T_a/300)^{-0.6}$ $R_{13} = 1.1 \cdot 10^{-13} (T_e/11602)^{-0.5}$	[33] [37]
14	$\text{Ar}_2^* \rightarrow 2 \text{Ar} + h_\nu$	$R_{14} = \text{const} = 1 \cdot 10^{-11}$	[33]
15	$\text{Ar}^* + 2 \text{Ar} \rightarrow \text{Ar}_2^* + \text{Ar}$	$R_{15} = \text{const} = 1.1 \cdot 10^{-43}$	[32, 38]
16	$\text{Ar}_2^* + \text{Ar}_2^* \rightarrow e + 2\text{Ar} + \text{Ar}_2^+$	$R_{16} = 7 \cdot 10^{-16} (T_a/300)^{0.5}$	[33]
17	$\text{Ar}_2^* + \text{Ar}^* \rightarrow e + \text{Ar} + \text{Ar}_2^+$	$R_{17} = 7 \cdot 10^{-16} (T_a/300)^{0.5}$	[33]
18	$e + \text{Ar}_2^* \rightarrow 2 \text{Ar}^* + e$	$R_{18} = 1 \cdot 10^{-13} \exp(11602/T_e)$	[33]
19	Образование димеров $\text{Ar}^* + 2 \text{Ar} \rightarrow \text{Ar}_2^* + \text{Ar}$	$R_{19} = \text{const} = 1.5 \cdot 10^{-44}$	[29]
20	$\text{Ar}_2^* + \text{Ar} \rightarrow 3 \text{Ar} + \text{Ar}^* + e$	$R_{20} = \frac{5.22 \cdot 10^{-16} \exp(-15129.008/T_a)}{T_a/11602}$	[33]
21	Коэффициент диффузии ионов	$D_+ = 1 \cdot 10^{23} (T_a)^{1/2} / N$ $D_+ = 2.07 \cdot 10^{20} / N$ $D_+ = 0.11029 \cdot 10^{25} / N$	[17] [32] [39]
22	Подвижность молекулярных ионов	$\mu_{2+} = 1.79 \times (T_a/300)$	[40]
23	Теплопроводность атомно-ионного газа	$\lambda_a = 3.5 \cdot 10^{-4} (T_a^{0.68})$ $\lambda_a = 1.78 \cdot 10^{-2} (T_a/300)^{0.66}$	[33] [41, с. 61]
24	Подвижность атомарных ионов	$\mu_+ = 4.65 \cdot 10^{20} / N$ $\mu_+ = 0.044 / T_a$ $\mu_+ = \mu_{[43]}^1$	[32] [42] [43]
25	Коэффициент диффузии метастабильных атомов	$D_m = 0.18023 \cdot 10^{20} / N$ $D_m = 2.42 \cdot 10^{20} / N$	[39] [32]
26	Коэффициент диффузии электронов	D_e рассчитывается с помощью программы BOLSIG+, версия 1.2	[31]

27	Подвижность электронов	μ_e рассчитывается с помощью программы BOLSIG+, версия 1.2	[31]
28	Энергия, получаемая тяжёлыми частицами при упругих столкновениях	$Q_{уп}$ рассчитывается с помощью программы BOLSIG+, версия 1.2	[31]
29	Коэффициент диффузии молекулярного иона	$D_{2+} = 0.13181 \cdot 10^{25}/N$	[44, 45]
30	$Ar_2^* + e \rightarrow Ar^* + Ar$	$7 \cdot 10^{-13} (T_e/300N)^{-0.5}$	[34, 35]

¹⁾ Подвижность атомарных ионов $\mu_{[43]}$ вычисляется из соотношения

$$\left(\frac{P}{133}\right) \mu_{[43]} = \begin{cases} 10^{-1} \left(1 - 2.22 \cdot 10^{-5} \frac{E}{P/133}\right), & E/P \leq 45; \\ \frac{8.25 \cdot 10^3 \left(\frac{E/100}{P/133}\right)^{3/2} - 86.52}{\left(\frac{E/100}{P/133}\right)^{1/2} \left(\frac{E/100}{P/133}\right)^{3/2}}, & E/P > 45. \end{cases}$$

1.9. Характеристики процессов. При проведении расчетов в качестве системы единиц измерения выбрана система СИ. Данные для аппроксимации коэффициента диффузии D_e , подвижности электронов μ_e , коэффициентов скоростей процессов прямой ионизации R_1 и возбуждения метастабилей R_6 , вклада, вносимого упругими соударениями в нагрев газа $Q_{уп}$, средней энергии $\bar{\varepsilon} = 3kT_e/2$ выбираются с учетом их зависимости от приведенной напряженности электрического поля и наличия электрон-электронных соударений с помощью пакета BOLSIG+, версия 1.2 [31]. Для удобства указанные, а также и остальные зависимости сведены в табл. 1.

2. Разностные схемы для краевых и начально-краевых задач и задач Коши, входящих в систему

Численный алгоритм решения задачи моделирования ВЧЕ-разряда при повышенных давлениях вполне аналогичен алгоритму решения этой задачи при пониженных давлениях, изложенному в работе [18] и основанному на сносе нелинейности по входящим коэффициентам на нижний слой. Нелинейные квадратичные слагаемые в правой части линеаризовались с помощью схемы Ньютона [46]. Решение уравнения для газовой температуры проводилось один раз за период T с помощью итерационного процесса типа Якоби.

Введем на отрезке $[0, b]$ пространственные равномерные сетки $\omega_h = \{x_l = lh, l = 1, 2, \dots, M-1\}$, $\bar{\omega}_h = \{x_l = lh, l = 0, 1, \dots, M\}$, $h = b/M$, а также временную сетку $\omega_\tau = \{t_s = s\tau, s = 0, 1, \dots\}$, $\tau = T/L_T$ – шаг по времени, L_T – количество временных шагов на периоде. На сетках $\omega_h \times \omega_\tau$, $\bar{\omega}_h$ определим сеточные функции (для которых сохраним те же обозначения, что и для дифференциальных функций). Значения сеточных функций φ в точке $x_l^s = (x_l, t_s) \in \bar{\omega}_h \times \omega_\tau$ будем обозначать через φ_l^s .

2.1. Разностная схема для задачи баланса атомарных ионов. При $s > 0$, $2 \leq l \leq M-2$ разностная схема для задачи (1)–(3) имеет вид

$$h \frac{n_{+,l}^s - n_{+,l}^{s-1}}{\tau} - \left(D_{+,l+1/2}^{s-1} \frac{n_{+,l+1}^s - n_{+,l}^s}{h} - D_{+,l-1/2}^{s-1} \frac{n_{+,l}^s - n_{+,l-1}^s}{h} \right) - \\ - E_{l-1/2}^{+,s-1} \mu_{+,l-1}^{s-1} n_{+,l-1}^s + E_{l+1/2}^{-,s-1} \mu_{+,l+1}^{s-1} n_{+,l+1}^s + E_{l+1/2}^{+,s-1} \mu_{+,l}^{s-1} n_{+,l}^s -$$

$$\begin{aligned}
 -E_{l-1/2}^{-,s-1} \mu_{+,l}^{s-1} n_{+,l}^s &= h \left(R_{1,l}^{s-1} n_{e,l}^{s-1} N_l^{s-1} + R_{2,l}^{s-1} \left(n_{m,l}^{s-1} \right)^2 + R_{3,l}^{s-1} n_{m,l}^{s-1} n_{e,l}^{s-1} - \right. \\
 &\quad \left. - R_{4,l}^{s-1} n_{e,l}^{s-1} n_{+,l}^s - R_{5,l}^{s-1} \left(n_{e,l}^{s-1} \right)^2 n_{+,l}^s + R_{12,l}^{s-1} n_{e,l}^{s-1} n_{2+,l}^{s-1} - \right. \\
 &\quad \left. - R_{11,l}^{s-1} n_{+,l}^{s-1} \left(N_{2+l}^{s-1} \right)^2 + R_{20,l}^{s-1} n_{2+,l}^{s-1} N_l^{s-1} \right).
 \end{aligned}$$

Здесь и далее $E^\pm = (E \pm |E|)/2$ – положительная и отрицательная составляющие поля E .

Граничные условия (2), (3) аппроксимируются следующим образом. При $s > 0$, $l = 1$

$$\begin{aligned}
 h \frac{n_{+,1}^s - n_{+,1}^{s-1}}{\tau} - D_{+,3/2}^{s-1} \frac{n_{+,2}^s - n_{+,1}^s}{h} + \left(E_{1/2} + E_{3/2} \right)^{+,s-1} \mu_{+,1}^{s-1} n_{+,1}^s / 2 + \\
 + \left(E_{5/2} + E_{3/2} \right)^{-,s-1} \mu_{+,2}^{s-1} n_{+,2}^s / 2 - \left[-\frac{1}{4} n_{+,1}^s \sqrt{8kT_{a,1}/\pi m_+} + \right. \\
 + \left. \left(E_{1/2} + E_{3/2} \right)^{-,s-1} \mu_{+,1}^{s-1} n_{+,1}^s / 2 \right] = h \left(R_{1,1}^{s-1} n_{e,1}^{s-1} N_1^{s-1} + R_{2,1}^{s-1} \left(n_{m,1}^{s-1} \right)^2 + \right. \\
 + R_{3,1}^{s-1} n_{m,1}^{s-1} n_{e,1}^{s-1} - R_{4,1}^{s-1} n_{e,1}^{s-1} n_{+,1}^s - R_{5,1}^{s-1} \left(n_{e,1}^{s-1} \right)^2 n_{+,1}^s + R_{12,1}^{s-1} n_{e,1}^{s-1} n_{2+,1}^{s-1} - \\
 \left. - R_{11,1}^{s-1} n_{+,1}^{s-1} \left(N_1^{s-1} \right)^2 + R_{20,1}^{s-1} n_{2+,1}^{s-1} N_1^{s-1} \right).
 \end{aligned}$$

При $s > 0$, $l = M - 1$

$$\begin{aligned}
 h \frac{n_{+,M-1}^s - n_{+,M-1}^{s-1}}{\tau} - \left[-D_{+,M-3/2}^{s-1} \frac{n_{+,M-1}^s - n_{+,M-2}^s}{h} + \right. \\
 + \left. \left(E_{M-1/2} + E_{M-3/2} \right)^{-,s-1} \mu_{+,M-1}^{s-1} n_{+,M-1}^s / 2 + \left(E_{5/2} + E_{3/2} \right)^{-,s-1} \mu_{+,M-2}^{s-1} n_{+,M-2}^s / 2 \right] + \\
 + \frac{1}{4} n_{+,M-1}^s \sqrt{8kT_{a,M-1}/\pi m_+} + \left(E_{M-1/2} + E_{M-3/2} \right)^{+,s-1} \mu_{+,M-1}^{s-1} n_{+,M-1}^s / 2 = \\
 = h \left(R_{1,M-1}^{s-1} n_{e,M-1}^{s-1} N_{M-1}^{s-1} + R_{2,M-1}^{s-1} \left(n_{m,M-1}^{s-1} \right)^2 + R_{3,M-1}^{s-1} n_{m,M-1}^{s-1} n_{e,M-1}^{s-1} - \right. \\
 - R_{4,M-1}^{s-1} n_{e,M-1}^{s-1} n_{+,M-1}^s - R_{5,M-1}^{s-1} \left(n_{e,M-1}^{s-1} \right)^2 n_{+,M-1}^s + R_{12,M-1}^{s-1} n_{e,M-1}^{s-1} n_{2+,M-1}^{s-1} - \\
 \left. - R_{11,M-1}^{s-1} n_{+,M-1}^{s-1} \left(N_{M-1}^{s-1} \right)^2 + R_{20,M-1}^{s-1} n_{2+,M-1}^{s-1} N_{M-1}^{s-1} \right).
 \end{aligned}$$

2.2. Разностная схема для задачи баланса молекулярных ионов. При $s > 0$, $2 \leq l \leq M - 2$ разностная схема для задачи (4)–(6) имеет вид

$$\begin{aligned}
 h \frac{n_{2+,l}^s - n_{2+,l}^{s-1}}{\tau} - \left(D_{2+,l+1/2}^{s-1} \frac{n_{2+,l+1}^s - n_{2+,l}^s}{h} - D_{2+,l-1/2}^{s-1} \frac{n_{2+,l}^s - n_{2+,l-1}^s}{h} \right) - \\
 - E_{l-1/2}^{+,s-1} \mu_{2+,l-1}^{s-1} n_{2+,l-1}^s + E_{l+1/2}^{-,s-1} \mu_{2+,l+1}^{s-1} n_{2+,l+1}^s + E_{l+1/2}^{+,s-1} \mu_{2+,l}^{s-1} n_{2+,l}^s - \\
 - E_{l-1/2}^{-,s-1} \mu_{2+,l}^{s-1} n_{2+,l}^s = h \left(R_{10,l}^{s-1} \left(n_{m,l}^{s-1} \right)^2 + R_{11,l}^{s-1} \left(N_l^{s-1} \right)^2 n_{+,l}^{s-1} - R_{12,l}^{s-1} n_{2+,l}^s n_{e,l}^{s-1} - \right. \\
 \left. - R_{13,l}^{s-1} n_{e,l}^{s-1} n_{2+,l}^s + R_{16,l}^{s-1} \left(n_{2^*,l}^{s-1} \right)^2 + R_{17,l}^{s-1} n_{m,l}^{s-1} n_{2^*,l}^{s-1} - R_{20,l}^{s-1} n_{2+,l}^s N_l^{s-1} \right).
 \end{aligned}$$

Граничные условия (5), (6) аппроксимируются следующим образом. При $s > 0$, $l = 1$

$$\begin{aligned}
& h \frac{n_{2+,1}^s - n_{2+,1}^{s-1}}{\tau} - D_{2+,3/2}^{s-1} \frac{n_{2+,2}^s - n_{2+,1}^s}{h} + \left(E_{1/2} + E_{3/2}\right)^{+,s-1} \mu_{2+,1}^{s-1} n_{2+,1}^s / 2 + \\
& \quad + \left(E_{5/2} + E_{3/2}\right)^{-,s-1} \mu_{2+,2}^{s-1} n_{2+,2}^s / 2 + \frac{1}{4} n_{2+,1}^s \sqrt{8kT_{a,1} / \pi m_{2+}} - \\
& \quad - \left(E_{1/2} + E_{3/2}\right)^{-,s-1} \mu_{2+,1}^{s-1} n_{2+,1}^s / 2 = h \left(R_{10,1}^{s-1} \left(n_{m,1}^{s-1} \right)^2 + R_{11,1}^{s-1} \left(N_1^{s-1} \right)^2 n_{+,1}^s - \right. \\
& \quad - R_{12,1}^{s-1} n_{2+,1}^s n_{e,1}^{s-1} - R_{13,1}^{s-1} n_{e,1}^{s-1} n_{2+,1}^s + R_{16,1}^{s-1} \left(n_{2^*,1}^{s-1} \right)^2 + \\
& \quad \left. + R_{17,1}^{s-1} n_{m,1}^{s-1} n_{2^*,1}^{s-1} - R_{20,1}^{s-1} n_{2+,1}^s N_1^{s-1} \right).
\end{aligned}$$

При $s > 0$, $l = M - 1$

$$\begin{aligned}
& h \frac{n_{2+,M-1}^s - n_{2+,M-1}^{s-1}}{\tau} + D_{2+,M-3/2}^{s-1} \frac{n_{2+,M-1}^s - n_{2+,M-2}^s}{h} - \\
& \quad - \left(E_{M-1/2} + E_{M-3/2}\right)^{-,s-1} \mu_{2+,M-1}^{s-1} n_{2+,M-1}^s / 2 - \\
& \quad - \left(E_{5/2} + E_{3/2}\right)^{+,s-1} \mu_{2+,M-2}^{s-1} n_{2+,M-2}^s / 2 + \\
& \quad + \frac{1}{4} n_{2+,M-1}^s \sqrt{8kT_{a,M-1} / \pi m_{2+}} + \left(E_{M-1/2} + E_{M-3/2}\right)^{+,s-1} \mu_{2+,M-1}^{s-1} n_{2+,M-1}^s / 2 = \\
& = h \left(R_{10,M-1}^{s-1} \left(n_{m,M-1}^{s-1} \right)^2 + R_{11,M-1}^{s-1} \left(N_{M-1}^{s-1} \right)^2 n_{+,M-1}^s - R_{12,M-1}^{s-1} n_{2+,M-1}^s n_{e,M-1}^{s-1} - \right. \\
& \quad - R_{13,M-1}^{s-1} n_{e,M-1}^{s-1} n_{2+,M-1}^s - R_{20,M-1}^{s-1} n_{2+,M-1}^s N_{M-1}^{s-1} + R_{16,M-1}^{s-1} \left(n_{2^*,M-1}^{s-1} \right)^2 + \\
& \quad \left. + R_{17,M-1}^{s-1} n_{m,M-1}^{s-1} n_{2^*,M-1}^{s-1} \right).
\end{aligned}$$

2.3. Разностная схема для задачи баланса электронного газа. При $s > 0$, $2 \leq l \leq M - 2$ разностная схема для задачи (7)–(9) имеет вид

$$\begin{aligned}
& h \frac{n_{e,l}^s - n_{e,l}^{s-1}}{\tau} - \left(D_{e,l+1/2}^{s-1} \frac{n_{e,l+1}^s - n_{e,l}^s}{h} - D_{e,l-1/2}^{s-1} \frac{n_{e,l}^s - n_{e,l-1}^s}{h} \right) - \\
& \quad - (-E)_{l-1/2}^{+,s-1} \mu_{e,l-1}^{s-1} n_{2+,l-1}^s + (-E)_{l+1/2}^{-,s-1} \mu_{e,l+1}^{s-1} n_{e,l+1}^s + (-E)_{l+1/2}^{+,s-1} \mu_{e,l}^{s-1} n_{e,l}^s - \\
& \quad - (-E)_{l-1/2}^{-,s-1} \mu_{e,l}^{s-1} n_{e,l}^s = h \left(R_{1,l}^{s-1} n_{e,l}^{s-1} N_l^{s-1} + R_{3,l}^{s-1} n_{m,l}^{s-1} n_{e,l}^s - R_{4,l}^{s-1} n_{+,l}^s n_{e,l}^s - \right. \\
& \quad - R_{5,l}^{s-1} \left(\left(n_{e,l}^{s-1} \right)^2 n_{+,l}^s + 2 n_{e,l}^{s-1} \left(n_{e,l}^s - n_{e,l}^{s-1} \right) \right) - R_{13,l}^{s-1} n_{e,l}^s n_{2+,l}^s + R_{16,l}^{s-1} \left(n_{2^*,l}^{s-1} \right)^2 + \\
& \quad \left. + R_{10,l}^{s-1} \left(n_{m,l}^{s-1} \right)^2 + R_{17,l}^{s-1} n_{m,l}^{s-1} n_{2^*,l}^{s-1} + R_{2,l}^{s-1} \left(n_{m,l}^{s-1} \right)^2 \right).
\end{aligned}$$

Граничные условия (8), (9) аппроксимируются следующим образом. При $s > 0$, $l = 1$

$$\begin{aligned}
& h \frac{n_{e,1}^s - n_{e,1}^{s-1}}{\tau} - D_{e,3/2}^{s-1} \frac{n_{e,2}^s - n_{e,1}^s}{h} + \left(-E_{1/2} - E_{3/2}\right)^{+,s-1} \mu_{e,1}^{s-1} n_{e,1}^s / 2 + \\
& \quad + \left(-E_{5/2} - E_{3/2}\right)^{-,s-1} \mu_{e,2}^{s-1} n_{e,2}^s / 2 + \frac{1}{4} n_{e,1}^s \sqrt{8kT_{e,1} / \pi m_e} - \\
& \quad - \left(-E_{1/2} - E_{3/2}\right)^{-,s-1} \mu_{e,2}^{s-1} n_{e,2}^s / 2 = h \left(R_{1,1}^{s-1} n_{e,1}^s N_1^{s-1} + R_{2,1}^{s-1} \left(n_{m,1}^{s-1} \right)^2 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + R_{10,1}^{s-1} \left(n_{m,1}^{s-1} \right)^2 + R_{3,1}^{s-1} n_{m,1}^{s-1} n_{e,1}^s - R_{4,1}^{s-1} n_{e,1}^s n_{+,1}^s - R_{5,1}^{s-1} \left(\left(n_{e,1}^{s-1} \right)^2 + \right. \\
 & \left. + 2n_{e,1}^{s-1} \left(n_{e,1}^s - n_{e,1}^{s-1} \right) \right) + R_{17,1}^{s-1} n_{m,1}^{s-1} n_{2^*,1}^{s-1} - R_{13,1}^{s-1} n_{e,1}^s n_{2^*,1}^s + R_{16,1}^{s-1} \left(n_{2^*,1}^{s-1} \right)^2 - \\
 & - \gamma \left(E_{1/2} + E_{3/2} \right)^{-,s-1} \mu_{+,1}^{s-1} n_{+,1}^s / 2 - \gamma \left(E_{1/2} + E_{3/2} \right)^{-,s-1} \mu_{2^*,1}^{s-1} n_{2^*,1}^s / 2.
 \end{aligned}$$

При $s > 0$, $l = M - 1$

$$\begin{aligned}
 & h \frac{n_{e,M-1}^s - n_{e,M-1}^{s-1}}{\tau} + D_{e,M-3/2}^{s-1} \frac{n_{e,M-1}^s - n_{e,M-2}^s}{h} - \\
 & - \left(-E_{M-1/2} - E_{M-3/2} \right)^{-,s-1} \mu_{e,M-1}^{s-1} n_{e,M-1}^s / 2 - \\
 & - \left(-E_{5/2} - E_{3/2} \right)^{+,s-1} \mu_{e,M-2}^{s-1} n_{e,M-2}^s / 2 + \frac{1}{4} n_{e,M-1}^s \sqrt{8kT_{e,M-1} / \pi m_e} - \\
 & - \left(-E_{M-1/2} - E_{M-3/2} \right)^{+,s-1} \mu_{e,M-1}^{s-1} n_{e,M-1}^s / 2 = \\
 & = h \left(R_{1,M-1}^{s-1} n_{e,M-1}^s N_{M-1}^{s-1} + R_{2,M-1}^{s-1} \left(n_{m,M-1}^{s-1} \right)^2 + R_{3,M-1}^{s-1} n_{m,M-1}^{s-1} n_{e,M-1}^s - \right. \\
 & - R_{4,M-1}^{s-1} n_{e,M-1}^{s-1} n_{+,M-1}^s - R_{5,M-1}^{s-1} n_{+,M-1}^s \left(n_{e,M-1}^{s-1} \right)^2 + R_{10,M-1}^{s-1} \left(n_{m,M-1}^{s-1} \right)^2 + \\
 & + 2n_{e,M-1}^{s-1} \left(n_{e,M-1}^s - n_{e,M-1}^{s-1} \right) - R_{13,M-1}^{s-1} n_{e,M-1}^s n_{2^*,M-1}^{s-1} + \\
 & + R_{16,M-1}^{s-1} \left(n_{2^*,M-1}^{s-1} \right)^2 + R_{17,M-1}^{s-1} n_{m,M-1}^{s-1} n_{2^*,M-1}^{s-1} \left. \right) + \\
 & + \gamma \left(E_{M-1/2} + E_{M-3/2} \right)^{+,s-1} \mu_{+,M-1}^{s-1} n_{+,M-1}^s / 2 + \\
 & + \gamma \left(E_{M-1/2} + E_{M-3/2} \right)^{-,s-1} \mu_{2^*,M-1}^{s-1} n_{2^*,M-1}^s / 2.
 \end{aligned}$$

2.4. Разностная схема для уравнения Пуассона для потенциала электрического поля. Разностная схема для задачи (12), (11) запишется в виде

$$- \frac{\varphi_{l-1}^s - 2\varphi_l^s + \varphi_{l+1}^s}{h^2} = \frac{q_e}{\varepsilon_0} \left(n_{+,l}^s + n_{2^+,l}^s - n_{e,l}^s \right), \quad s > 0, \quad 1 \leq l \leq M - 1,$$

$$\varphi_0^s = 0, \quad \varphi_M^s = V_a \sin(\omega s \tau), \quad s > 0.$$

2.5. Разностная схема для задачи баланса концентрации метастабильных атомов. При $s > 0$, $2 \leq l \leq M - 2$ разностная схема для задачи (13)–(15) запишется в виде

$$\begin{aligned}
 & h \frac{n_{m,l}^s - n_{m,l}^{s-1}}{\tau} - \left(D_{m,l+1/2}^{s-1} \frac{n_{m,l+1}^s - n_{m,l}^s}{h} - D_{m,l-1/2}^{s-1} \frac{n_{m,l}^s - n_{m,l-1}^s}{h} \right) = \\
 & = h \left(R_{6,l}^{s-1} n_{e,l}^s N_l^{s-1} + R_{18,l}^{s-1} n_{e,l}^s n_{2^*,l}^{s-1} - R_{3,l}^{s-1} n_{m,l}^s n_{e,l}^s - R_{7,l}^{s-1} n_{m,l}^s - R_{8,l}^{s-1} N_l^{s-1} n_{m,l}^s - \right. \\
 & - R_{9,l}^{s-1} n_{m,l}^s n_{e,l}^s - R_{10,l}^{s-1} \left(n_{m,l}^s \right)^2 - R_{15,l}^{s-1} \left(N_l^{s-1} \right)^2 n_{m,l}^s - R_{18,l}^{s-1} n_{e,l}^s n_{2^*,l}^{s-1} - R_{17,l}^{s-1} n_{m,l}^s n_{2^*,l}^{s-1} - \\
 & \left. - R_{19,l}^{s-1} n_{m,l}^s \left(N_l^{s-1} \right)^2 - \left(R_{2,l}^{s-1} + R_{10,l}^{s-1} \right) \left(\left(n_{m,l}^{s-1} \right)^2 + 2n_{m,l}^{s-1} \left(n_{m,l}^s - n_{m,l}^{s-1} \right) \right) \right).
 \end{aligned}$$

Граничные условия (14), (15) аппроксимируются следующим образом. При $s > 0$, $l = 1$

$$\begin{aligned} & h \frac{n_{m,1}^s - n_{m,1}^{s-1}}{\tau} - D_{m,3/2}^{s-1} \frac{n_{m,2}^s - n_{m,1}^s}{h} - \frac{1}{4} n_{m,1}^s \sqrt{8kT_{a,1}/\pi m_a} = \\ & = h \left(R_{6,1}^{s-1} N_1^{s-1} n_{e,1}^s - R_{7,1}^{s-1} n_{m,1}^s + R_{18,1}^{s-1} n_{e,1}^s n_{2^*,1}^s - R_{3,1}^{s-1} n_{m,1}^s n_{e,1}^s - R_{8,1}^{s-1} n_{m,1}^s N_1^{s-1} - \right. \\ & \quad - R_{9,1}^{s-1} n_{m,1}^s n_{e,1}^{s-1} - \left. \left(R_{2,1}^{s-1} + R_{10,1}^{s-1} \right) \left(\left(n_{m,1}^{s-1} \right)^2 + 2n_{m,1}^{s-1} \left(n_{m,1}^s - n_{m,1}^{s-1} \right) \right) - \right. \\ & \quad \left. - R_{15,1}^{s-1} \left(N_1^{s-1} \right)^2 n_{m,1}^s - R_{17,1}^{s-1} n_{m,1}^s n_{2^*,1}^{s-1} - R_{19,1}^{s-1} n_{m,1}^s \left(N_1^{s-1} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

При $s > 0$, $l = M - 1$

$$\begin{aligned} & h \frac{n_{m,M-1}^s - n_{m,M-1}^{s-1}}{\tau} + D_{m,M-3/2}^{s-1} \frac{n_{m,M-1}^s - n_{m,M-2}^s}{h} - \frac{1}{4} n_{m,M-1}^s \sqrt{8kT_{a,M-1}/\pi m_a} = \\ & = h \left(R_{6,M-1}^{s-1} N_{M-1}^{s-1} n_{e,M-1}^s - R_{7,M-1}^{s-1} n_{m,M-1}^s + R_{18,M-1}^{s-1} n_{e,M-1}^s n_{2^*,M-1}^s - \right. \\ & \quad - R_{3,M-1}^{s-1} n_{m,M-1}^s n_{e,M-1}^s - R_{8,M-1}^{s-1} n_{m,M-1}^s N_{M-1}^{s-1} - R_{9,M-1}^{s-1} n_{m,M-1}^s n_{e,M-1}^{s-1} - \\ & \quad - \left. \left(R_{2,M-1}^{s-1} + R_{10,M-1}^{s-1} \right) \left(\left(n_{m,M-1}^{s-1} \right)^2 + 2n_{m,M-1}^{s-1} \left(n_{m,M-1}^s - n_{m,M-1}^{s-1} \right) \right) - \right. \\ & \quad \left. - R_{15,M-1}^{s-1} \left(N_{M-1}^{s-1} \right)^2 n_{m,M-1}^s - R_{17,M-1}^{s-1} n_{m,M-1}^s n_{2^*,M-1}^{s-1} - R_{19,M-1}^{s-1} n_{m,M-1}^s \left(N_{M-1}^{s-1} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

2.6. Разностная схема для кинетического уравнения для димеров аргона Ar_2^* . При $s > 0$, $2 \leq l \leq M - 2$ разностная схема для уравнения (16) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{n_{2^*,l}^s - n_{2^*,l}^{s-1}}{\tau} & = R_{19,l}^{s-1} n_{m,l}^s \left(N_l^{s-1} \right)^2 + R_{15,l}^{s-1} n_{m,l}^s \left(N_l^{s-1} \right)^2 - R_{14,l}^{s-1} n_{2^*,l}^s - \\ & \quad - R_{16,l}^{s-1} \left(\left(n_{2^*,l}^{s-1} \right)^2 + 2n_{2^*,l}^{s-1} \left(n_{2^*,l}^s - n_{2^*,l}^{s-1} \right) \right) - R_{17,l}^{s-1} n_{m,l}^s n_{2^*,l}^s - R_{18,l}^{s-1} n_{e,l}^s n_{2^*,l}^s. \end{aligned}$$

2.7. Разностная схема для кинетического уравнения нейтральных атомов. При $s > 0$, $1 \leq l \leq M - 1$ разностная схема для уравнения (17) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{N_l^s - N_l^{s-1}}{\tau} & = -R_{1,l}^{s-1} n_{e,l}^s N_l^s + R_{2,l}^{s-1} \left(n_{m,l}^s \right)^2 + R_{4,l}^{s-1} n_{+,l}^s n_{e,l}^s + R_{7,l}^{s-1} n_{m,l}^s - \\ & \quad - R_{5,l}^{s-1} \left(n_{e,l}^s \right)^2 n_{+,l}^s - R_{6,l}^{s-1} N_l^s n_{e,l}^s + R_{13,l}^{s-1} n_{e,l}^s n_{2^+,l}^s + \left(R_{19,l}^{s-1} - R_{15,l}^{s-1} \right) n_{m,l}^s + \\ & \quad + R_{13,l}^{s-1} n_{e,l}^s n_{2^+,l}^s + 2N_l^{s-1} \left(N_l^s - N_l^{s-1} \right) + R_{12,l}^{s-1} n_{e,l}^s n_{2^+,l}^s + R_{14,l}^{s-1} n_{2^*,l}^s + \\ & \quad + \left(R_{19,l}^{s-1} - R_{15,l}^{s-1} \right) n_{m,l}^s \left(\left(N_l^{s-1} \right)^2 + 2N_l^{s-1} \left(N_l^s - N_l^{s-1} \right) \right) + \\ & \quad + R_{16,l}^{s-1} n_{2^*,l}^s + R_{17,l}^{s-1} n_{2^*,l}^s n_{m,l}^s. \end{aligned}$$

2.8. Разностная схема для уравнения теплопроводности атомно-ионной температуры. Усредненные параметры, входящие в уравнение (19), рассчитываем, применяя для приближенного вычисления интегралов, входящих в выражения вида (18), квадратурные формулы левых прямоугольников:

$$\hat{n}_{e,l}^p = \frac{1}{L_t} \sum_{s=(p-1)L_T+1}^{pL_T} n_{e,l}^s.$$

Аналогичным образом аппроксимируются \hat{j}_i^p , \hat{E}^p , $\hat{Q}_{\text{уП}}^p$, \hat{N}^p . Тогда при $1 \leq l \leq M-1$ разностная схема для задачи (19) запишется в виде

$$-\left(\lambda_{a,l+1/2} \frac{T_{a,l+1} - T_{a,l}}{h} - \lambda_{a,l-1/2} \frac{T_{a,l} - T_{a,l-1}}{h}\right) = h\left(\hat{Q}_{\text{уП},l}^p \hat{n}_{e,l}^p N_l^p + \hat{j}_{i,l}^p \hat{E}_l^p\right).$$

Граничные условия (20) аппроксимируются следующим образом. При $l = 0$

$$-\left(\lambda_{a,3/2} \frac{T_{a,2} - T_{a,1}}{h} - \chi(T_{a,0} - T_{\text{В}})\right) = h\left(\hat{Q}_{\text{уП},1}^p \hat{n}_{e,1}^p N_1^p + \hat{j}_{i,1}^p \hat{E}_1^p\right).$$

При $l = M$

$$\begin{aligned} -\left(-\chi(T_{a,M} - T_{\text{В}}) - \lambda_{a,M-3/2} \frac{T_{a,M-1} - T_{a,M-2}}{h}\right) = \\ = h\left(\hat{Q}_{\text{уП},M-1}^p \hat{n}_{e,M-1}^p N_{M-1}^p + \hat{j}_{i,M-1}^p \hat{E}_1^{M-1}\right). \end{aligned}$$

3. Вычисление плотности потоков заряженных частиц

Одной из основных характеристик каждого конкретного плазмотрона является вольтамперная характеристика – это зависимость между полным током через газоразрядный промежуток и напряжением на нем, построенная с помощью либо натуральных экспериментов, либо численных расчетов. Полный ток $j(t) = q_e(G_+ + G_{2+} - G_e) + \varepsilon_0 \partial E / \partial t$, проходящий через газоразрядный промежуток, состоит из тока проводимости $q_e(G_+ + G_{2+} - G_e)$ и тока смещения $\varepsilon_0 \partial E / \partial t$. При расчете тока проводимости возникает необходимость вычисления плотности потока заряженных частиц, усредненная за период плотность ионного потока входит также в правую часть уравнения атомно-ионной температуры. Так как при сильных градиентах решения и коэффициентов уравнений баланса заряженных частиц простое численное дифференцирование дает сильную погрешность в вычислении плотности потока заряженных частиц, а метод потоковой прогонки не применим при использовании направленных разностей, то для вычисления потока мы проводим модификацию метода Гуммеля [32]. Согласно предложенной нами модификации сначала вычисляются значения концентраций заряженных частиц путем реализации неявной разностной схемы, построенной в п. 2.1–2.3 настоящей работы, а затем проводится нахождение плотности потока заряженных частиц по уже известной концентрации частиц с учетом зависимости коэффициентов подвижности от приведенного локального поля. Такая последовательность вычислений позволяет отказаться от ограничения на шаг по временной оси, связанного с условием Куранта.

4. Результаты численного решения модельных задач и их анализ

ВЧЕ-разряд при повышенных давлениях изучен сравнительно мало. При атмосферном давлении и межэлектродном расстоянии в 0.2 см в работе [34] получена максимальная экспериментальная плотность электронов в центре разряда, равная $5 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$, по результатам расчетов в этой же работе плотность электронов и ионов в амбиполярной области составила $\approx 7 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$. Расчеты по нашей модели в аналогичных условиях показали максимум концентрации $\approx 3.9 \cdot 10^{11}$ (рис. 1). Профиль пространственного распределения заряженных частиц между электродами качественно совпадает с приведенным в расчетной работе [35], количественное отличие от полученных нами результатов с результатами работы [35] объясняется более высоким напряжением в [35].

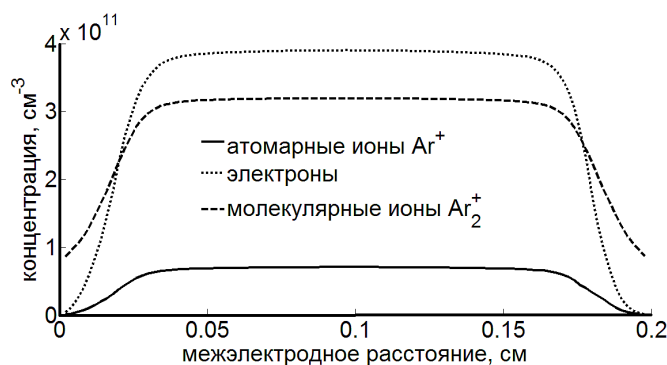


Рис. 1. Распределение усредненной за период концентрации заряженных частиц при межэлектродном расстоянии, равном 0.2 см

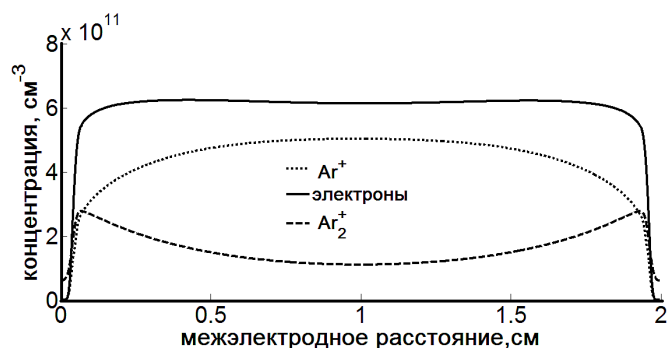


Рис. 2. Распределение усредненной за период концентрации заряженных частиц при межэлектродном расстоянии, равном 2 см

Были проведены также расчеты для модельной задачи при атмосферном давлении, межэлектродном расстоянии в 0.2 см и амплитуде приложенного напряжения в 100 В. Усредненные за период плотности заряженных частиц показаны на рис. 2. Расчеты показали, что плотности молекулярных ионов аргона повышаются вблизи приэлектродных областей с сохранением квазинейтральности. Данный эффект обусловлен большей газовой температурой в центре разряда по сравнению с приэлектродной областью, а также зависимостью коэффициентов плазмохимических процессов с участием тяжелых частиц от газовой температуры (см. табл. 1). Плотность атомарных ионов согласно проведенным расчетам выше плотности димеров приблизительно в 2.5 раза, при этом минимум концентрации димеров наблюдается в центре разряда, в приэлектродных областях наблюдается рост концентрации. Профиль же атомарных ионов имеет два симметричных локальных максимума около приэлектродных областей.

Заключение

В работе предложена математическая модель ВЧЕ-разряда между симметричными электродами в локальном приближении при атмосферном давлении. В модели учитывается наличие электронов, атомарных и молекулярных ионов, метастабильных атомов, атомов в основном состоянии и димеров аргона, всего в работе учтено двадцать плазмохимических реакций. Использована упрощенная схема ато-

ма аргона, в которой 4 низших близкорасположенных электронно-возбужденных состояния (два метастабильных и два резонансных) заменены единым уровнем. Математическая модель включает в себя уравнение конвекции-диффузии для электронного газа, уравнения конвекции-диффузии для атомарных и молекулярных ионов, уравнение Пуассона для потенциала электрического поля, уравнение баланса концентрации метастабильных атомов, кинетическое уравнение для димеров аргона, уравнение теплопроводности атомно-ионного газа.

Построены разностные схемы для начальных, краевых и начально-краевых задач, входящих в нелинейную систему, описывающую рассматриваемый процесс ВЧЕ-разряда.

Результаты численных расчетов при атмосферном давлении и межэлектродном расстоянии в 0.2 см сравнивались с имеющимися известными экспериментальными данными и данными моделирования из других литературных источников. Кроме того, приведены результаты расчетов при межэлектродном расстоянии 2 см и проанализированы полученные результаты.

Результаты численного моделирования показали, что в случае существенного нагрева газа (при повышенных давлениях, а также в случае больших межэлектродных расстояний при пониженных давлениях) изменение газовой температуры в межэлектродном пространстве начинает существенно влиять на соотношение вкладов в образование и гибель частиц различных плазмохимических процессов, а следовательно, влияет на распределение и долю заряженных (электронов, атомарных и молекулярных ионов) и возбужденных частиц в разрядном промежутке, что определяет развитие разряда.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 16-11-10299).

Литература

1. Очерки физики и химии плазмы / Под ред. Л.С. Полака. – М.: Наука, 1971. – 433 с.
2. Низкотемпературная плазма. Т. 3: Химия плазмы / Под ред. Л.С. Полака, Ю.А. Лебедева. – Новосибирск: Наука, 1991. – 328 с.
3. *Fridman A.* Plasma chemistry. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008. – 978 p.
4. *Оулет Р., Барбье М., Черемисинов П. и др.* Технологическое применение низкотемпературной плазмы. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 144 с.
5. *Моссе А.Л., Буров И.О.* Обработка дисперсионных материалов в плазменных реакторах. – Минск: Наука и техника, 1980. – 205 с.
6. *Тихонова Н.В., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю., Бородаев И.А.* Математическая модель высокочастотной плазменной обработки многослойных материалов заготовки верха обуви // Вестн. Казан. технол. ун-та. – 2012. – Т. 15, № 17. – С. 36–39.
7. *Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Кашанов Н.Ф.* Высокочастотная плазменно-струйная обработка материалов при пониженных давлениях. Теория и практика применения. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2000. – 348 с.
8. *Желтухин В.С., Чебакова В.Ю., Шнейдер М.Н.* Моделирование ВЧЕ-разряда при больших межэлектродных расстояниях // Сеточные методы для краевых задач и приложения: Материалы Девятой Всерос. конф. – Казань: Отечество, 2012. – С. 183–186.
9. *Бадриев И.Б., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю.* О решении некоторых нелинейных краевых и начально-краевых задач // Материалы XXII Междунар. симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред». – М.: ООО «ТРП», 2016. – С. 31–33.

10. *Савинов В.П.* Физика высокочастотного емкостного разряда. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. – 308 с.
11. *Райзер Ю.П., Шнейдер М.Н., Яценко Н.А.* Высокочастотный емкостный разряд: Физика. Техника эксперимента. Приложения. – М.: Изд-во МФТИ, 1995. – 320 с.
12. *Chebert P., Braithwaite N.* Physics of radio-frequency plasmas. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2011. – 386 p.
13. *Райзер Ю.П.* Физика газового разряда. – Долгопрудный: Изд. дом «Интеллект», 2009. – 736 с.
14. *Лебедев Ю.А., Татаринов А.В., Тутов А.Ю., Эпштейн И.Л.* Двумерная модель неравновесного сильно неоднородного СВЧ-разряда во внешнем постоянном поле // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2014. – Т. 156, кн. 4. – С. 120–132.
15. *Чебакова В.Ю., Желтухин В.С.* О математических моделях высокочастотного емкостного разряда // Труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского: Лекционные материалы молодеж. науч. шк.-конф. в рамках Десятой Всерос. конф. «Сеточные методы для краевых задач и приложения». – Казань: Отечество, 2013. – С. 98–128.
16. *Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю.* Высокочастотный емкостной разряд: моделирование (обзор) // Вестн. Казан. технол. ун-та. – 2014. – Т. 17, № 23. – С. 9–14.
17. *Martinez E. Castonos., Kabouzi Y., Makasheva K., Moisan M.* Modeling of microwave-sustained plasmas at atmospheric pressure with application to discharge contraction // Phys. Rev. E. – 2004. – V. 70. – Art. 066405. – doi: 10.110/PhysRevE.70.066405.
18. *Чебакова В.Ю.* Численное моделирование высокочастотного емкостного разряда // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2015. – Т. 157, гн. 2. – С. 126–140.
19. *Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Шнейдер М.Н., Чебакова В.Ю.* Моделирование высокочастотного емкостного разряда в аргоне с учетом нагрева тяжелых частиц // Матем. методы в технике и технологиях. – 2014. – № 5. – С. 34–37.
20. *Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю., Шнейдер М.Н.* Нестационарная модель ВЧЕ-разряда при пониженном давлении // Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы Десятой Междунар. конф. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2014. – С. 15–20.
21. *Бикчантаев Д.Х., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю.* Численное исследование процесса взаимодействия высокочастотного емкостного разряда с материалами // Теория управления и математическое моделирование: Тез. докл. Всерос. конф. – Ижевск: Изд-во «Удмуртский ун-т», 2015. – С. 241–242.
22. *Badriev I.B.* On the solving of variational inequalities of stationary problems of two-phase flow in porous media // Appl. Mech. Mater. – 2013. – V. 392. – P. 183–187. – doi: 10.4028/www.scientific.net/AMM.392.183.
23. *Бадриев И.Б., Нечаева Л.А.* Математическое моделирование установившейся фильтрации с многозначным законом // Вестн. Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. Механика. – 2013. – № 3. – С. 35–62.
24. *Badriev I.B., Karchevskii M.M.* Convergence of an iterative process in a Banach space // J. Math. Sci. – 1994. – V. 71, No 6. – P. 2727–2735.
25. *Badriev I., Banderov V.* Numerical method for solving variation problems in mathematical physics // Appl. Mech. Mater. – 2014. – V. 668–669. – P. 1094–1097.
26. *Badriev I.B., Banderov V.V., Makarov M.V., Paimushin V.N.* Determination of stress-strain state of geometrically nonlinear sandwich plate // Appl. Math. Sci. – 2015. – V. 9, No 77–80. – P. 3887–3895.

27. *Кудрявцев А.А., Смирнов А.С., Цендин Л.Д.* Физика тлеющего разряда. – СПб.: Лань, 2010. – 512 с.
28. *Ferreira C.M., Loureiro J., Ricard A.* Populations in the metastable and the resonance levels of argon and stepwise ionization effects in a low-pressure argon positive column // *J. Appl. Phys.* – 1985. – V. 57, No 82. – P. 82–90. – doi: 10.1063/1.335400.
29. *Дятко Н.А., Ионих Ю.З., Мещанов А.В., Напартович А.П.* Исследование темной фазы на стадии развития положительного столба тлеющего разряда в аргоне // *Физика плазмы.* – 2005. – Т. 31, № 10. – С. 939–953.
30. *Hagelaar G.J.M., de Hoog F.J., Kroesen G.M.W.* Boundary conditions in fluid models of gas discharges // *Phys. Rev. E.* – 2000. – V. 62, No 1. – P. 1452–1454.
31. *Hagelaar G.J.M., Pitchford L.C.* Solving the Boltzmann equation to obtain electron transport coefficients and rate coefficients for fluid models // *Plasma Sources Sci. Techn.* – 2005. – V. 14. – P. 722–733.
32. *Lymberopoulos Dimitris P., Economou Demetre J.* Fluid simulations of glow discharge & Effect of metastable atoms in argon // *J. Appl. Phys.* – 1993. – V. 73, No 8. – P. 3668–3679.
33. *Zhu Xi-Ming., Pu Yi-Kang.* Modeling of microwave- sustained plasmas at atmospheric pressure with application to discharge contraction // *J. Phys. D: Appl. Phys.* – 2010. – V. 43. – Art. 015204. – doi: 10.1088/0022-3727/43/1/015204.
34. *Balcon N.P., Aanesland A., Hagelaar G.J.M., Boswell R., Boeuf J.P.* Atmospheric pressure RF discharge in argon: optical diagnostic, fluid model and applications // 28th ICPIG. – Prague, Czech Republic, 2007. – P. 957–960.
35. *Balcon N.P., Hagelaar G.J.M., Boeuf J.P.* Numerical Model of an Argon Atmospheric Pressure RF Discharge // *IEEE Transact. on Plasma Science.* – 2008. – V. 36, No 5. – P. 2782–2787.
36. *Moravej M., Yang X., Hicks R.F., Penelon J., Babayan S.E.* A radio-frequency nonequilibrium atmospheric pressure plasma operating with argon and oxygen // *J. Appl. Phys.* – 2006. – V. 99. – Art. 093305, P. 1–6. – doi: 10.1063/1.2193647.
37. *Epstein I.L., Gavrilović M., Jovircević S., Konjević N., Lebedev Yu.A., Tatarinov A.V.* The study of a homogeneous column of argon plasma at a pressure of 0.5 torr, generated by means of the Beenakker's cavity // *Eur. Phys. J. D.* – 2014. – V. 68. – Art. 334, P. 1–9. – doi: 10.1140/epjd/e2014-50182-7.
38. *Karoulina E., Lebedev Yu.* Computer simulation of microwave and DC plasmas comparative characterization of plasmas // *J. Phys. D: Appl. Phys.* – 1992. – V. 25. – P. 401–412.
39. *Смирнов Б.М.* Моделирование газоразрядной плазмы // *Усп. физ. наук.* – 2009. – Т. 179, Вып. 6. – С. 591–604.
40. *Смирнов Б.М.* Диффузия и подвижность ионов в газе // *Усп. физ. наук.* – 1967. – Т. 92, Вып. 1. – С. 75–103.
41. *Фастовский В.Г., Ровинский А.Е., Петровский Ю.В.* Инертные газы. – М.: Атомиздат, 1972. – 352 с.
42. *Мак-Даниель И.* Процессы столкновений в ионизированных газах. – М.: Мир, 1967. – 832 с.
43. *Boeuf J.P., Pitchford L.C.* Two-dimensional model of a capacitively coupled RF discharge and comparisons with experiments in the Gaseous Electronics Conference reference reactor // *Phys. Rev. E.* – 1995. – V. 51, No 2. – P. 1376–1390.
44. *Смирнов Б.М.* Возбужденные атомы. – М.: Энергоиздат, 1982. – 232 с.

45. *Bora B., Bhuyan H., Favre M., Wyndham E., Chuaqui H.* Diagnostic of capacitively coupled low pressure radio frequency plasma: An approach through electrical discharge characteristic // *Int. J. Appl. Phys. Math.* – 2011. – V. 1, No 2. – P. 124–128.
46. *Федоренко Р.П.* Введение в вычислительную физику. – М: Изд-во МФТИ, 1994. – 528 с.
47. *Kulikovsky A.A.* A more accurate scharfetter-gummel algorithm of electron transport for semiconductor and gas discharge simulation // *J. Comput. Phys.* – 1995. – V. 119. – P. 149–155.

Поступила в редакцию
31.05.16

Чебакова Виолетта Юрьевна, ассистент кафедры математической статистики
Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *vchebakova@mail.ru*

ISSN 1815-6088 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

**UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)**
2016, vol. 158, no. 3, pp. 404–423

Simulation of Radio-Frequency Capacitive Discharge at Atmospheric Pressure in Argon

V.Ju. Chebakova

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia

E-mail: *vchebakova@mail.ru*

Received May 31, 2016

Abstract

A one-dimensional self-consistent model of capacitive coupled radio-frequency discharge between symmetrical electrodes in argon in the local approximation at atmospheric pressure is considered in this paper. Electrons, atomic and molecular ions, metastable atoms and dimers of argon, as well as atoms in the ground state are taken into account in the model. A numerical algorithm is described for solving the mathematical model based on finite-dimensional approximation of the problem using difference schemes with subsequent application of the iterative process for its realization. A software package is developed in the MatLab environment to implement the algorithm of numerical calculation. The results of numerical calculations for the interelectrode distance of 0.2 and 2 cm at atmospheric pressure are given. The results of our calculations are in good agreement with the known results of field experiments and calculations.

Keywords: mathematical simulation, radio-frequency capacitive discharge, discharge at atmospheric pressure, local approximation, numerical experiments

Acknowledgments. The study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 16-11-10299).

Figure Captions

Fig. 1. The profile of the averaged concentration of charged particles at the interelectrode distance of 0.2 cm.

Fig. 2. The profile of the averaged concentration of charged particles at the interelectrode distance of 2 cm.

References

1. Plasma Physics and Chemistry: A Selection of Papers. Polak L.S. (Ed.). Moscow, Nauka, 1971. 433 p. (In Russian)
2. Low-Temperature Plasma. Vol. 3: Chemistry of Plasma. Polak L.S., Lebedev Yu.A. (Eds.). Novosibirsk, Nauka, 1991. 328 p. (In Russian)
3. Fridman A. Plasma Chemistry. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2008. 978 p.
4. Ouellette R., Barbier M., Cheremisinoff P. Low-Temperature Plasma Technology Applications. Moscow, Energoatomizdat, 1983. 144 p. (In Russian)
5. Mosse A.L., Burov I.O. Treatment of Dispersed Materials in Plasma Reactors. Minsk, Nauka Tekh., 1980. 205 p. (In Russian)
6. Tikhonova N.V., Zheltukhin V.S., Chebakova V.Yu., Borodaev I.A. Mathematical model of high-frequency plasma processing of multilayer materials uppers. *Vestn. Kazan. Tekhnol. Univ.*, 2012, vol. 15, no. 17, pp. 36–39. (In Russian)
7. Abdullin I.Sh., Zheltukhin V.S., Kashapov N.F. High-Frequency Plasma-Blasting Treatment of Materials at Low Pressures. Theory and Practice of Application. Kazan, Izd. Kazan. Univ., 2000, 348 p. (In Russian)
8. Zheltukhin V.S., Chebakova V.Yu., Shneider M.N. Modeling of a high-frequency capacitive discharge with a large inter-electrode distance. *Setochnye metody dlya kraevykh zadach i prilozheniya* [Mesh Methods for Boundary-Value Problems and Applications: Proc. 9th All-Russ. Conf.]. Kazan, Otechestvo, 2012, pp. 183–186. (In Russian)
9. Badriev I.B., Zheltukhin V.S., Chebakova V.Yu. On solving of some nonlinear boundary and initial boundary value problems. *Materialy XXII mezhdunar. simpoziuma "Dinamicheskie i tekhnologicheskie problemy mekhaniki konstruksii i sploshnykh sred"* [Proc. XXII Int. Symp.: Dynamic and Technological Problems of Mechanics of Constructions and Continuous Media]. Moscow, OOO TRP, 2016, pp. 31–33. (In Russian)
10. Savinov V.P. Physics of High-Frequency Capacitive Discharge. Moscow, FIZMATLIT, 2013. 308 p. (In Russian)
11. Raizer Yu.P., Shneider M.N., Yatsenko N.A. Radio-Frequency Capacitive Discharges: Physics. Experimental Technique. Applications. Moscow, Izd. MFTI, 1995. 320 p. (In Russian)
12. Chebert P., Braithwaite N. Physics of Radio-Frequency Plasmas. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2011. 386 p.
13. Raizer Yu.P. Gas Discharge Physics. Dolgoprudnyi, Izd. Dom Intellect, 2009. 736 p. (In Russian)
14. Lebedev Yu.A., Tatarinov A.V., Titov A.Yu., Epstein I.L. Two-dimensional model of a non-equilibrium strongly non-uniform microwave discharge in a DC external field. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2014, vol. 156, no. 4, pp. 120–132. (In Russian)
15. Chebakova V.Yu., Zheltukhin V.S. On mathematical models of radio-frequency capacitive discharge. *Tr. Matem. tsentra im. N.I. Lobachevskogo: lektsionnye materialy molodezh. nauch. shk.-kof. v ramkakh Desyatoi Vseros. konf. "Setochnye metody dlya kraevykh zadach i prilozheniya"* [Proc. N.I. Lobachevskii Math. Cent.: Lect. Mater. Youth Sch.-Conf. within 10th All-Russ. Conf.: Mesh Methods for Boundary-Value Problems and Applications]. Kazan, Otechestvo, 2013, pp. 98–128. (In Russian)
16. Abdullin I.Sh., Zheltukhin V.S., Chabakova V.Yu. Radio-frequency capacitive discharge: modeling (review). *Vestn. Kazan. Tekhnol. Univ.*, 2014, vol. 17, no. 23, pp. 9–14. (In Russian)
17. Martinez E. Castonos., Kabouzi Y., Makasheva K., Moisan M. Modeling of microwave-sustained plasmas at atmospheric pressure with application to discharge contraction. *Phys. Rev. E*, 2004, vol. 70, art. 066405. doi: 10.110/PhysPevE.70.066405.
18. Chebakova V.Yu. Numerical simulation of the high-frequency capacitive discharge. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2015, vol. 157, no. 2, pp. 126–140. (In Russian)

19. Abdullin I.Sh., Zheltukhin V.S., Shneider M.N., Chebakova V.Yu. Modeling of radio-frequency capacitive discharge in argon with account of heating of heavy particles. *Mat. Metody Tekh. Tekhnol.*, 2014, no. 5, pp. 34–37. (In Russian)
20. Abdullin I.Sh., Zheltukhin V.S., Chebakova V.Yu., Shneider M.N. Non-stationary model of high-frequency capacitive discharge at low pressure. *Setochnye metody dlya kraevykh zadach i prilozheniya. Materialy Desyatoi mezdunar. konf.* [Mesh Methods for Boundary-Value Problems and Applications. Proc. 10th Int. Conf.]. Kazan, Izd. Kazan. Univ., 2014, pp. 15–20. (In Russian)
21. Bikchantaev D.Kh., Zheltukhin V.S., Chebakova V.Yu. Numerical investigation of of the interaction of high-frequency capacitive discharge with materials. *Teoriya upravleniya i matematicheskoe modelirovaniye: Tez. dokl. Vseros. konf.* [Theory of Control and Mathematical Modeling: Proc. All-Russ. Conf.]. Izhevsk, Izd. Udmurt. Univ., 2015, pp. 241–242. (In Russian)
22. Badriev I.B. On the solving of variational inequalities of stationary problems of two-phase flow in porous media. *Appl. Mech. Mater.*, 2013, vol. 392, pp. 183–187. doi: 10.4028/www.scientific.net/AMM.392.183.
23. Badriev I.B., Nechaeva L.A. Mathematical simulation of stedy filtration with multivalued law. *Vestn. Permsk. Nats. Issled. Politekh. Univ. Mekh.*, 2013, no. 3, pp. 35–62. (In Russian)
24. Badriev I.B., Karchevskii M.M. Convergence of an iterative process in a Banach space. *J. Math. Sci.*, 1994, vol. 71, no. 6, pp. 2727–2735.
25. Badriev I., Banderov V. Numerical method for solving variation problems in mathematical physics. *Appl. Mech. Mater.*, 2014, vols. 668–669, pp. 1094–1097.
26. Badriev I.B., Banderov V.V., Makarov M.V., Paimushin V.N. Determination of stress-strain state of geometrically nonlinear sandwich plate. *Appl. Math. Sci.*, 2015, vol. 9, nos. 77–80, pp. 3887–3895.
27. Kudryavtsev A.A., Smirnov A.S., Tsendin L.D. Physics of Glow Discharge. St. Petersburg, Lan', 2010. 512 p. (In Russian)
28. Ferreira C.M., Loureiro J., Ricard A. Populations in the metastable and the resonance levels of argon and stepwise ionization effects in a low-pressure argon positive column. *J. Appl. Phys.*, 1985, vol. 57, no. 82, pp. 82–90. doi: 10.1063/1.335400.
29. Dyatko N.A., Ionikh Yu.Z., Meshchanov A.V., Napartovich A.P. Study of the dark phase in the initial stage of the positive column formation in an argon glow discharge. *Plasma Phys. Rep.*, 2005, vol. 31, no. 10, pp. 871–885. doi: 10.1134/1.2101975.
30. Hagelaar G.J.M., de Hoog F.J., Kroesen G.M.W. Boundary conditions in fluid models of gas discharges. *Phys. Rev. E.*, 2000, vol. 62, no. 1, pp. 1452–1454.
31. Hagelaar G.J.M., Pitchford L.C. Solving the Boltzmann equation to obtain electron transport coefficients and rate coefficients for fluid models. *Plasma Sources Sci. Technol.*, 2005, vol. 14, pp. 722–733.
32. Lymberopoulos D.P., Economou D.J. Fluid simulations of glow discharge: Effect of metastable atoms in argon. *J. Appl. Phys.*, 1993, vol. 73, no. 8, pp. 3668–3679.
33. Zhu X.-M., Pu Y.-K. Modeling of microwave- sustained plasmas at atmospheric pressure with application to discharge contraction. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 2010, vol. 43, art. 015204. doi: 10.1088/0022-3727/43/1/015204.
34. Balcon N.P., Aanesland A., Hagelaar G.J.M., Boswell R., Boeuf J.P. Atmospheric pressure RF discharge in argon: Optical diagnostic, fluid model and applications. *28th ICPiG*, Prague, Czech Republic, 2007, pp. 957–960.
35. Balcon N.P., Hagelaar G.J.M., Boeuf J.P. Numerical model of an argon atmospheric pressure RF discharge. *IEEE Trans. Plasma Sci.*, 2008, vol. 36, no. 5, pp. 2782–2787.
36. Moravej M., Yang X., Hicks R.F., Penelon J., Babayan S.E. A radio-frequency nonequilibrium atmospheric pressure plasma operating with argon and oxygen. *J. Appl. Phys.*, 2006, vol. 99, art. 093305, pp. 1–6. doi: 10.1063/1.2193647.
37. Epstein I.L., Gavrilović M., Jovircević S., Konjević N., Lebedev Yu.A., Tatarinov A.V. The study of a homogeneous column of argon plasma at a pressure of 0.5 torr, generated by means of the Beenakker's cavity. *Eur. Phys. J. D.*, 2014, vol. 68, art. 334, pp. 1–9. doi: 10.1140/epjd/e2014-50182-7.
38. Karoulina E., Lebedev Yu. Computer simulation of microwave and DC plasmas comparative characterization of plasmas. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 1992, vol. 25, pp. 401–412.
39. Smirnov B.M. Modeling of gas discharge plasma. *Usp. Fiz. Nauk*, 2009, vol. 179, no. 6, pp. 591–604. (In Russian)

40. Smirnov B.M. Diffusion and mobility of ions in gas. *Usp. Fiz. Nauk*, 1967, vol. 92, no. 1, pp. 75–103. (In Russian)
41. Fastovskii V.G., Rovinskii A.E., Petrovskii Yu.V. Inert Gases. Moscow, Atomizdat, 1972. 352 p. (In Russian)
42. MacDaniel I. The Processes of Collisions in Ionized Gases. Moscow, Mir, 1967. 832 p. (In Russian)
43. Boeuf J.P., Pitchford L.C. Two-dimensional model of a capacitively coupled RF discharge and comparisons with experiments in the Gaseous Electronics Conference reference reactor. *Phys. Rev. E.*, 1995, vol. 51, no. 2, pp. 1376–1390.
44. Smirnov B.M. Excited Atoms. Moscow, Enrgozadt, 1982. 232 p. (In Russian)
45. Bora B., Bhuyan H., Favre M., Wyndham E., Chuaqui H. Diagnostic of capacitively coupled low pressure radio frequency plasma: An approach through electrical discharge characteristic. *Int. J. Appl. Phys. Math.*, 2011, vol. 1, no. 2, pp. 124–128.
46. Fedorenko R.P. Introduction into Computational Physics. Moscow, Izd. MFTI, 1994. 528 p. (In Russian)
47. Kulikovskiy A.A. A more accurate Scharfetter–Gummel algorithm of electron transport for semiconductor and gas discharge simulation. *J. Comput. Phys.*, 1995, vol. 119, pp. 149–155.

⟨ **Для цитирования:** Чебакова В.Ю. Моделирование высокочастотного емкостного разряда при атмосферном давлении в аргоне // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2016. – Т. 158, кн. 3. – С. 404–423. ⟩

⟨ **For citation:** Chebakova V.Ju. Simulation of radio-frequency capacitive discharge at atmospheric pressure in argon. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, no. 3, pp. 404–423. (In Russian) ⟩