ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 11 (522)

УДК 517.972

А.Г. ЧЕНЦОВ

КВАЗИСТРАТЕГИИ В АБСТРАКТНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ И МЕТОД ПРОГРАММНЫХ ИТЕРАЦИЙ (ПРЯМАЯ ВЕРСИЯ)

В данной статье рассматривается абстрактный аналог известного в теории управления метода программных итераций в его прямой версии: осуществляется итерационное построение наследственной мультифункции, являющейся реакцией на сигнал об априори непредсказуемом отображении. Общая конструкция иллюстрируется на примере задачи управления с неполной информацией.

1. Введение

Рассмотрим вариант метода программных итераций (МПИ), известного в теории дифференциальных игр (ДИ) ([1]–[9]). Особенностью данного варианта является следующее обстоятельство: в работе исследуется так называемая прямая (в смысле построения управляющей процедуры) версия МПИ в абстрактной задаче управления с неполной информацией о траекториях процесса. В связи с игровыми постановками задач управления с неполной информацией см., в частности, [3], [10]–[12]. В этих работах предполагается, что удовлетворительное статистическое описание пространства сигналов в канале измерения отсутствует ; в каждый момент времени известна лишь область фазового пространства, связанная с сигналом и такая, что фазовый вектор содержится в этой области (ограничимся процедурами управления по сигналу, так или иначе формируемому измерителем) ([3], сс. 406, 407). Для задач управления в такой постановке построены ([3], [10]–[13] и др.) методы управления, использующие аналоги экстремального прицеливания Н.Н. Красовского и реализуемые обычно в линейных по фазовому состоянию системах. В работах [10], [13] рассматривались конструкции программного управления, исследовались минимаксные задачи наблюдения и методы минимаксной фильтрации, вопросы построения синтеза управления по неполным данным.

Традиционные версии МПИ создавались в интересах решения ДИ с полной информацией о фазовом состоянии. Основополагающая теорема Н.Н. Красовского и А.И. Субботина об альтернативе в нелинейной позиционной ДИ и ее следствия, касающиеся существования седловой точки в классе позиционных стратегий, определили ориентиры при построении методов решения. Были указаны (см. [2], [3] и др.) условия регулярности, при которых искомые позиционные стратегии удается построить на основе решения игровых задач программного управления. В общем случае логика перехода от управления по программе к синтезу связана с итерационными процедурами (см. [14]–[19] и др.), которые являются способами решения некоторого уравнения “программного поглощения”; точнее, МПИ можно рассматривать как способ нахождения неподвижной точки монотонного оператора в полуупорядоченном пространстве (отметим естественные аналогии с конструкциями Л.В. Канторовича; см. в этой связи общие положения ([20], сс. 237, 238)). Особенность конструкций, лежащих в основе МПИ, связана с использованием топологических методов, обеспечивающих исследование условий сходимости процесса к требуемой

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-01-00415, 01-01-96450), и Министерства образования России (проект № Е02-1.0-232).

неподвижной точке. Вышеупомянутые варианты МПИ (ранние версии) были непрямыми в смысле построения управляющих процедур; последние определялись по известным правилам после итерационного построения функции цены ДИ или стабильного моста в смысле Н.Н. Красовского. Отметим, что в [21] одна естественная в теории ДИ непрямая версия МПИ была перенесена на случай решения задачи управления с неполной информацией. Принципиально иная — прямая — версия МПИ была предложена для решения задачи о построении неупреждающего и (более общим образом) наследственного мультиселектора заданной мультифункции (см.[22]–[25] и др.). Применительно к теории ДИ данная версия реализует построение многозначных квазистратегий управления, гарантирующих успешное решение соответствующей игровой задачи, либо указывает на невозможность такого решения (в связи с конструкциями (однозначных) квазистратегий отметим работы [26]–[28]).

В данной работе конструкции [22]–[25] применены для исследования абстрактных задач управления с неполной информацией. В общей части рассматривается построение мультифункций, наследственных в смысле заданного априори непустого семейства $\mathcal{X}$ непустых подмножеств фиксированного множества X, являющегося аналогом промежутка управления. На X формируются два отображения, одно из которых "заинтересовано" в осуществлении некоторого условия. Информация о втором заключена в сигнале. Мы стремимся к построению $\mathcal{X}$-наследственной реакции на сигнал, гарантирующей осуществление требуемого условия, либо к выяснению принципиальной невозможности его наследственной реализации. Для этого используется прямая версия МПИ (см. [22]–[25]). Общие построения иллюстрируются типичной (в теории ДИ) задачей управления, осложненной неполнотой информации о фазовых состояниях.

2. Общие обозначения и определения

В дальнейшем используем кванторы, связки (& — и, $\vee$ — или, $\Longrightarrow$ — влечет, $\neg$ — не), символы def (по определению) и $\triangleq$ (равно по определению). Множество, все элементы которого сами являются множествами, называем семейством. Принимаем аксиому выбора. Если H — множество, то через $\mathcal{P}(H)$ (через $\mathcal{P}'(H)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) подмножеств множества H. Если A и B — множества, то через B^A обозначаем множество всех функций (операторов), действующих из A в B. Если A и B — множества, $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}'(A)$, то $(f|C) \triangleq (f(x))_{x\in C} \in B^C$ есть сужение f на непустое множество C, $C \subset A$. Символ $\circ$ используем при обозначении суперпозиции функций.

Через $\mathcal{N}$ обозначаем натуральный ряд: $\mathcal{N} \triangleq \{1;2;\dots\}$; $\mathcal{N}_0 \triangleq \{0\} \cup \mathcal{N} = \{0;1;2;\dots\}$. Во избежание двусмысленности в традиционных обозначениях постулируем, что элементы $\mathcal{N}_0$ не являются множествами. Если H — непустое множество и $T \in H^H$ (т. е. T действует в H), то

$$(T^k)_{k\in\mathcal{N}_0} : \mathcal{N}_0 \longrightarrow H^H \tag{2.1}$$

определяем традиционно: 1) $T^0(h) \triangleq h \quad \forall h \in H$, 2) $T^k = T \circ T^{k-1} \quad \forall k \in \mathcal{N}$. Если A и B — множества, то $\mathbb{M}(A,B) \triangleq \mathcal{P}(B)^A$; элементы $\mathbb{M}(A,B)$ называем также мультифункциями из A в B. В этих терминах дополняем (в одном специальном случае) последовательность (2.1) бесконечной степенью оператора, следуя [22]–[25], [29]. Для произвольных множеств A, B и оператора $T \in \mathbb{M}(A,B)^{\mathbb{M}(A,B)}$ определяем $T^\infty \in \mathbb{M}(A,B)^{\mathbb{M}(A,B)}$ посредством правила: если $\mathcal{C} \in \mathbb{M}(A,B)$ и $a \in A$, то

$$T^\infty(\mathcal{C})(a) \triangleq \bigcap_{k\in\mathcal{N}_0} T^k(\mathcal{C})(a).$$

Введем естественные определения порядка и сходимости в пространствах мультифункций. Если A и B — множества, $\alpha \in \mathbb{M}(A,B)$ и $\beta \in \mathbb{M}(A,B)$, то

$$(\alpha \sqsubseteq \beta) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\alpha(x) \subset \beta(x) \ \forall x \in A). \tag{2.2}$$

Используем $\downarrow$ для обозначения монотонной сходимости последовательности множеств (напр., [30], гл. I). Если U — множество, $(M_i)_{i\in\mathcal{N}}$ — последовательность подмножества U и $M \in \mathcal{P}(U)$, то $(M_i)_{i\in\mathcal{N}} \downarrow M$ означает 1) M есть пересечение всех множеств M_j, $j \in \mathcal{N}$; 2) $M_{k+1} \subset M_k$ $\forall k \in \mathcal{N}$. Как и в [22]–[25],[29], вводим монотонную сходимость в пространстве мультифункций: если A и B — множества, $(\mathcal{C}_i)_{i\in\mathcal{N}}$ — последовательность в $\mathbb{M}(A,B)$ и $\mathcal{C} \in \mathbb{M}(A,B)$, то

$$((\mathcal{C}_i)_{i\in\mathcal{N}} \Downarrow \mathcal{C}) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} ((\mathcal{C}_i(a))_{i\in\mathcal{N}} \downarrow \mathcal{C}(a)\ \forall a \in A). \tag{2.3}$$

Имеем в (2.3) поточечную сходимость мультифункций. С учетом (2.2) для любых множеств A и B введем $\mathcal{M}[A;B] \triangleq \{T \in \mathbb{M}(A,B)^{\mathbb{M}(A,B)} \mid T(\mathcal{C}) \sqsubseteq \mathcal{C}\ \forall \mathcal{C} \in \mathbb{M}(A,B)\}$; если же при этом $\mathbb{T} \in \mathcal{M}[A;B]$ и $\zeta \in \mathbb{M}(A,B)$, то непременно $(\mathbb{T}^k(\zeta))_{k\in\mathcal{N}} \Downarrow \mathbb{T}^\infty(\zeta)$.

3. Общая задача и структура ее решения

Следуем обозначениям [22]–[25], [29]. Фиксируем непустые множества X, Y, Υ и E. Пусть, кроме того, Z есть непустое подмножество Y^X: $Z \in \mathcal{P}'(Y^X)$; элементы Z (а это — функции из X в Y) именуем траекториями *системы* I. Фиксируем также $\mathbb{E} \in \mathcal{P}'(E^X)$ ($\mathbb{E}$ — непустое подмножество E^X); элементы $\mathbb{E}$ называем траекториями *системы* II. Предполагается, что выбор $z \in Z$ и $e \in \mathbb{E}$ осуществляется независимо участниками (игроками) систем I и II. Пусть

$$M \in \mathcal{P}'(Z \times \mathbb{E}); \tag{3.1}$$

множество M является целевым для игрока I. В свою очередь, ситуацию $(z,e) \in M$, где $z \in Z$ и $e \in \mathbb{E}$, интерпретируем как достижение цели этим игроком. Фиксируем оператор

$$\Lambda : \mathbb{E} \longrightarrow \mathcal{P}'(\Upsilon^X). \tag{3.2}$$

Если $e \in \mathbb{E}$ и $\lambda \in \Lambda(e)$, то рассматриваем λ как сигнал, порожденный траекторией e. Имеем

$$\Omega \triangleq \bigcup_{e\in\mathbb{E}} \Lambda(e) \in \mathcal{P}'(\Upsilon^X), \tag{3.3}$$

т. е. Ω — непустое множество возможных сигналов, порождаемых посредством Λ (3.2). Отметим, что $\{e \in \mathbb{E} \mid \omega \in \Lambda(e)\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{E})\ \forall \omega \in \Omega$. С учетом этого свойства введем оператор

$$\mathbb{L} : \Omega \longrightarrow \mathcal{P}'(\mathbb{E}). \tag{3.4}$$

Если $\omega \in \Omega$, то

$$\mathbb{L}(\omega) \triangleq \{e \in \mathbb{E} \mid \omega \in \Lambda(e)\}; \tag{3.5}$$

можно рассматривать (3.5) как функциональное информационное множество. Введем, наконец,

$$\alpha^0 : \Omega \longrightarrow \mathcal{P}(Z), \tag{3.6}$$

полагая, что $\forall \omega \in \Omega$

$$\alpha^0(\omega) \triangleq \{z \in Z \mid (z,e) \in M\ \forall e \in \mathbb{L}(\omega)\}. \tag{3.7}$$

В (3.6), (3.7) полагаем, что участник I, располагая сигналом из множества Ω, воспроизводит множество всех своих траекторий, гарантированно (при данном сигнале) приводящих к успеху. Основная проблема выбора для участника I осложняется тем, что сигнал $\omega \in \Omega$ ему априори неизвестен, и он может получать его лишь по мере реализации. Мы оговорим сейчас весьма общие законы такой реализации, обращаясь для этого к абстрактному аналогу свойства неупреждаемости, именуемому далее наследственностью. Пусть $\mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(X)) : \mathcal{X}$ есть непустое семейство непустых подмножеств X. Если $\alpha : \Omega \longrightarrow \mathcal{P}(Z)$, то называем оператор α наследственным, если $\forall \omega_1 \in \Omega\ \forall \omega_2 \in \Omega\ \forall A \in \mathcal{X}$

$$((\omega_1|A) = (\omega_2|A)) \Longrightarrow (\{(z|A) : z \in \alpha(\omega_1)\} = \{(z|A) : z \in \alpha(\omega_2)\}). \tag{3.8}$$

Для (3.8) используем эквивалентное представление в терминах свойства неподвижной точки некоторого "программного" оператора. Напомним, что $\mathbb{M}(\Omega, Z) = \mathcal{P}(Z)^{\Omega}$ (множество всех отображений из Ω в $\mathcal{P}(Z)$); элементы $\mathbb{M}(\Omega, Z)$ суть мультифункции из Ω в Z. Напомним, что

$$\mathcal{M}[\Omega; Z] = \{U \in \mathbb{M}(\Omega, Z)^{\mathbb{M}(\Omega,Z)} \mid U(\mathcal{C}) \sqsubseteq \mathcal{C}\ \forall \mathcal{C} \in \mathbb{M}(\Omega, Z)\}. \tag{3.9}$$

Используем определения ([29], с. 313) для ростков, соответствующих начальным фрагментам сигнала и траектории: если $A \in \mathcal{X}$, то

$$(\Omega_0(\omega|A) \triangleq \{\nu \in \Omega \mid (\omega|A) = (\nu|A)\}\ \forall \omega \in \Omega)\&$$
$$\&(Z_0(z|A) \triangleq \{\tilde{z} \in Z \mid (z|A) = (\tilde{z}|A)\}\ \forall z \in Z). \tag{3.10}$$

Ясно, что в (3.10) определены непустые множества в функциональных пространствах. В этих терминах введем оператор $\mathbf{\Gamma}$ ([29], с. 314). Итак,

$$\mathbf{\Gamma} \in \mathcal{M}[\Omega; Z] \tag{3.11}$$

определяется следующим правилом: $\forall \mathcal{C} \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$, $\forall \omega \in \Omega$

$$\mathbf{\Gamma}(\mathcal{C})(\omega) \triangleq \{z \in \mathcal{C}(\omega) \mid Z_0(z|A) \cap \mathcal{C}(\nu) \neq \emptyset\ \forall A \in \mathcal{X},\ \forall \nu \in \Omega_0(\omega|A)\}. \tag{3.12}$$

Известно [22]–[25], [29] свойство: если $\alpha \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$, то α наследственно в смысле (3.8) тогда и только тогда, когда $\alpha = \mathbf{\Gamma}(\alpha)$. Следовательно, имеем исчерпывающую характеризацию наследственности в терминах свойства неподвижной точки оператора (3.11), (3.12). В этой связи согласно (3.13) (см. [22]–[25], [29]) полагаем

$$\mathbb{N} \triangleq \{\alpha \in \mathbb{M}(\Omega, Z) \mid \alpha = \mathbf{\Gamma}(\alpha)\}. \tag{3.13}$$

Если $\alpha \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$, то

$$(\mathrm{DOM})[\alpha] \triangleq \{\omega \in \Omega \mid \alpha(\omega) \neq \emptyset\}$$

есть эффективная область мультифункции α. Полагаем

$$Q \triangleq \{\alpha \in \mathbb{N} \mid (\mathrm{DOM})[\alpha] = \Omega\} = \{\alpha \in \mathbb{N} \mid \alpha(\omega) \neq \emptyset\ \forall \omega \in \Omega\}. \tag{3.14}$$

Элементы Q (3.14) называем многозначными квазистратегиями (участника I) или просто квазистратегиями. Напомним, что мультифункция α^0 определяет цель управления со стороны участника I. Следуя [22]–[25], [29] (см., в частности, [29], с. 320), введем

$$\mathbb{N}_0[\alpha^0] \triangleq \{\alpha \in \mathbb{N} \mid \alpha \sqsubseteq \alpha^0\} \tag{3.15}$$

и, кроме того, множество

$$Q^0 \triangleq \{\alpha \in Q \mid \alpha \sqsubseteq \alpha^0\}. \tag{3.16}$$

Связь (3.15), (3.16) весьма очевидна: из (3.14)–(3.16) имеем

$$Q^0 = \{\alpha \in \mathbb{N}_0[\alpha^0] \mid (\mathrm{DOM})[\alpha] = \Omega\}. \tag{3.17}$$

В силу (3.16), (3.17) элементы Q^0 могут рассматриваться в виде квазистратегий, гарантирующих осуществление цели, связанной с реализацией пары траекторий в множестве (3.1).

Предложение 3.1. *Множество Q^0 совпадает с множеством всех квазистратегий $\alpha \in Q$ таких, что $\forall e \in \mathbb{E}$, $\forall \omega \in \Lambda(e)$, $\forall z \in \alpha(\omega)$*

$$(z, e) \in M.$$

Доказательство легко следует из определений и в данном изложении опущено. Напомним, что ([29], сс. 320, 321) корректно определяется мультифункция

$$(na)[\alpha^0] \in \mathbb{N}_0[\alpha^0] \tag{3.18}$$

такая, что имеет место

$$\beta \sqsubseteq (na)[\alpha^0] \quad \forall \beta \in \mathbb{N}_0[\alpha^0]. \tag{3.19}$$

При этом ([29], сс. 320, 321) (3.18) определяется правилом

$$(na)[\alpha^0](\omega) = \bigcup_{\mathcal{C} \in \mathbb{N}_0[\alpha^0]} \mathcal{C}(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega. \tag{3.20}$$

Разумеется, $(na)[\alpha^0] \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$, т. е.

$$(na)[\alpha^0] : \Omega \longrightarrow \mathcal{P}(Z); \tag{3.21}$$

мультифункция (3.21) является $\sqsubseteq$-наибольшим наследственным мультиселектором мультифункции α^0. Из (3.19) следует, что $\forall \beta \in \mathbb{N}_0[\alpha^0]$, $\forall \omega \in \Omega$

$$\beta(\omega) \subset (na)[\alpha^0](\omega). \tag{3.22}$$

Здесь же напомним, что

$$(\mathrm{DOM})[(na)[\alpha^0]] = \{\omega \in \Omega \mid (na)[\alpha^0](\omega) \neq \emptyset\}. \tag{3.23}$$

Предложение 3.2. *Если выполнено условие*

$$(\mathrm{DOM})[(na)[\alpha^0]] \neq \Omega, \tag{3.24}$$

то $\forall \alpha \in Q \ \exists e \in \mathbb{E}, \ \exists \omega \in \Lambda(e), \ \exists z \in \alpha(\omega) : (z, e) \notin M$.

Доказательство. Пусть выполнено условие (3.24). Из (3.23) и (3.24) получаем

$$\Omega \setminus (\mathrm{DOM})[(na)[\alpha^0]] \neq \emptyset. \tag{3.25}$$

Пусть (см.(3.25)) теперь

$$\omega_0 \in \Omega \setminus (\mathrm{DOM})[(na)[\alpha^0]]. \tag{3.26}$$

Из (3.26) вытекает, что $\omega_0 \in \Omega$ обладает свойством

$$(na)[\alpha^0](\omega_0) = \emptyset. \tag{3.27}$$

Выберем произвольно $\alpha_* \in Q$. При этом, очевидно,

$$(\alpha_* \in Q^0) \vee (\alpha_* \in Q \setminus Q^0). \tag{3.28}$$

Допустим сначала, что $\alpha_* \in Q^0$. Тогда (см. (3.17)) имеет место

$$\alpha_* \in \mathbb{N}_0[\alpha^0] \tag{3.29}$$

и справедливо равенство

$$(\mathrm{DOM})[\alpha_*] = \Omega. \tag{3.30}$$

Напомним, что из (3.15), (3.29) следует, что мультифункция $\alpha_* \in \mathbb{N}$ обладает свойством $\alpha_* \sqsubseteq \alpha^0$. В частности, для $\omega_0 \in (\mathrm{DOM})[\alpha_*]$ (см. (3.30)) с учетом (3.22) имеем (одновременно)

$$(\alpha_*(\omega_0) \neq \emptyset) \& (\alpha_*(\omega_0) \subset (na)[\alpha^0](\omega_0)). \tag{3.31}$$

В силу (3.27) утверждение (3.31) невозможно. Поэтому (см. (3.28)) действительно имеет место

$$\alpha_* \in Q \setminus Q^0. \tag{3.32}$$

Из (3.16), (3.32) имеем следующую очевидную импликацию

$$(\alpha_* \sqsubseteq \alpha^0) \Longrightarrow (\alpha_* \in Q^0).$$

С учетом (3.32) получаем свойство

$$\neg(\alpha_* \sqsubseteq \alpha^0). \tag{3.33}$$

Из (3.33) следует, что справедливо утверждение

$$\exists \omega \in \Omega : \alpha_*(\omega) \setminus \alpha^0(\omega) \neq \emptyset. \tag{3.34}$$

Пусть согласно (3.34) $\omega^\natural \in \Omega$ обладает свойством

$$\alpha_*(\omega^\natural) \setminus \alpha^0(\omega^\natural) \neq \emptyset. \tag{3.35}$$

Учитывая (3.35), выберем произвольную траекторию

$$z^\natural \in \alpha_*(\omega^\natural) \setminus \alpha^0(\omega^\natural). \tag{3.36}$$

Напомним, что (3.4), (3.5) $\mathbb{L}(\omega^\natural) = \{e \in \mathbb{E} \mid \omega^\natural \in \Lambda(e)\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{E})$. Из (3.7) следует импликация

$$((z^\natural, e) \in M \ \forall e \in \mathbb{L}(\omega^\natural)) \Longrightarrow (z^\natural \in \alpha^0(\omega^\natural)). \tag{3.37}$$

Из (3.36), (3.37) получаем утверждение

$$\exists e \in \mathbb{L}(\omega^\natural) : (z^\natural, e) \notin M. \tag{3.38}$$

Пусть (см. (3.38)) теперь траектория $e^\natural \in \mathbb{L}(\omega^\natural)$ такова, что

$$(z^\natural, e^\natural) \notin M. \tag{3.39}$$

Тогда $e^\natural \in \mathbb{E}$ удовлетворяет условию $\omega^\natural \in \Lambda(e^\natural)$. Итак,

$$z^\natural \in \alpha_*(\omega^\natural) : (z^\natural, e^\natural) \notin M$$

(см. (3.39)). Следовательно, $\omega^\natural \in \Lambda(e^\natural)$ обладает свойством

$$\exists z \in \alpha_*(\omega^\natural) : (z, e^\natural) \notin M.$$

Таким образом, траектория $e^\natural \in \mathbb{E}$ такова, что

$$\exists \omega \in \Lambda(e^\natural),\ \exists z \in \alpha_*(\omega) : (z, e^\natural) \notin M.$$

Итак, непременно имеет место свойство

$$\exists e \in \mathbb{E},\ \exists \omega \in \Lambda(e),\ \exists z \in \alpha_*(\omega) : (z, e) \notin M.$$

Поскольку выбор α_* был произвольным, предложение доказано. $\square$

Из предложения 3.2 вытекает, что истинна импликация

$$((\mathrm{DOM})[(na)[\alpha^0]] \neq \Omega) \Longrightarrow (Q^0 = \emptyset). \tag{3.40}$$

Далее, из (3.17), (3.18) следует

$$((\mathrm{DOM})[(na)[\alpha^0]] = \Omega) \Longrightarrow ((na)[\alpha^0] \in Q^0). \tag{3.41}$$

Из (3.41) имеем, в частности, импликацию

$$((\mathrm{DOM})[(na)[\alpha^0]] = \Omega) \Longrightarrow (Q^0 \neq \emptyset). \tag{3.42}$$

Из (3.40), (3.42) вытекает

Теорема 3.1. *Эквивалентны следующие три утверждения*:
1) $(\mathrm{DOM})[(na)[\alpha^0]] = \Omega$;
2) $(na)[\alpha^0] \in Q^0$;
3) $Q^0 \neq \emptyset$.

Доказательство. Из (3.41) имеем, что 1) $\Longrightarrow$ 2). Далее, 2) $\Longrightarrow$ 3). Пусть выполнено 3), т. е. $Q^0 \neq \emptyset$. Из (3.40) имеем

$$\neg((\mathrm{DOM})[(na)[\alpha^0]] \neq \Omega),$$

т. е. $(\mathrm{DOM})[(na)[\alpha^0]] = \Omega$. Итак, 3) $\Longrightarrow$ 1). $\square$

Напомним, что в силу предложения 3.1 справедливо равенство

$$Q^0 = \{\alpha \in Q \mid (z, e) \in M \ \forall e \in \mathbb{E}, \ \forall \omega \in \Lambda(e), \ \forall z \in \alpha(\omega)\}.$$

4. Метод итераций

Напомним, что $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N} \cup \{0\}$ и $(\mathbf{\Gamma}^k)_{k \in \mathcal{N}_0} : \mathcal{N}_0 \longrightarrow \mathbb{M}(\Omega, Z)^{\mathbb{M}(\Omega, Z)}$ определяется традиционно: $\mathbf{\Gamma}^0$ действует по правилу

$$\mathbf{\Gamma}^0(\mathcal{C}) = \mathcal{C} \ \forall \mathcal{C} \in \mathbb{M}(\Omega, \mathcal{C}), \tag{4.1}$$

и, кроме того, справедливы следующие равенства:

$$\mathbf{\Gamma}^k = \mathbf{\Gamma} \circ \mathbf{\Gamma}^{k-1} \ \forall k \in \mathcal{N} \tag{4.2}$$

($\circ$ — символ суперпозиции). Кроме того, имеем, наряду с (4.1), (4.2), бесконечную степень оператора $\mathbf{\Gamma}$; оператор $\mathbf{\Gamma}^\infty : \mathbb{M}(\Omega, Z) \longrightarrow \mathbb{M}(\Omega, Z)$ определяется (см. раздел 2) правилом: если $\mathcal{C} \in \mathbb{M}(\Omega, Z)$ и $\omega \in \Omega$, то

$$\mathbf{\Gamma}^\infty(\mathcal{C})(\omega) = \bigcap_{k \in \mathcal{N}_0} \mathbf{\Gamma}^k(\mathcal{C})(\omega). \tag{4.3}$$

В качестве $\mathcal{C}$ в (4.3) можно использовать мультифункцию α^0 (3.6), (3.7). Итак, имеем последовательность итераций

$$(\mathbf{\Gamma}^k(\alpha^0))_{k \in \mathcal{N}_0} : \mathcal{N}_0 \longrightarrow \mathbb{M}(\Omega, Z),$$

однозначно определяемую условиями

$$(\mathbf{\Gamma}^0(\alpha^0) = \alpha^0) \& (\mathbf{\Gamma}^k(\alpha^0) = \mathbf{\Gamma}(\mathbf{\Gamma}^{k-1}(\alpha^0))) \ \forall k \in \mathcal{N}. \tag{4.4}$$

При этом из (3.9), (3.11) и (4.4) имеем

$$\mathbf{\Gamma}^{k+1}(\alpha^0) \sqsubseteq \mathbf{\Gamma}^k(\alpha^0) \ \forall k \in \mathcal{N}_0. \tag{4.5}$$

Далее, имеем из (4.3), что мультифункция

$$\mathbf{\Gamma}^\infty(\alpha^0) \in \mathbb{M}(\Omega, Z) \tag{4.6}$$

определяется условием $\forall \omega \in \Omega$

$$\mathbf{\Gamma}^\infty(\alpha^0)(\omega) = \bigcap_{k \in \mathcal{N}_0} \mathbf{\Gamma}^k(\alpha^0)(\omega). \tag{4.7}$$

Из (4.5) и (4.7) имеем (см. [29], с. 326) сходимость

$$(\mathbf{\Gamma}^k(\alpha^0))_{k \in \mathcal{N}} \Downarrow \mathbf{\Gamma}^\infty(\alpha^0). \tag{4.8}$$

Отметим, что $\mathbf{\Gamma}^\infty(\alpha^0) : \Omega \longrightarrow \mathcal{P}(Z)$ есть отображение, оценивающее мультифункцию (3.18) сверху (см. [29], сс. 320, 321, 327):

$$(na)[\alpha^0] \sqsubseteq \mathbf{\Gamma}^\infty(\alpha^0). \tag{4.9}$$

Из (4.9) имеем, что справедливы вложения

$$(na)[\alpha^0](\omega) \subset \mathbf{\Gamma}^\infty(\alpha^0)(\omega) \ \ \forall \omega \in \Omega. \tag{4.10}$$

Напомним (4.6), что справедливо равенство

$$(\mathrm{DOM})[\mathbf{\Gamma}^\infty(\alpha^0)] = \{\omega \in \Omega \mid \mathbf{\Gamma}^\infty(\alpha^0)(\omega) \neq \emptyset\}. \tag{4.11}$$

Из теоремы 3.1 и (4.11) вытекает очевидное теперь

Предложение 4.1. *Если* $(\mathrm{DOM})[\mathbf{\Gamma}^\infty(\alpha^0)] \neq \Omega$, *то* $Q^0 = \emptyset$.

Доказательство. Пусть выполнено условие

$$(\mathrm{DOM})[\mathbf{\Gamma}^\infty(\alpha^0)] \neq \Omega. \tag{4.12}$$

Из (4.11), (4.12) следует, что справедливо условие

$$\Omega \setminus (\mathrm{DOM})[\mathbf{\Gamma}^\infty(\alpha^0)] \neq \emptyset. \tag{4.13}$$

Пусть (4.13) $\omega^0 \in \Omega \setminus (\mathrm{DOM})[\mathbf{\Gamma}^\infty(\alpha^0)]$. Тогда (4.11)

$$\mathbf{\Gamma}^\infty(\alpha^0)(\omega^0) = \emptyset. \tag{4.14}$$

С другой стороны, из (4.10) следует вложение

$$(na)[\alpha^0](\omega^0) \subset \mathbf{\Gamma}^\infty(\alpha^0)(\omega^0), \tag{4.15}$$

из (4.14), (4.15) — очевидное равенство

$$(na)[\alpha^0](\omega^0) = \emptyset. \tag{4.16}$$

Из (3.23) и (4.16) вытекает, что справедливо утверждение

$$\omega^0 \notin (\mathrm{DOM})[(na)[\alpha^0]]. \tag{4.17}$$

Тогда (см. (4.17)) $\omega^0 \in \Omega \setminus (\mathrm{DOM})[(na)[\alpha^0]]$. Поэтому

$$(\mathrm{DOM})[(na)[\alpha^0]] \neq \Omega. \tag{4.18}$$

Из теоремы 3.1 и (4.18) следует $Q^0 = \emptyset$. $\square$

Итак, в общем случае рассматриваемой задачи итерационная конструкция (4.4)–(4.8) может использоваться как своеобразный индикатор неразрешимости данной задачи.

5. Вопросы сходимости и условия разрешимости основной задачи

Наиболее интересен случай, когда $\mathbf{\Gamma}^\infty(\alpha^0)$ и $(na)[\alpha^0]$ совпадают: процесс (4.4)–(4.8) сходится "туда, куда надо". Для получения общих условий такой сходимости напомним понятия ([24], [25], [29], § 6.7). Введем следующие два подмножества $\mathbb{M}(\Omega, Z)$:

$$\mathfrak{Z} \triangleq \{\mathbb{U} \in \mathcal{P}(\mathbb{M}(\Omega, Z)) \mid \mathbf{\Gamma}(U) \in \mathbb{U} \ \forall U \in \mathbb{U}\}, \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{C} \triangleq \{\mathbb{U} \in \mathcal{P}(\mathbb{M}(\Omega, Z)) \mid \forall (U_j)_{j\in\mathcal{N}} \in \mathbb{U}^{\mathcal{N}} \ \forall U \in \mathbb{M}(\Omega, Z)\\ (((U_j)_{j\in\mathcal{N}} \Downarrow U) \Longrightarrow ((\mathbf{\Gamma}(U_j))_{j\in\mathcal{N}} \Downarrow \mathbf{\Gamma}(U)))\}.\end{aligned} \tag{5.2}$$

Предложение 5.1. *Если* $\mathbb{U} \in \mathfrak{Z} \cap \mathfrak{C}$ *и* $\alpha^0 \in \mathbb{U}$, *то* $\mathbf{\Gamma}^\infty(\alpha^0) = (na)[\alpha^0]$.

Доказательство повторяет фактически рассуждение ([29], сс. 326, 327) (см. также [24], [25]) и является весьма очевидным следствием определений (5.1), (5.2). Итак (см. теорему 3.1 и предложение 5.1), справедлива

Теорема 5.1. *Пусть* $\exists \mathbb{U} \in \mathfrak{Z} \cap \mathfrak{C} : \alpha^0 \in \mathbb{U}$. *Тогда эквивалентны следующие три утверждения:*

1) $(\mathrm{DOM})[\mathbf{\Gamma}^\infty(\alpha^0)] = \Omega$;
2) $\mathbf{\Gamma}^\infty(\alpha^0) \in Q^0$;
3) $Q^0 \neq \emptyset$.

Естественные конкретизации теоремы 5.1 связаны с оснащением Y топологией, превращающей это множество в хаусдорфово топологическое пространство (ТП). Пусть до конца этого раздела τ — хаусдорфова топология Y: (Y,τ) — хаусдорфово ТП. Через $\otimes^X(\tau)$ обозначаем топологию множества Y^X, соответствующую тихоновскому произведению экземпляров ТП (Y,τ) с индексным множеством X ([31], [32]). Введем топологию

$$\vartheta = \otimes^X(\tau)|_Z \tag{5.3}$$

множества Z, индуцированную [31], [32] в Z из ТП

$$(Y^X, \otimes^X(\tau)). \tag{5.4}$$

Итак, (5.3) есть топология поточечной сходимости в Z ([31], с. 283). Разумеется,

$$(Z,\vartheta) \tag{5.5}$$

есть подпространство ТП (5.4). Через $\mathbb{K}$ (через $\mathcal{K}$) обозначаем семейство всех компактных ([32], с. 196) (секвенциально компактных) в ТП (5.5) подмножеств множества Z. Разумеется, (5.5) — хаусдорфово ТП, а множества из $\mathbb{K}$ являются каждое компактом ([29], с. 343) в топологии, индуцированной из ТП (5.5). При этом (см. [29], с. 343)

$$(\mathbb{K}^\Omega \in \mathfrak{Z} \cap \mathfrak{C}) \& (\mathcal{K}^\Omega \in \mathfrak{Z} \cap \mathfrak{C}).$$

Как следствие, из предложения 5.1 получаем (см. [29], с. 344)

Предложение 5.2. *Если* $\alpha^0 \in \mathbb{K}^\Omega$, *то* $\mathbf{\Gamma}^\infty(\alpha^0) = (na)[\alpha^0] \in \mathbb{K}^\Omega$. *Если же* $\alpha^0 \in \mathcal{K}^\Omega$, *то* $\mathbf{\Gamma}^\infty(\alpha^0) = (na)[\alpha^0] \in \mathcal{K}^\Omega$.

Теорема 5.2. *Если* $\alpha^0 \in \mathbb{K}^\Omega$ *или* $\alpha^0 \in \mathcal{K}^\Omega$, *то эквивалентны утверждения* 1), 2), 3) *теоремы* 5.1.

Итак, если мультифункция α^0 компактнозначна (в смысле ТП (5.5)) или принимает своими значениями только секвенциально компактные подмножества Z, то

$$(\mathrm{DOM})[\mathbf{\Gamma}^\infty(\alpha^0)] = \Omega$$

является необходимым и достаточным условием для разрешимости исходной задачи в классе многозначных квазистратегий (см. [29], теорему 6.10.2, которая доставляет еще одну "топологическую" детализацию теоремы 5.1). Итак, при очень общих условиях прямая версия МПИ (4.4)–(4.8) доставляет необходимые и достаточные условия разрешимости исходной задачи в классе многозначных квазистратегий.

6. Пример задачи управления

Рассмотрим на содержательном уровне задачу ([29], § 6.12) как частный случай постановки раздела 3. Здесь и ниже $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $n \in \mathcal{N}$ и $\mathbb{R}_n$ — n-мерное арифметическое пространство. Фиксируем $t_0 \in \mathbb{R}$ и $\vartheta_0 \in]t_0, \infty[$. На промежутке $\mathbf{I} \triangleq [t_0, \vartheta_0]$ рассматриваются управляемые системы

$$\dot{p} = f(t,p) + B(t)u, \quad u \in P_*; \tag{6.1}$$

$$\dot{q} = g(t,q) + C(t)v, \quad v \in Q_*. \tag{6.2}$$

Полагаем, что в (6.1), (6.2) множества P_* и Q_* являются непустыми выпуклыми компактами в конечномерных арифметических пространствах. Через $\|\cdot\|$ обозначаем евклидову норму в

$\mathbb{R}_n$. Относительно (6.1), (6.2) полагаем выполненными традиционные условия, гарантирующие существование, единственность и продолжимость решений, понимаемых в смысле Каратеодори. Полагаем, что (6.1) — система участника I (игрока I), а (6.2) — система участника II (игрока II). Для любой пары

$$p(\cdot) = (p(t),\ t_0 \le t \le \vartheta_0), \quad q(\cdot) = (q(t),\ t_0 \le t \le \vartheta_0)$$

траекторий систем (6.1), (6.2) определяем исход в терминах события

$$\{t \in \mathbf{I} \,|\, \|p(t) - q(t)\| \le \varepsilon\} \ne \emptyset, \tag{6.3}$$

где $\varepsilon \in [0, \infty[$ задано априори; осуществление (6.3) — цель участника I; ее достижению препятствует участник II. Пусть информация игрока I о траектории игрока II является неполной: формирование $p(\cdot)$ осуществляется некоторым неупреждающим способом по сигналу, поступающему от системы (6.2).

Уточним постановку задачи. Полагаем, что f и g — непрерывные n-вектор-функции на $\mathbf{I}\times\mathbb{R}_n$, а B и C суть непрерывные покомпонентно матриканты на $\mathbf{I}$ (рассматриваем далеко не самый общий случай; более общие условия см., напр., в [33]). Пусть функции f и g удовлетворяют каждая локальному условию Липшица по фазовой переменной; наконец, постулируем в отношении этих функций традиционное условие подлинейного роста по фазовой переменной. В этой связи (см. [4], с. 38) условия такого рода приведены также в [3], [5], [6] и в других работах. При наших предположениях не требуется применять скользящие режимы, подобные [34]: для обеспечения требуемых условий компактности пучков достаточны классы борелевских управлений. Через $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ обозначаем множества всех борелевских функций из $\mathbf{I}$ в P_* и Q_* соответственно. Пусть начальное состояние системы (6.1) фиксировано $p(t_0) = p_0 \in \mathbb{R}_n$. Тогда множество $\mathbf{P}$ всех траекторий (6.1), порожденных управлениями $U \in \mathcal{U}$ из позиции (t_0, p_0) есть компакт в топологии $\mathbf{t}$ равномерной сходимости множества $\mathbb{C}_n(\mathbf{I})$ всех непрерывных отображений из $\mathbf{I}$ в $\mathbb{R}_n$.

Относительно начального состояния $q(t_0)$ системы (6.2) известно только , что оно является точкой заданного компакта $\mathbb{Q}_0$, $\mathbb{Q}_0 \subset \mathbb{R}_n$. Таким образом, система (6.1) может столкнуться с реализацией любой траектории из пучка $\mathbf{Q}$, определяемого следующим образом: $\mathbf{Q}$ есть def множество всех траекторий системы (6.2), порожденных управлениями $V \in \mathcal{V}$ из начальных состояний $q(t_0) \in \mathbb{Q}_0$; $\mathbf{Q}$ есть компакт в $(\mathbb{C}_n(\mathbf{I}), \mathbf{t})$.

Фактором, осложняющим деятельность игрока I, оперирующего системой (6.1), является неполнота информации о траектории $q = q(\cdot)$ системы (6.2). Полагаем заданным параметр точности $\delta \in [0, \infty[$, характеризующий возможное несовершенство измерительных приборов. Как следствие, по мере развития процесса игрок I узнает, вообще говоря, не истинную траекторию q, а всего лишь некоторую функцию

$$q^* : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R}_n, \tag{6.4}$$

для которой выполняется

$$\|q(t) - q^*(t)\| \le \delta \ \ \forall t \in \mathbf{I}. \tag{6.5}$$

Формирование сигнала q^* осуществляется в темпе реального времени. Итак, на q действует аддитивная помеха канала измерения, ограниченная по норме константой δ, $\delta \ge 0$. Располагая в момент $t \in \mathbf{I}$ уже "случившимся" фрагментом $q_t^* = (q(\xi);\ t_0 \le \xi \le t)$, игрок I стремится к такому формированию управления и, следовательно, траектории системы (6.1), при котором осуществлялось бы (6.3) для всех возможных при данном способе управления траекторий p, q.

Рассмотрим сейчас вариант общей модели, обслуживающий нашу конкретную постановку. Пусть

$$X = \mathbf{I}, \quad Y = \Upsilon = E = \mathbb{R}_n, \quad Z = \mathbf{P}, \quad \mathbb{E} = \mathbf{Q}. \tag{6.6}$$

Полагаем, что M (3.1) есть (при условиях (6.6)) множество всех $(p, q) \in \mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ таких, что имеет место (6.3); при этом $\mathbf{P} \times \mathbf{Q} = Z \times \mathbb{E}$. Определяем Λ (3.2), полагая (см.(6.6)) при $q \in \mathbf{Q}$, что $\Lambda(q)$ есть множество всех функций q^* (6.4), для каждой из которых выполнено (6.5). Как следствие, по правилу (3.3) получаем множество Ω. Разумеется, в нашем случае мультифункция $\mathbb{L}$ (3.5) определяется правилом: при $\omega = q^* \in \Omega$ имеем $\mathbb{L}(\omega)$ в виде множества всех $q \in \mathbf{Q}$ таких, что выполнено (6.5). В этих терминах реализуется мультифункция α^0 в виде отображения из Ω в $\mathcal{P}(Z) = \mathcal{P}(\mathbf{P})$. Наконец, пусть

$$\mathcal{X} = \{[t_0, t] : t \in \mathbf{I}\};$$

получаем (в терминах (3.8)) обычное определение неупреждающих мультифункций. Наша конкретизация естественным образом характеризуется оснащением (5.3), (5.5): имеем топологию поточечной сходимости множества $Z = \mathbf{P}$. Наряду с (5.3) введем топологию θ равномерной сходимости в $\mathbf{P}$; тогда $(\mathbf{P}, \theta)$ — компакт, являющийся подпространством $(\mathbb{C}_n(\mathbf{I}), \mathbf{t})$.

Всюду в дальнейшем рассматриваем конкретизацию общей модели, связанную с (6.6), представлением множества M в терминах (6.3) и отображения Λ — в терминах (6.5). Заметим, что для всякого сигнала $q^* \in \Omega$ множество $\mathbb{L}(q^*)$, определяемое в (6.5), является компактом в топологии $\mathbf{t}$.

Предложение 6.1. *При всяком $q^* \in \Omega$ множество $\alpha^0(q^*)$ компактно в ТП $(\mathbf{P}, \theta)$, т. е. компактно в топологии равномерной сходимости.*

Доказательство. Фиксируем q^* и рассмотрим множество $\alpha^0(q^*) \in \mathcal{P}(\mathbf{P})$. Покажем, что оно (как подмножество $\mathbb{C}_n(\mathbf{I})$) замкнуто в топологии $\mathbf{t}$. С этой целью введем (нормируемую) метрику $\rho : \mathbb{C}_n(\mathbf{I}) \times \mathbb{C}_n(\mathbf{I}) \longrightarrow [0, \infty[$ равномерной сходимости, полагая при $u \in \mathbb{C}_n(\mathbf{I})$ и $v \in \mathbb{C}_n(\mathbf{I})$

$$\rho(u, v) \triangleq \max_{t \in \mathbf{I}} \|u(t) - v(t)\|.$$

Топология $\mathbf{t}$ порождена метрикой ρ, а замыкание F множества $\alpha^0(q^*)$ в этой топологии совпадает с секвенциальным замыканием этого множества. Пусть $p^0 \in F$. Подберем последовательность $(p_i^0)_{i \in \mathcal{N}}$ в множестве $\alpha^0(q^*)$, сходящуюся к p^0 в топологии $\mathbf{t}$ и, следовательно, равномерно, т. е. в метрике ρ. Напомним, что $p^0 \in \mathbf{P}$, т. к. $\mathbf{P}$ замкнуто в топологии $\mathbf{t}$. Пусть $e \in \mathbb{L}(q^*)$. Тогда по определению α^0 имеем (см. (3.7)), что $(p_i^0, e) \in M \quad \forall i \in \mathcal{N}$. Это означает, что $T_i \triangleq \{t \in \mathbf{I} \mid \|p_i^0(t) - e(t)\| \le \varepsilon\} \ne \emptyset \quad \forall i \in \mathcal{N}$. Выберем последовательность $(t_i)_{i \in \mathcal{N}} \in \prod\limits_{i \in \mathcal{N}} T_i$, которую без ограничения общности можно считать сходящейся к некоторой точке $t_* \in \mathbf{I}$. При этом

$$\begin{aligned} \big| \|p_i^0(t_i) - e(t_i)\| - \|p^0(t_*) - e(t_*)\| \big| \le \|(p_i^0(t_i) - e(t_i)) - (p^0(t_*) - e(t_*))\| \le \\ \le \|p_i^0(t_i) - p^0(t_*)\| + \|e(t_i) - e(t_*)\| \le \|p_i^0(t_i) - p^0(t_i)\| + \\ + \|p^0(t_i) - p^0(t_*)\| + \|e(t_i) - e(t_*)\| \le \rho(p_i^0, p^0) + \|p^0(t_i) - p^0(t_*)\| + \|e(t_i) - e(t_*)\| \quad \forall i \in \mathcal{N}. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Последовательность, определяемая выражением в правой части (6.7), сходится к нулю. Итак, $(\|p_i^0(t_i) - e(t_i)\|)_{i \in \mathcal{N}} \longrightarrow \|p^0(t_*) - e(t_*)\|$. Имеем по определению T_i, $i \in \mathcal{N}$, неравенство $\|p^0(t_*) - e(t_*)\| \le \varepsilon$. Итак, свойство (6.3) имеет место при $p = p^0$ и $q = e$. По определению M (в рассматриваемом конкретном случае) имеем $(p^0, e) \in M$. Поскольку выбор e был произвольным, то в силу (3.7) $p^0 \in \alpha^0(q^*)$. Вложение $F \subset \alpha^0(q^*)$, а значит, и совпадение $\alpha^0(q^*) = F$ установлены. Следовательно, $\alpha^0(q^*)$ замкнуто в топологии $\mathbf{t}$ и является подмножеством $\mathbf{P}$. Тогда $\alpha^0(q^*)$ замкнуто в компакте $(\mathbf{P}, \theta)$ и, следовательно, компактно в $(\mathbf{P}, \theta)$. □

Отметим, что топология ϑ^* поточечной сходимости множества $\mathbb{C}_n(\mathbf{I})$ слабее топологии $\mathbf{t}$, т. е. $\vartheta^* \subset \mathbf{t}$. Поэтому каждое подмножество $\mathbb{C}_n(\mathbf{I})$, компактное в топологии $\mathbf{t}$, оказывается компактным и в топологии ϑ^*. Из предложения 6.1 имеем, в частности, что отображение α^0 компактнозначно в смысле $\mathbf{t}$, т. к. θ есть топология $\mathbf{P}$, индуцированная из $(\mathbb{C}_n(\mathbf{I}), \mathbf{t})$. Таким образом, α^0 компактнозначно и в смысле топологии ϑ^*. В терминах раздела 5 имеем свойство $\alpha^0 \in \mathbb{K}^\Omega$, т. к. (Z, ϑ) — подпространство $(\mathbb{C}_n(\mathbf{I}), \vartheta^*)$. Итак, в нашей конкретной задаче можно использовать теорему 5.2.

Литература

1. Айзекс Р. *Дифференциальные игры.* – М.: Мир, 1967. – 479 с.
2. Красовский Н.Н. *Игровые задачи о встрече движений.* – М.: Наука, 1970. – 420 с.
3. Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры.* – М.: Наука, 1974. – 456 с.
4. Красовский Н.Н. *Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата.* – М.: Наука, 1985. – 518 с.
5. Субботин А.И. *Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби.* – М.: Наука, 1991. – 215 с.
6. Субботин А.И., Ченцов А.Г. *Оптимизация гарантии в задачах управления.* – М.: Наука, 1981. – 287 с.
7. Понтрягин Л.С. *К теории дифференциальных игр* // УМН. – 1966. – Т. 21. – № 4. – С. 219–274.
8. Понтрягин Л.С., Мищенко Е.Ф. *Задача об убегании одного управляемого объекта от другого* // ДАН СССР. – 1969. – Т. 189. – № 4. – С. 721–723.
9. Пшеничный Б.Н. *Структура дифференциальных игр* // ДАН СССР. – 1969. – Т. 184. – № 2. – С. 285–287.
10. Куржанский А.Б. *Управление и наблюдение в условиях неопределенности.* – М.: Наука, 1977. – 390 с.
11. Osipov Yu.S. *An informative game problem* // Optimization Techniques IFIP Technical Conference. – 1975. – V. 27. – P. 482–486.
12. Кряжимский А.В. *Альтернатива в линейной игре сближения-уклонения с неполной информацией* // ДАН СССР. – 1976. – Т. 230. – № 4. – С. 773–776.
13. Куржанский А.Б. *Оптимальные системы сочетания управления и наблюдения* // ПММ. – 1974. – Т. 38. – № 1. – С. 12–24.
14. Ченцов А.Г. *О структуре одной игровой задачи сближения* // ДАН СССР. – 1975. – Т. 224. – № 6. – С. 1272–1275.
15. Ченцов А.Г. *Об игровой задаче сближения в заданный момент времени* // Матем. сб. – 1976. – Т. 99. – № 3. – С. 394–420.
16. Ченцов А.Г. *К игровой задаче наведения* // ДАН СССР. – 1976. – Т. 226. – № 1. – С. 73–76.
17. Ченцов А.Г. *К игровой задаче наведения с информационной памятью* // ДАН СССР. – 1976. – Т. 227. – № 2. – С. 306–308.
18. Чистяков С.В. *К решению игровых задач преследования* // ПММ. – 1977. – Т. 41. – № 5. – С. 825–832.
19. Ченцов А.Г. *Метод программных итераций для дифференциальной игры сближения-уклонения.* – Ин-т матем. и механ. Уральск. науч. центра АН СССР. – Свердловск, 1979. – 102 с. – Деп. в ВИНИТИ 04.06.79, № 1933-79.
20. Эдвардс Р. *Функциональный анализ. Теория и приложения.* – М.: Мир, 1969. – 1071 с.
21. Серов В.П. *Итерационные конструкции в одной информационной игровой задаче* // Тез. докл. III Всесоюзн. школы "Понтрягинские чтения. Оптимальное управление, геометрия и анализ". – Кемеровск. ун-т, 1990. – С. 198.
22. Ченцов А.Г. *К вопросу об итерационной реализации неупреждающих многозначных отображений* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 3. – С. 66–76.
23. Chentsov A.G. *Non-anticipating selectors of set-valued mapping and iterated procedures* // Functional Differential Equations. – 1999. – № 3–4. – P. 249–274.
24. Ченцов А.Г. *Неупреждающие многозначные отображения и их построение с помощью метода программных итераций.* I // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37. – № 4. – С. 470–480.
25. Ченцов А.Г. *Неупреждающие многозначные отображения и их построение с помощью метода программных итераций.* II // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37. – № 5. – С. 679–688.
26. Roxin E. *Axiomatic approach in differential games* // J. Optimiz. Theory and Appl. – 1969. – V. 3. – № 3. – P. 153–163.

27. Elliott R.J., Kalton N.J. *The existence of value in differential games* // Memoirs of the Amer. Math. Soc. – 1972. – № 126. – 67 p.
28. Varaiy P., Lin J. *Existence of saddle points in differential games* // SIAM J. Control. – 1969. – V. 7. – P. 141–157.
29. Chentsov A.G., Morina S.I. *Extensions and relaxations.* – Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2002. – 408 p.
30. Неве Ж. *Математические основы теории вероятностей.* – М.: Мир, 1969. – 309 с.
31. Келли Дж.Л. *Общая топология.* – М.: Наука, 1981. – 431 с.
32. Энгелькинг Р. *Общая топология.* – М.: Мир, 1986. – 751 с.
33. Варга Дж. *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями.* – М.: Наука, 1977. – 624 с.
34. Гамкрелидзе Р.В. *Основы оптимального управления.* – Тбилиси: Изд-во Тбилисск. ун-та, 1975. – 229 с.

Институт математики и механики
Уральского отделения
Российской академии наук

Поступила
25.09.2003