ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 4 (419)

УДК 519.63

Е.М. ФЕДОТОВ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДВУХСЛОЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ПАМЯТЬЮ

При решении нестационарных задач математической физики широко используются двухслойные разностные схемы (РС). Изучению различных аспектов теории таких схем посвящено множество работ. Наиболее полно изучены РС для линейных задач. В работах [1]–[4] построена общая теория корректности линейных двухслойных операторно-разностных схем (ОРС), позволяющая с единых позиций исследовать разрешимость, устойчивость и сходимость РС для эволюционных уравнений и систем.

В то же время теория корректности нелинейных РС развита существенно слабее. Отметим работы [5]–[14], где доказаны теоремы о корректности некоторых видов нелинейных двухслойных РС для параболических уравнений. В [15]–[16] исследована корректность двухслойных нелинейных ОРС, в которых "пространственный" оператор представим в виде суперпозиции пары операторов с различными свойствами. Такое представление позволило сформулировать условия корректности достаточно широкого класса РС как для уравнений параболического, так и гиперболического типов. В настоящей работе проводится исследование корректности системы операторных уравнений, частным случаем которой является ОРС, изученная в [15]. РС такого вида могут быть использованы при решении широкого класса задач с "памятью".

Доказанная в работе теорема о корректности системы операторных уравнений применяется для исследования разрешимости и сходимости РС для системы уравнений двумерной гидродинамики в лагранжевой системе координат.

1. Корректность двухслойных ОРС

Пусть $H = H_h = H_{1,h} \otimes H_{2,h}$ — семейство конечномерных евклидовых пространств, зависящих от параметра h, элемента конечномерного пространства с нормой $|h| > 0$, $\overline{\omega}_\tau = \{0, \tau, 2\tau, \dots, T\}$ — сетка на отрезке $[0,T]$, $X = X_{\tau h} = \{(v(t), \chi(t)) \in H,\ t \in \overline{\omega}_\tau\}$ — пространство вектор-функций, определенных на отрезке $\overline{\omega}_\tau$, со значениями в пространстве H.

Рассмотрим ОРС вида

$$\begin{cases} y_t + A(\chi^{(\sigma)}, \tilde{D}(y,\hat{y})) = \varphi(t), \\ \chi_t = P(\chi^{(\sigma)}, \tilde{D}(y,\hat{y})), \end{cases} \qquad t \in \omega_\tau = \overline{\omega}_\tau \backslash \{T\}, \quad y(0) = y_0, \quad \chi(0) = x_0, \tag{1}$$

где $\sigma \in [0,1]$ — числовой параметр, вес слоя, $v^{(\sigma)} = \sigma\hat{v} + (1-\sigma)v$, $\hat{v}(t) = v(t+\tau)$, $\tilde{D}(y,v) = \int_0^1 D(\sigma\hat{v} + (1-\sigma)y)d\sigma$, $(y,\chi) \in X$, $(y_0, x_0) \in H$, D — нелинейный оператор из H_1 в H_1, A и P — нелинейные операторы, действующие в пространстве H, со значениями в H_1 и H_2 соответственно.

Частным случаем ОРС (1) являются ОРС, изученные в [12], [15], [16].

Исследуем корректность ОРС (1).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 95-01-00400).

Обозначим через u фиксированный элемент из X_1, $X_\alpha = \{v(t) \in H_\alpha, t \in \overline{\omega}_\tau\}$ и определим элемент $u_x \in X_2$ как решение задачи

$$u_{x,t} = P(u_x^{(\sigma)}, \tilde{D}(u, \hat{u})), \quad t \in \omega_\tau, \quad u_x(0) = x_0. \tag{2}$$

Пусть $\delta = \delta(\tau, h) > 0$, $|\cdot|$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_{(+)}$ — некоторые нормы и $(\ ,\ )_1$ — скалярное произведение в H_1, а $\|\cdot\|_2$ — норма и $(\ ,\ )_2$ — скалярное произведение в H_2. Введем в H окрестность $O_\delta(v,\chi) = O_{1,\delta}(v) \otimes O_{2,\delta}(\chi)$, $O_{\alpha,\delta}(v) = \{z \in H_\alpha : \|z - v\|_\alpha < \delta\}$, а в X — окрестность $U_\delta(v,\chi) = U_{1,\delta}(v) \otimes U_{2,\delta}(\chi)$, $U_{\alpha,\delta}(v) = \{z(t) \in O_{\alpha,\delta}(v(t)),\ t \in \overline{\omega}_\tau\}$. Всюду через c, d возможно с индексами, будем обозначать различные постоянные. Зависимость тех или иных величин от параметров τ и h, если таковая имеется, будем указывать явно. Для разностных отношений, скалярных произведений и норм будем использовать обозначения, принятые в [1], [17].

При исследовании ОРС (1) будем использовать определение корректности, аналогичное [6].

Определение 1. ОРС (1) назовем (u,δ)-корректной, если существуют $\delta_i = \delta_i(\tau,h) > 0$, $i = 1,2$, и нормы $\|\cdot\|_{(j)}$, $j = 1,2$, такие, что при выполнении неравенств $\|y_0 - u(0)\|_{(1)} \le \delta_1$, $\|\Psi\|_{(2)} \le \delta_2$ ОРС (1) имеет решение $y : \|y(t) - u(t)\|_{(1)} \le \delta$, и справедлива оценка (неравенство корректности)

$$\|y(t) - u(t)\|_{(1)} \le J(\Psi(u)) \equiv M_1 \|y(0) - u(0)\|_{(1)} + M_2 \|\Psi\|_{(2)}$$

с постоянными M_1, M_2, не зависящими от τ, h, $\Psi(u)(\hat{t}) = \varphi(\hat{t}) - A(u_x^{(\sigma)}, \tilde{D}(u,\hat{u})) - u_t$, $t \in \omega_\tau$, $\Psi(u)(0) = 0$.

Относительно операторов D, A и P будем предполагать выполненными условия:

a) оператор D дважды непрерывно дифференцируем по Фреше в $O_{1,\delta}(u^{(\xi)}(t))$ $\forall \xi \in [0,1]$, потенциален ([18], с.65) и при любых $v, v_i \in O_{1,\delta}(u^{(\xi)}(t))$, $i = 1,2$, $v_j \in H_1$, $j = 3,4$, выполнены неравенства

$$(Dv_1 - Dv_2, v_1 - v_2)_1 \ge d_1 \|v_1 - v_2\|_1^2, \tag{3}$$

$$|(D^{(1)}(v), v_3, v_4)_1| \le d_2 \|v_3\|_1 \|v_4\|_1, \tag{4}$$

$$|Dv_1 - Dv_2|^2 \le d_3 \|v_1 - v_2\|_1^2, \tag{5}$$

$$|(D^{(2)}(v) u_t v_3, v_4)_1| \le d_4 \|v_3\|_1 \|v_4\|_1$$

с постоянными $d_k > 0$, $k = \overline{1,4}$;

b) оператор A является непрерывным в $\cup_{\xi \in [0,1]} DO_{1,\delta}(u^{(\xi)}) \otimes O_{2,\delta}(u_x^{(\sigma)})$, и при $\hat{U} = \tilde{D}(u,\hat{u})$, $t \in \omega_\tau$, $U(0) = \tilde{D}(u(0), u(0))$ и любых $v, v_2 \in O_{2,\delta}(u_x^{(\sigma)})$, $v_1 \in DO_{1,\delta}(u^{(\xi)})$, $\xi \in [0,1]$, $v \in H_2$ выполнены неравенства

$$d_6 (A(v,v_1) - A(v,U), v_1 - U)_1 + d_5 |v_1 - U|^2 \ge \|v_1 - U\|_{(+)}^2, \quad d_5 \ge 0, \quad d_6 > 0, \tag{6}$$

$$|(A(v,U) - A(v_2,U), v_3)_1| \le d_7 \|v_3\|_{(+)} \|v - v_2\|_2, \quad d_7 \ge 0; \tag{7}$$

c) оператор P при $v, v_1 \in O_{2,\delta}(u_x^{(\sigma)})$, $v_2, v_3 \in DO_{1,\delta}(u^{(\xi)})$ удовлетворяет неравенствам

$$\|P(v_1,v_2) - P(v,v_2)\|_2 \le d_8 \|v_1 - v\|_2,$$
$$\|P(v_1,v_2) - P(v_1,v_3)\|_2 \le d_8 \|v_2 - v_3\|_{(+)}, \quad d_8 \ge 0. \tag{8}$$

Теорема. *Пусть при* $\tau \le \tau_0$, $h \le h_0$ *выполнены неравенства* (3)–(8), *тогда ОРС* (1) (u,δ)-*корректна, причем неравенство корректности имеет вид*

$$\max_{t \in \overline{\omega}_\tau} \|y(t) - u(t)\|_1 + \max_{t \in \overline{\omega}_\tau} \|\chi(t) - u_x(t)\|_{(+)} \le J(\Psi(u)),$$

$$J(\Psi(u)) \equiv \left\{ M \left[\sum_{t \in \omega_\tau} \tau \|\Psi(u)(\hat{t})\|_{(-)}^2 + \|y(0) - u(0)\|_1^2 \right] \right\}^{1/2},$$

$M = d_1^{-1} d_6 G(T) G_1(T)$, $G_1(t) = \exp(c_1/(1-c_1\tau_0)t)/(1-c_1\tau_0)$, $G(t) = c_2\exp(c_2 t)$, $c_1 = \max\{d_1^{-1}(d_4 + d_3 d_5 d_6^{-1}),\ 4G^2(T)T d_6^2 d_7^2\}$, $c_2 = d_8/(1-d_8\sigma\tau_0)$, $\|\psi\|_{(-)} = \sup_{z\neq 0} |(z,\psi)|/\|z\|_{(+)}$.

При доказательстве теоремы потребуются следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия теоремы и ОРС* (1) *имеет решение* $(y,\chi) \in U_\delta(u,u_x)$. *Тогда при всех* $t \in \overline{\omega}_\tau$ *верны неравенства*

$$d_1\|z(t)\|_1^2 \leq 2F(z)(t) \leq r(t-\tau), \qquad d_6^{-1}\sum_{t'=0}^{t}\tau\|\tilde{D}(y,\tilde{y}) - \tilde{D}(u,\tilde{u})\|_{(+)}^2 \leq r(t), \tag{9}$$

$$r(t) = G_1(t)\left[\sum_{t'=0}^{t} d_6\tau\|\psi(t')\|_{(-)}^2 + 2F(z)(0)\right], \qquad F(z) = \int_0^1\int_0^1 (D^{(1)}(u+\beta\xi z)\xi z, z)_1 d\xi\, d\beta,$$

$$z = y - u.$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы* 1, *тогда при всех* $t \in \overline{\omega}_\tau$ *верно неравенство*

$$\|\chi(t) - x(t)\|_2 \leq G(t-\tau)\sum_{t'=0}^{t-\tau}\tau\|\tilde{D}(y,\hat{y}) - \tilde{D}(u,\hat{u})\|_{(+)}(t'). \tag{10}$$

Лемма 3. *Пусть* H *— конечномерное евклидово пространство,* $\|\cdot\|$ *— некоторая норма в нем,* P *— непрерывное отображение* H *в себя и* D *— дифференцируемое отображение, удовлетворяющее при некоторых* $u,\hat{u} \in H$, $\delta > 0$ *и любых* $v, v_1, v_2 \in O_\delta(u^{(\xi)})$, $\xi \in [0,1]$, *неравенствам*

$$(Dv_1 - Dv_2, v_1 - v_2) \geq \alpha\|v_1 - v_2\|^2, \quad |(D^{(1)}(v)v_1, v_2)| \leq \beta\|v_1\|\|v_2\|, \quad \beta \geq \alpha > 0.$$

Пусть далее при некотором $\rho \in (0,\delta)$ *и любых* $\eta,\xi : \|\eta\| = \rho$, $\|\xi\| < \alpha\rho\beta^{-1}$ *имеет место неравенство*

$$(P(\eta), \tilde{D}(\overline{\eta},\overline{\xi}) - \tilde{D}(u,\hat{u})) \geq 0,$$

где $\overline{\eta} = \hat{u}+\eta$, $\overline{\xi} = u+\xi$, $\tilde{D}(v,w) = \int_0^1 D(v+\sigma(v-w))d\sigma$. *Тогда найдется такой элемент* $\eta \in O_{2,\rho}(u)$, *что* $P(\eta) = 0$.

Лемма 3 известна [15].

Доказательство леммы 2. Отметим, что первое из неравенств (8) обеспечивает сжимаемость в $O_{2,\delta}(u_x)$ оператора $S(\hat{\chi}) = \tau P(\sigma\hat{\chi} + (1-\sigma)\chi, v)$ при любом $v \in DO_{1,\delta}(u^{(\xi)})$, $\xi \in [0,1]$, и тем самым обеспечивает разрешимость уравнения

$$\hat{\chi} = \chi + \tau P(\chi^{(\sigma)}, \tilde{D}(y,\hat{y})) \tag{11}$$

при любых $y \in O_{1,\delta}(u(t))$, $\hat{y} \in O_{1,\delta}(\hat{u}(t))$, $\chi \in O_{2,\delta}(u_x(t))$.

Вычтем (2) из (11). Обозначив через ζ разность χ и u_x и взяв от обеих частей полученного равенства норму $\|\cdot\|_2$, будем иметь

$$\|\hat{\zeta}\|_2 \leq \|\zeta + \tau P(\chi^{(\sigma)}, \tilde{D}(y,\hat{y})) - \tau P(u_x^{(\sigma)}, \tilde{D}(u,\hat{u}))\|_2.$$

Пользуясь неравенством треугольника для оценки правой части в этом неравенстве, а затем (8), получим

$$\|\hat{\zeta}\|_2 \leq \|\zeta\|_2 + \tau d_8(\|\zeta^{(\sigma)}\|_2 + \|\tilde{D}(y,\hat{y}) - \tilde{D}(u,\hat{u})\|_{(+)}),$$

откуда при $\tau < \tau_0$, $1 - \tau_0 d_8 > 0$ следует

$$\|\hat{\zeta}\|_2 \leq \frac{1+\tau d_8(1-\sigma)}{1-\tau d_8\sigma}\|\zeta\|_2 + \frac{\tau d_8}{1-\tau d_8\sigma}\|\tilde{D}(y,\hat{y}) - \tilde{D}(u,\hat{u})\|_{(+)}, \quad t \in \omega_\tau.$$

Разрешая последнее неравенство относительно $\|\zeta\|_2$, учитывая при этом, что $\chi(0) = u_x(0) = x_0$, будем иметь (10). Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 1. Для $z = y - u$ имеем

$$z_t + A(\chi^{(\sigma)}, \tilde{D}(y,\hat{y})) - A(u_x^{(\sigma)}, \tilde{D}(u,\hat{u})) = \hat{\psi}(t), \quad t \in \omega_\tau, \qquad (12)$$
$$z(0) = y_0 - u(0), \quad \psi(t) = \Psi(u)(t).$$

Умножим (12) скалярно в H_1 на $2\tau(\tilde{D}(y,\hat{y}) - \tilde{D}(u,\hat{u}))$, получим

$$2\tau(\tilde{D}(y,\hat{y}) - \tilde{D}(u,\hat{u}), z_t)_1 + 2\tau(A(\chi^{(\sigma)}, \tilde{D}(y,\hat{y})) -$$
$$- A(u_x^{(\sigma)}, \tilde{D}(u,\hat{u})), \tilde{D}(y,\hat{y}) - \tilde{D}(u,\hat{u}))_1 = 2\tau(\hat{\psi}(t), \tilde{D}(y,\hat{y}) - \tilde{D}(u,\hat{u}))_1. \quad (13)$$

Преобразуем и оценим слагаемые в (13). Второе слагаемое преобразуем к виду

$$II = 2\tau(A(\chi^{(\sigma)}, \tilde{D}(y,\hat{y})) - A(\chi^{(\sigma)}, \tilde{D}(u,\hat{u})), \tilde{D}(y,\hat{y}) - \tilde{D}(u,\hat{u}))_1 +$$
$$+ 2\tau(A(\chi^{(\sigma)}, \tilde{D}(u,\hat{u})) - A(u_x^{(\sigma)},\ \tilde{D}(u,\hat{u})), \tilde{D}(y,\hat{y}) - \tilde{D}(u,\hat{u}))_1,$$

а затем оценим, пользуясь (6) и (7),

$$II \ge 2\tau d_6^{-1}\|\tilde{D}(y,\hat{y}) - \tilde{D}(u,\hat{u})\|_{(+)}^2 - 2\tau d_5 d_6^{-1}|\tilde{D}(y,\hat{y}) - \tilde{D}(u,\hat{u})|^2 -$$
$$- 2\tau d_7\|\tilde{D}(y,\hat{y}) - \tilde{D}(u,\hat{u})\|_{(+)}\|\chi^{(\sigma)} - u_x^{(\sigma)}\|_2,$$

откуда после применения ε-неравенства приходим к неравенству

$$II \ge 2\tau d_6^{-1}(1-\varepsilon)\|\tilde{D}(y,\hat{y}) - \tilde{D}(u,\hat{u})\|_{(+)}^2 - 2\tau d_5 d_6^{-1}|\tilde{D}(y,\hat{y}) - \tilde{D}(u,\hat{u})|^2 -$$
$$- \tau(2\varepsilon)^{-1} d_7^2 d_6 \|\chi^{(\sigma)} - u_x^{(\sigma)}\|_2^2, \quad \varepsilon > 0. \quad (14)$$

В силу леммы 2 при оценке нормы $\chi^{(\sigma)} - u_x^{(\sigma)}$ и (5) при оценке второго слагаемого в (14) будем иметь

$$II \ge 2\tau d_6^{-1}(1 - \varepsilon - (2\varepsilon)^{-1}\tau d_6^2 d_7^2 G^2(t)t)\|\tilde{D}(y,\hat{y}) - \tilde{D}(u,\hat{u})\|_{(+)}^2 -$$
$$-\varepsilon^{-1}\tau d_6 d_7^2 G^2(t)t\sum_{t'=0}^{t-\tau}\tau\|\tilde{D}(y,\hat{y}) - \tilde{D}(u,\hat{u})\|_{(+)}^2 - 2\tau d_5 d_6^{-1}|\tilde{D}(y,\hat{y}) - \tilde{D}(u,\hat{u})|^2 \ge$$
$$\ge 2\tau d_6^{-1}(1 - (2\varepsilon)^{-1}\tau d_6^2 d_7^2 \tau_0 G^2(T)T)\|\tilde{D}(y,\hat{y}) - \tilde{D}(u,\hat{u})\|_{(+)}^2 -$$
$$-\varepsilon^{-1}\tau d_6 d_7^2 G^2(T)T\sum_{t'=0}^{t-\tau}\tau\|\tilde{D}(y,\hat{y}) - \tilde{D}(u,\hat{u})\|_{(+)}^2 - \tau d_5 d_6^{-1} d_3[\|\hat{z}\|_1^2 + \|z\|_1^2]. \quad (15)$$

Слагаемое в правой части (13) оценим с помощью неравенства Коши-Буняковского

$$2\tau|(\hat{\psi}, \tilde{D}(y,\hat{y}) - \tilde{D}(u,\hat{u}))_1| \le 2\tau\|\hat{\psi}\|_{(-)}\|\tilde{D}(y,\hat{y}) - \tilde{D}(u,\hat{u})\|_{(+)} \le$$
$$\le 2\tau\varepsilon_1 d_6^{-1}\|\tilde{D}(y,\hat{y}) - \tilde{D}(u,\hat{u})\|_{(+)}^2 + \tau d_6/2\varepsilon_1\|\hat{\psi}\|_{(-)}^2. \quad (16)$$

Используя полученную в [15] оценку

$$2\tau(\tilde{D}(y,\hat{y}) - \tilde{D}(u,\hat{u}), z_t)_1 \ge 2\tau(F(z))_t - 2\tau d_4[\|\hat{z}\|_1^2 + \|z\|_1^2]$$

для первого слагаемого в (13), а также (15) и (16), будем иметь

$$2\tau(F(z)(t^*))_t - \tau(d_4 + d_3 d_5 d_6^{-1}[\|\hat{z}\|_1^2 + \|z\|_1^2] +$$
$$+2\tau d_6^{-1}(1 - \varepsilon - (2\varepsilon)^{-1} d_6^2 d_7^2 \tau_0 G^2(T)T - \varepsilon_1)\|\tilde{D}(y,\hat{y}) - \tilde{D}(u,\hat{u})\|_{(+)}^2 -$$
$$-\varepsilon^{-1} d_7^2 d_6 G^2(T)T\tau\sum_{t'=0}^{t-\tau}\tau\|\tilde{D}(y,\hat{y}) - \tilde{D}(u,\hat{u})\|_{(+)}^2 \le d_6\tau/2\varepsilon_1\|\hat{\psi}\|_{(-)}^2. \quad (17)$$

Просуммируем (17) по t от 0 до $t^*-\tau$, придем к неравенству

$$2F(z)(t^*)+2d_6^{-1}(1-\varepsilon-(2\varepsilon)^{-1}d_6^2d_7^2\tau_0G^2(T)T-\varepsilon_1)\sum_{t=0}^{t^*-\tau}\tau\|\tilde D(y,\hat y)-\tilde D(u,\hat u)\|^2_{(+)}\leq$$
$$\leq \varepsilon d_7^{-1}d_6G^2(T)T\sum_{t=0}^{t^*-\tau}\tau\sum_{t'=0}^{t-\tau}\tau\|\tilde D(y,\hat y)-\tilde D(u,\hat u)\|^2_{(+)}+$$
$$+(d_4+d_3d_5d_6^{-1})\sum_{t=0}^{t^*-\tau}\tau[\|\hat z\|_1^2+\|z\|_1^2]+\sum_{t=0}^{t^*-\tau}d_6\tau/2\varepsilon_1\|\psi\|^2_{(-)}+2F(z)(0). \tag{18}$$

Выбрав в (17) $\varepsilon=\varepsilon_1=1/4$, воспользовавшись (3) для оценки слагаемых, содержащих $\|z\|_1$, неравенством

$$\|z\|_1^2\leq 2d_1^{-1}F(z),$$

вводя при этом обозначение

$$Q(t)=2F(z)+d_6^{-1}\sum_{t'=0}^{t^*-\tau}\tau\|\tilde D(y,\hat y)-\tilde D(u,\hat u)\|^2_{(+)},$$

будем иметь

$$Q(t^*)\leq c_1\sum_{t=0}^{t^*-\tau}\tau Q(t)+\left[\sum_{t=0}^{t^*-\tau}\tau d_6\|\hat\psi\|^2_{(-)}+2F(z)(0)\right]/(1-c_1\tau_0).$$

Разрешая это неравенство, приходим к (9). Лемма доказана.

Доказательство теоремы проведем индукцией по $t\in\overline{\omega}_\tau$. Пусть $J(\Psi(u))\leq\delta$. Ясно, что в этом случае $(y(0),\chi(0))\in O_\delta(u(0),u_x(0))$.

Предположим, что для всех $t\leq t^*$ уже доказано существование решения $(y(t),\chi(t))\in O_\delta(u(t),u_x(t))$ ОРС (1). Докажем, что и при $t=t^*$ в $O_\delta(\hat u(t),\hat u_x(t))$ также существует решение $(\hat y(t),\hat\chi(t))$.

Обозначим $z(t)=y(t)-u(t)$, $t\leq t^*$, $\hat z(t)=v-\hat u(t)$, $t=t^*$, $v\in O_{1,\delta}(\hat u(t))$.

Отметим прежде, что в силу леммы 2 при $t<t^*$ верны неравенства (9) и (10).

Рассмотрим выражение

$$I=(Z(\hat z),\tilde D(y,v)-\tilde D(u,\hat u))_1,$$

где $Z(\hat z)=2(v-y)+2\tau A(\sigma\hat\chi+(1-\sigma)\chi,\tilde D(y,v))-\varphi(t)$, а $\hat\chi=\hat\chi(v)\in O_\delta(\hat u_x(t))$ — решение уравнения

$$\hat\chi=\chi+\tau P(\sigma\hat\chi+(1-\sigma)\chi,\tilde D(y,v)),\quad t=t^*.$$

Полагая $D_y=\tilde D(y,v)$, $D_u=\tilde D(u,\hat u)$, имеем

$$I=2\tau(z_t,D_y-D_u)_1+2\tau(A(\chi^{(\sigma)},D_y)-A(u_x^{(\sigma)},D_u),D_y-D_u)_1-2\tau(\hat\psi,D_y-D_u)_1.$$

Проводя те же рассуждения, что и в лемме 1 при получении оценки (9), легко вывести неравенство

$$I\geq(1-c_1\tau)\left[2F(z)(\hat t)-d_6^{-1}\tau\sum_{t'=0}^{t-\tau}\tau\|D_y-D_u\|^2_{(+)}\right]-d_6\tau\|\hat\psi\|^2_{(-)}-2F(z)(0)\geq$$
$$\geq d_1(1-c_1\tau)[\|\hat z\|_1^2-r(t)/d_1(1-c_1\tau)].$$

Второе слагаемое в квадратных скобках меньше $J(\Psi(u))\leq\delta$, а следовательно, на границе шара радиуса δ имеем $I\geq 0$. В силу леммы 3 существует элемент $v=\hat y:\|\hat y-\hat u\|_1\leq\delta$, а в силу леммы 2 и элемент $\hat\chi(t)\in O_{2,\delta}(\hat u_x(t))$, удовлетворяющие уравнениям (1). Теорема доказана.

Воспользуемся результатами этого раздела для исследования сходимости разностной схемы для системы уравнений Навье-Стокса, описывающих течение вязкой сжимаемой теплопроводной жидкости.

2. Разностная схема для уравнений гидродинамики

Рассмотрим задачу о течении вязкой жидкости, занимающей начальный объем $\Omega = \{0 < x_i < 1,\ i = 1,2\}$ с границей Γ. Уравнения течения жидкости описываются системой уравнений [20]

$$\rho_0 \frac{d\eta}{dt} - |J| \nabla \vec{v} = 0, \tag{19}$$

$$\rho_0 \frac{d\vec{v}}{dt} - |J| \nabla \vec{p} = \rho_0 \vec{f}, \tag{20}$$

$$\rho_0 T \frac{ds}{dt} = |J| (\tau^{i,j} e_{i,j} + \nabla(\varkappa \nabla T)), \tag{21}$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}, \qquad x \in \Omega, \quad t \in (0, t_0), \tag{22}$$

где $(\eta, \vec{v}, s)$ — термодинамические координаты (удельный объем, скорость, удельная энтропия) точек среды, $\vec{p} = -p\delta_{i,j} + \tau^{i,j}$, $\tau^{i,j}$ — компоненты тензора вязких напряжений, $\tau^{i,j} = A^{i,j}_{\alpha,\beta}$, $e_{\alpha,\beta} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} + \dfrac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}\right)$ — компоненты тензора скоростей деформации, $|J| = \det(J)$, $J \equiv J(x) = (\partial x_i / \partial \overline{x}_j)^2_{i,j=1}$ — матрица Якоби перехода от отсчетной декартовой (лагранжевой) системы координат $\overline{x}$ к эйлеровой системе координат, $p = -\partial\varepsilon/\partial\eta$ — давление, $T = \partial\varepsilon/\partial s$ — температура, $\varepsilon = \varepsilon(\eta, s)$ — термодинамический потенциал.

Граничные и начальные условия для уравнений (19)–(22) запишем в виде

$$\vec{v} = 0, \quad T = T_\Gamma, \quad x \in \Gamma, \quad (\eta, \vec{v}, s) = (\eta_0, \vec{v}_0, s_0), \quad x = x_0 \equiv \overline{x}, \quad t = 0, \quad x \in \Omega, \tag{23}$$

где $\vec{n}$ — вектор внешней нормали к точкам границы Γ.

Будем предполагать выполненными следующие условия на исходные данные задачи:

1) матрица коэффициентов $A^{i,j}_{\alpha,\beta}$ симметрична ($A^{i,j}_{\alpha,\beta} = A^{j,i}_{\alpha,\beta}$) и положительно определена:

$$c_1 \sum_{\alpha,\beta} \xi^2_{\alpha,\beta} \geq A^{i,j}_{\alpha,\beta} \xi_{\alpha,\beta} \xi_{i,j} \geq c_0 \sum_{\alpha,\beta} \xi^2_{\alpha,\beta}, \qquad c_1 \geq c_0 > 0; \tag{24}$$

2) термодинамический потенциал $\varepsilon(y, z)$ является дважды непрерывно дифференцируемой функцией и при $1/\mu_0 \geq y \geq \mu_0 > 0$, $1/\mu_0 \geq z \geq \mu_0 > 0$ выполнены условия Бете-Вейля [21]

$$p'_\eta(y, z) < c_0 < 0, \quad T'_\eta(y, z) > c_0 > 0, \quad (\varepsilon''_{\eta\eta}\varepsilon''_{ss} - 2(\varepsilon''_{s\eta})^2)(y, z) > c_0 > 0. \tag{25}$$

Будем также предполагать, что гладкость исходных данных задачи обеспечивает существование достаточно гладкого решения при $t \in [0, t_0]$ задачи (19)–(23), при этом

$$1/\mu_0 > \eta, s > \mu_0 > 0 \ \text{ и } \ |J(x)| > c_0 > 0. \tag{26}$$

При аппроксимации уравнений (19)–(22) будем исходить из интегральных тождеств, соответствующих исходным уравнениям

$$\int_\Omega \rho_0 \frac{d\eta}{dt} w_p d\overline{x} - \int_\Omega M_{i,j} \frac{\partial v_i}{\partial \overline{x}_j} w_p d\overline{x} = 0,$$
$$\int_\Omega \rho_0 \frac{dv_i}{dt} w_i d\overline{x} - \int_\Omega M_{i,j} \frac{\partial w_i}{\partial \overline{x}_j} p d\overline{x} + \int_\Omega \frac{A^{i,j}_{\alpha,\beta}}{|J|} e^0_{\alpha,\beta}(\vec{x},\vec{v}) e^0_{i,j}(\vec{x},\vec{w}) d\overline{x} = \int_\Omega \rho_0 f_i w_i d\overline{x}, \qquad (27)$$
$$\int_\Omega \rho_0 \frac{ds}{dt} w_T d\overline{x} = \int_\Omega \frac{\varkappa}{|J|} M_{i,k} M_{i,l} \frac{\partial T}{\partial \overline{x}_k} \frac{\partial (w_T/T)}{\partial \overline{x}_l} d\overline{x} + \int_\Omega \frac{w_T A^{i,j}_{\alpha,\beta}}{|J| T} e^0_{\alpha,\beta}(\vec{x},\vec{v}) e^0_{i,j}(\vec{x},\vec{v}) d\overline{x},$$

где w_p, $\vec{w}$, w_T — произвольные достаточно гладкие функции лагранжевой переменной $\overline{x} \in \overline{\Omega}$, $\vec{w}, w_T|_\Gamma = 0$. Здесь и далее, где это не вызывает недоразумений, стрелок над векторами писать не будем. Всюду, где встречаются повторяющиеся индексы, будем предполагать суммирование от 1 до 2, символами $M_{i,j}$, $e^0_{\alpha,\beta}$ обозначены следующие величины:

$$M_{i,j}(x) = |J(x)| \frac{\partial \overline{x}_j}{\partial x_i}, \quad e^0_{\alpha,\beta}(x,v) = |J(x)| e_{\alpha,\beta}(v) = \frac{1}{2}\left(M_{\alpha,k} \frac{\partial v_\beta}{\partial \overline{x}_k} + M_{\beta,k} \frac{\partial v_\alpha}{\partial \overline{x}_k} \right). \qquad (28)$$

Покроем область Ω равномерной с шагом h сеткой $\overline{\omega}_h = \{(ih, jh),\ i,j = \overline{0,n}\}$, через Γ_h обозначим множество граничных точек сетки. Пространство сеточных функций, определенных на $\overline{\omega}_h$, обозначим через V, $\overset{0}{V}$ — подпространство сеточных функций, равных нулю на Γ_h, и $H_1 = V \otimes \overset{0}{V}{}^2 \otimes V$, $\overset{0}{H}_1 = V \otimes \overset{0}{V}{}^2 \otimes \overset{0}{V}$, $H_2 = V^2$, $\overset{0}{H}{}^2_2 = \overset{0}{V}{}^2$.

Всюду далее для упрощения выкладок положим $\rho_0 = 1$. Для обозначения квадратурных сумм, разностных отношений и др. будем использовать обозначения из [17]. При аппроксимации тождества (27) с (28) воспользуемся идеями метода сумматорных тождеств.

Обозначим через γ мультииндекс (γ_1, γ_2) со значениями $\gamma_\alpha = \pm 1$. Малыми буквами y_p, y_T, $\vec{y}_v$, $\vec{y}_x$ будем обозначать элементы следующих пространств: $y_p \in V$, $y_T \in V$, $\vec{y}_v = (y_{v,1}, y_{v,2}) \in \overset{0}{V}{}^2$, $\vec{y}_x = (y_{x,1}, y_{x,2}) \in H_2$, большие буквы при определении сеточных операторов и их свойств будут означать элементы пространства $H_1 : Y = (y_p, \vec{y}_v, y_T)$.

Определим оператор A равенством

$$\begin{aligned}(A(y_x,Y),W)_1 = \frac{1}{4}\sum_\gamma \Big\{ & -(M^\gamma_{i,j}(y_x)\partial_{\gamma,j} y_{v,i}, w_p)_\gamma + (M^\gamma_{i,j}(y_x)\partial_{\gamma,j} w_{v,i}, y_p)_\gamma + \\ & + (|J^\gamma(y_x)|^{-1} A^{i,j}_{\alpha,\beta} e^\gamma_{\alpha,\beta}(y_x,y_v), e^\gamma_{i,j}(y_x,w_v))_\gamma - \\ & - ((y_T|J^\gamma(y_x)|)^{-1} A^{i,j}_{\alpha,\beta} e^\gamma_{\alpha,\beta}(y_x,y_v) e^\gamma_{i,j}(y_x,y_v), w_T)_\gamma + \\ & + (|J^\gamma(y_x)|^{-1} \varkappa M^\gamma_{i,k}(y_x) M^\gamma_{i,l}(y_x) \partial_{\gamma,k} y_T, \partial_{\gamma,l}(w_T/y_T))_\gamma \Big\}, \qquad W \in \overset{0}{H}_1. \end{aligned} \qquad (29)$$

Здесь $J^\gamma(y_x) = (\partial_{\gamma,j} y_{x,i})^2_{i,j=1}$, $|J^\gamma(y_x)| = \det J^\gamma(y_x)$, $M^\gamma_{\alpha,k}(y_x) = |J^\gamma(y_x)| j^\gamma_{\alpha,k}(y_x)$, $j^\gamma_{\alpha,k}(y_x)$ — компоненты матрицы, обратной к $J^\gamma(y_x)$, $e^\gamma_{\alpha,\beta}(y_x,y_v) = 1/2(M^\gamma_{\alpha,k}(y_x)\partial_{\gamma,k} y_{v,\beta} + M^\gamma_{\beta,k}(y_x)\partial_{\gamma,k} y_{v,\alpha})$.

Операторы P и D определим выражениями $P(y_x, Y) = y_v$ и

$$DY = (-p(y_p, y_T), y_v, T(y_p, y_T)), \quad Y \in H_1. \qquad (30)$$

За приближенное решение $(\eta_h, \vec{v}_h, s_h)$, $\vec{x}_h$ задачи (19)–(23) примем решение разностной схемы вида (1) с $\sigma \in [0,1]$ и операторами D, A, P, определенными выше. При этом полагаем $y_0 = (\eta_0, v_0, s_0)$ и $x_0 = x(0) = \overline{x}$.

Исследуем разрешимость и сходимость разностной схемы. Для этого проверим условия теоремы. Положим в качестве элемента $u \in H_1$ сеточную функцию, полученную сносом решения

$(\eta, \vec{v}, s)$ исходной задачи в точки сетки $\overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$, и определим скалярные произведения V, H_1, H_2 равенствами

$$(y, v) = \frac{1}{4} \sum_\gamma (y, w)_\gamma,$$

$$(y, v)_1 = \frac{1}{4} \sum_\gamma \left[(y_p, w_p)_\gamma + \sum_{i=1}^{2} (y_{v,i}, w_{v,i})_\gamma + (y_T, w_T)_\gamma \right],$$

$$(y, v)_2 = \frac{1}{4} \sum_\gamma \sum_{i=1}^{3} (y_{x,i}, w_{x,i})_\gamma,$$

$$\|y\| = (y, y)^{1/2}, \quad \|Y\|_1 = (Y, Y)_1^{1/2}, \quad \|y_x\|_2 = \sum_j \left[(y_{x,j}, y_{x,j})_2 + \frac{1}{4} \sum_\gamma \sum_i (\partial_{\gamma,i} y_{x,j}, \partial_{\gamma,i} y_{x,j})_\gamma \right].$$

Пусть $\delta = \mu h^\vartheta / 4$, $\vartheta > 1$. Ясно, что из включения $(Y, y_x) \in O_\delta(u(t), u_x(t))$ следует выполнение при всех $\overline{x} \in \overline{\omega}_h$ неравенства

$$\max\{|y_p - \eta|, |y_{v,i} - v_i|, |y_T - s|\} \leq \mu h^{\vartheta - 1} \tag{31}$$

и при $\overline{x} \in \omega_h$ неравенств

$$|y_{x,i} - u_{x,i}| \leq \mu h^\vartheta \ln^{1/2} h^{-1}, \quad |\partial_{\gamma,j} y_{x,i} - \partial_{\gamma,j} u_{x,i}| \leq \mu h^{\vartheta - 1}. \tag{32}$$

Элемент u_x, определяемый соотношением (2), в данном случае, очевидно, равен

$$u_x(t) = x(0) + \sum_{t'=0}^{t-\tau} \tau v^{(\sigma)} = x(t) + O(\tau^\lambda), \qquad \lambda = \begin{cases} 2, & \sigma = 1/2; \\ 1, & \sigma \neq 1/2. \end{cases}$$

Отсюда и из (31) следует, что найдется такое достаточно малое число h_0, что при любых $h \leq h_0$, $\tau \leq \overline{c} h^{\vartheta/\lambda}$ для $(Y, y_x) \in O_\delta(u(t), x(t))$ справедливы неравенства (следствие из (25), (26))

$$p'_\eta(y_p, y_T) \leq c_0 < 0, \quad T'_\eta(y_p, y_T) \geq c_0 > 0, \quad (\varepsilon''_{\eta\eta} \varepsilon''_{ss} - 2(\varepsilon''_{s\eta})^2)(y_p, y_T) \geq c_0 > 0, \tag{33}$$

а также верна оценка (E — единичная матрица)

$$|J^\gamma(y_x)| \geq c_0 > 0, \quad \nu_0 E \leq (J^\gamma(y_x))^T J^\gamma(y_x) \leq \nu_1 E. \tag{34}$$

Из определения оператора D (30), гладкости функции ε и (33) следует справедливость неравенства (3) с постоянной $d_0 = c_0/2$ и неравенств (4), (5) с постоянными d_2, d_3, d_4, зависящими лишь от μ_0, производных от потенциала ε и максимума производных $\partial\eta/\partial t$, $\partial s/\partial t$. При этом норму $|\cdot|$ полагаем равной $\|\cdot\|_1$.

Проверим неравенства (6) и (7). Положим $U = \tilde{D}(u, \hat{u})$, $Z = Y - U$, $Y \in DO_{1,\delta}(u)$ и рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} (A(y_x, Y) - A(y_x, U), Y - U)_1 = \frac{1}{4} \sum_\gamma \Bigg\{ \Bigg[&- (M^\gamma_{\alpha,\beta}(y_x) \partial_{\gamma,\beta} z_{v,\alpha}, z_p)_\gamma + \\ &+ (M^\gamma_{\alpha,\beta}(y_x) \partial_{\gamma,\beta} z_{v,\alpha}, z_p)_\gamma \Bigg] + \left(\frac{A^{i,j}_{\alpha,\beta}}{|J^\gamma(y_x)|} e^\gamma_{\alpha,\beta}(y_x, z_v), e^\gamma_{i,j}(y_x, z_v) \right)_\gamma + \\ + \left(\frac{A^{i,j}_{\alpha,\beta}}{|J^\gamma(y_x)| y_T} e^\gamma_{\alpha,\beta}(y_x, y_v) e^\gamma_{i,j}(y_x, y_v) - \frac{A^{i,j}_{\alpha,\beta}}{|J^\gamma(y_x)| u_T} e^\gamma_{\alpha,\beta}(y_x, u_v) e^\gamma_{i,j}(y_x, u_v), z_T \right)_\gamma &+ \\ + \left(\frac{\varkappa}{|J^\gamma(y_x)|} (M^\gamma_{i,k}(y_x) M^\gamma_{i,l}(y_x) \partial_{\gamma,k} y_T \partial_{\gamma,l}(z_T / y_T) - \partial_{\gamma,k} u_T \partial_{\gamma,l}(z_T / u_T)) \right)_\gamma \Bigg\}&. \end{aligned} \tag{35}$$

Заметим, что в (35) сумма слагаемых в квадратных скобках есть ноль. Оценим оставшиеся слагаемые, которые обозначим $I^{35} - III^{35}$.

В силу (24) для первого из них имеем

$$I^{35} \geq c_0 \frac{1}{4} \sum_{\gamma} \left(\frac{1}{|J^{\gamma}(y_x)|} e^{\gamma}_{\alpha,\beta}(y_x, z_v), e^{\gamma}_{\alpha,\beta}(y_x, z_v) \right)_{\gamma} \equiv c_0 a(y_x, z_v).$$

Слагаемое II^{35} запишем в виде

$$II^{35} = \frac{1}{4} \sum_{\gamma} \left(\frac{A^{i,j}_{\alpha,\beta}}{|J^{\gamma}(y_x)|} \left[\frac{1}{y_T} e^{\gamma}_{\alpha,\beta}(y_x, y_v) e^{\gamma}_{i,j}(y_x, z_v) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{y_T} e^{\gamma}_{i,j}(y_x, u_v) e^{\gamma}_{\alpha,\beta}(y_x, z_v) + \frac{z_T}{u_T y_T} e^{\gamma}_{\alpha,\beta}(y_x, u_v) e^{\gamma}_{i,j}(y_x, u_v) \right], z_T \right)_{\gamma}.$$

Пользуясь неравенством Коши-Буняковского и (24), оценим

$$II^{35} \leq 2c_1 \max \left| \frac{e^{\gamma}_{\alpha,\beta}(y_x, y_v)}{y_T |J^{\gamma}(y_x)|^{1/2}} \right| a(y_x, z_v)^{1/2} \left(\frac{1}{4} \sum_{\gamma} (z_T, z_T)_{\gamma} \right)^{1/2} +$$

$$+ c_1 \max \left| \frac{(e^{\gamma}_{\alpha,\beta}(y_x, u_v))^2}{y_T u_T |J^{\gamma}(y_x)|} \right| \frac{1}{4} \sum_{\gamma} (z_T, z_T)_{\gamma}.$$

Воспользуемся равенством $Y = U + Z$ и положительностью y_T, u_T и $|J^{\gamma}(y_x)|$, а также гладкостью решения исходной задачи при оценке сомножителей в слагаемых

$$\max \left| \frac{e^{\gamma}_{\alpha,\beta}(y_x, y_v)}{y_T |J^{\gamma}(y_x)|^{1/2}} \right| \leq \max \left| \frac{e^{\gamma}_{\alpha,\beta}(y_x, u_v)}{c_0 |J^{\gamma}(y_x)|^{1/2}} \right| + \frac{1}{4hc_0} a(y_x, z_v)^{1/2},$$

ограниченностью (см.(31), (32), (34)) величин $\max |e^{\gamma}_{\alpha,\beta}(y_x, u_v)| \leq K(u, \delta)$ и $h^{-1}\|z_T\|$, а затем неравенством Юнга. Получим

$$II^{35} \leq \varepsilon_1 a(y_x, z_v) + \overline{c}_1(\varepsilon_1^{-1}) \|z_T\|^2.$$

Последнее слагаемое в (35) преобразуем к виду

$$III^{35} = \frac{1}{4} \sum_{\gamma} \left[\left(\frac{\varkappa}{|J^{\gamma}(y_x)|} M^{\gamma}_{i,k}(y_x) M^{\gamma}_{i,l}(y_x) \partial_{\gamma,k} z_T, \partial_{\gamma,l} \frac{z_T}{y_T} \right)_{\gamma} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\varkappa}{|J^{\gamma}(y_x)|} M^{\gamma}_{i,k}(y_x) M^{\gamma}_{i,l}(y_x) \partial_{\gamma,k} u_T, \partial_{\gamma,l} \frac{z_T^2}{u_T y_T} \right)_{\gamma} \right]$$

и оценим аналогично предыдущему слагаемому, пользуясь при этом легко проверяемыми равенствами

$$\partial_{\gamma,l}(z_T/y_T) = (u_T \partial_{\gamma,l} z_T - z_T \partial_{\gamma,l} u_T)/(y_T y_T^{\gamma_l}),$$
$$\partial_{\gamma,l}(z_T^2/(y_T u_T)) = ((z_T^2 u_T^{\gamma_l} - y_T u_T (z_T^{\gamma_l} + z_T)) \partial_{\gamma,l} z_T + (z_T \partial_{\gamma,l} u_T + \partial_{\gamma,l} u_T^2) z_T^2)/(y_T u_T y_T^{\gamma_l} u_T^{\gamma_l}),$$
$$y_T^{\gamma_l} = y_T(x + \gamma_l e_l, t).$$

Будем иметь

$$III^{35} \geq -c_2 \|z_T\|^2 + \overline{c}_3 b(y_x, z_T),$$
$$b(y_x, z_T) = \frac{1}{4} \sum_{\gamma} \left(\frac{1}{|J^{\gamma}(y_x)|} M^{\gamma}_{i,k}(y_x) M^{\gamma}_{i,l}(y_x) \partial_{\gamma,k} z_T, \partial_{\gamma,l} z_T \right)_{\gamma}.$$

Подставляя оценки для слагаемых в (35) и выбирая $\varepsilon_1 = c_0/2$, получим

$$(A(y_x, Y) - A(y_x, U), Y - U)_1 \geq \overline{c}_4 (a(y_x, z_v) + b(y_x, z_T) + \|Z\|_1^2) - \overline{c}_3 \|Z\|_1^2$$

(здесь для удобства интерпретации оценки добавлены нормы от компонент вектора Z).

Оценим теперь форму

$$a(y_x, z_v) = \frac{1}{4}\sum_{\alpha,\beta}\sum_{\gamma}\left(\frac{1}{|J^\gamma(y_x)|}e^\gamma_{\alpha,\beta}(y_x, z_v), e^g_{\alpha,\beta}(y_x, z_v)\right)_\gamma .$$

Введем обозначения $D_j z_v = M^\gamma_{\gamma,k}(y_x)\partial_{\gamma,k} z_v$ и рассмотрим выражение

$$\sum_{\alpha,\beta}(e^\gamma_{\alpha,\beta}(y_z, z_v))^2 = \frac{1}{4}\sum_{\alpha,\beta}((D_\beta z_{v,\alpha})^2 + (D_\alpha z_{v,\beta})^2 + 2(D_\alpha z_{v,\beta})(D_\beta z_{v,\alpha})) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}(D_\alpha z_{v,\beta})^2 + \frac{1}{2}\left[\sum_{\alpha}(D_\alpha z_{v,\alpha})^2 + \sum_{\alpha\neq\beta}(D_\alpha z_{v,\beta})(D_\beta z_{v,\alpha})\right]. \quad (36)$$

Вводя обозначение для сеточного градиента $\nabla^\gamma\cdot = (\partial_{\gamma,1}\cdot, \partial_{\gamma,2}\cdot)$, запишем первое слагаемое в (36) в виде

$$\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}(D_\alpha z_{v,\beta})^2 = \frac{1}{2}|J^\gamma(y_x)|^2\sum_{\beta}((J^\gamma(y_x)^T)^{-1}(J^\gamma(y_x))^{-1}\nabla^\gamma z_{v,\beta}, \nabla^\gamma z_{v,\beta})_{R^2}.$$

Используя неравенство (34) для оценки его снизу, получим

$$\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}(D_\alpha z_{v,\beta})^2 \geq \frac{1}{2\nu_1}|J^\gamma(y_x)|^2\sum_{\beta}(\nabla^\gamma z_{v,\beta}, \nabla^\gamma z_{v,\beta})_{R^2}.$$

Преобразуем далее второе слагаемое в (36) (всюду аргумент y_x опущен)

$$\sum_{i\neq j} D_i z_{v,j} D_j z_{v,i} = \sum_{i\neq j}\sum_{k,l} M^\gamma_{i,k}\partial_{\gamma,k} z_{v,j} M^\gamma_{j,l}\partial_{\gamma,l} z_{v,i} =$$

$$= \sum_{i\neq j}\sum_{k,l} M^\gamma_{i,l}\partial_{\gamma,l} z_{v,i} M^\gamma_{j,k}\partial_{\gamma,k} z_{v,j} + \sum_{i\neq j}\sum_{k\neq l}(M^\gamma_{i,k}M^\gamma_{j,l} - M^\gamma_{i,l}M^\gamma_{j,k})\partial_{\gamma,k} z_{v,j}\partial_{\gamma,l} z_{v,i} =$$

$$= \sum_{i\neq j}[D_i z_{v,i} D_j z_{v,j} + 2|J^\gamma|(\partial_{\gamma,i} z_{v,j}\partial_{\gamma,j} z_{v,i} - \partial_{\gamma,i} z_{v,i}\partial_{\gamma,j} z_{v,j})].$$

Замечая, что

$$\sum_{\gamma}[(\partial_{\gamma,i} z_{v,j}\partial_{\gamma,j} z_{v,i})_\gamma - (\partial_{\gamma,i} z_{v,i}\partial_{\gamma,j} z_{v,j})_\gamma] = 0,$$

подставим оценки слагаемых в (36). В результате получим

$$a(y_x, z_v) \geq \frac{1}{8\nu_1}\sum_{\beta}\sum_{\gamma}(|J^\gamma(y_x)|, (\nabla^\gamma z_{v,\beta}, \nabla^\gamma z_{v,\beta})_{R^2})_\gamma.$$

Аналогичное неравенство верно и для формы

$$b(y_x, z_v) \geq \frac{1}{8\nu_1}\sum_{\gamma}(|J^\gamma(y_x)|, (\nabla^\gamma z_T, \nabla^\gamma z_T)_{R^2})_\gamma.$$

Положим теперь

$$\|Z\|^2_{(+)} = \frac{1}{4}\sum_{\gamma}\left[\sum_{\alpha,\beta}(\partial_{\gamma,\alpha} z_{v,\beta}, \partial_{\gamma,\alpha} z_{v,\beta})_\gamma + \sum_{\beta}(\partial_{\gamma,\beta} z_T, \partial_{\gamma,\beta} z_T)_\gamma\right] + \|Z\|^2_1$$

и подставим оценки для форм в (35). Будем иметь (ср.с (6))

$$(A(y_x, Y) - A(y_x, U), Y - U)_1 \geq \overline{c}_4\|Z\|^2_{(+)} - \overline{c}_3\|z\|^2, \quad \overline{c}_4 > 0.$$

Для проверки выполнения неравенства (7) следует оценить сверху выражение

$$|(A(y_x,U)-A(w_x,U),\Phi)_1| = \frac{1}{4}\sum_\gamma \Big\{ -[((M^\gamma_{i,j}(y_x)-M^\gamma_{i,j}(w_x))\partial_{\gamma,j}u_{v,i},\varphi_P)_\gamma -$$
$$-((M^\gamma_{i,j}(y_x)-M^\gamma_{i,j}(w_x))\partial_{\gamma,j}\varphi_{v,i},u_P)_\gamma] +$$
$$+\left[\left(\frac{1}{|J^\gamma(y_x)|}A^{i,j}_{\alpha,\beta}e^\gamma_{\alpha,\beta}(y_x,u_v),e^\gamma_{i,j}(y_x,\varphi_v)\right)_\gamma - \left(\frac{1}{|J^\gamma(w_x)|}A^{i,j}_{\alpha,\beta}e^\gamma_{\alpha,\beta}(w_x,u_v),e^\gamma_{i,j}(w_x,\varphi_v)\right)_\gamma\right] +$$
$$+\left(\left(\frac{\varkappa}{|J^\gamma(y_x)|}M^\gamma_{i,k}(y_x)M^\gamma_{i,l}(y_x) - \frac{\varkappa}{|J^\gamma(w_x)|}M^\gamma_{i,k}(w_x)M^\gamma_{i,l}(w_x)\right)\partial_{\gamma,k}u_T, \partial_{\gamma,l}\frac{\varphi_T}{u_T}\right)_\gamma -$$
$$-\left(\frac{A^{i,j}_{\alpha,\beta}}{u_T|J^\gamma(y_x)|}e^\gamma_{\alpha,\beta}(y_x,u_v)e^\gamma_{i,j}(y_x,u_v) - \frac{A^{i,j}_{\alpha,\beta}}{u_T|J^\gamma(w_x)|}e^\gamma_{\alpha,\beta}(w_x,u_v)e^\gamma_{i,j}(w_x,u_v),\varphi_T\right)_\gamma \Big\}.$$

Оценку его нетрудно провести по аналогии с предыдущим случаем, используя ограниченность u и ее разностных отношений, а также неравенства (31), (32) и (34). В результате получим

$$|(A(y_x,U)-A(w_x,U),\Phi)_1| \le \overline{c}_5\|y_x-w_x\|_2\|\Phi\|_{(+)}.$$

Что касается неравенств (8), то в силу независимости оператора P от первого аргумента, первое из них выполнено при любом значении постоянной d_8. Второе неравенство, очевидно, выполняется с $d_8=1$

Таким образом, условия теоремы выполнены и, следовательно, разностная схема (u,δ)-корректна.

Как видно из анализа погрешности аппроксимации разностной схемы, величина $J(\Psi(u))$ имеет порядок малости $O(\tau^\lambda + h^{3/2})$, $\lambda=\{1,\ \sigma\ne 1/2;\ 2,\ \sigma=1/2\}$. Отсюда следует, что при достаточно малом h_0, $h\le h_0$ и $\tau\le \overline{c}h^\vartheta$, $\vartheta>1/\lambda$ величина $J(\Psi(u))$ не превосходит δ, а значит, разностная схема будет иметь решение $(y,\chi)=((\eta_h,\vec{v}_h,s_h),x_h)$ и для него верна оценка

$$\|\eta_h-\eta\|+\|\vec{v}_h-\vec{v}\|+\|s_h-s\|+\|x_h-x\|_2 = O(\tau^\lambda+h^2).$$

Литература

1. Самарский А.А. *Введение в теорию разностных схем.* – М.: Наука, 1971. – 552 с.
2. Самарский А.А. *Классы устойчивых схем* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1967. – Т. 7. – № 5. – С. 1096–1133.
3. Самарский А.А., Гулин А.В. *Устойчивость разностных схем.* – М.: Наука, 1973. – 415 с.
4. Гулин А.В. *Теоремы об устойчивости несамосопряженных разностных схем* // Матем. сб. – 1979. – Т. 117. – № 2. – С. 297–303.
5. Ляшко А.Д., Карчевский М.М. *Исследование одного класса нелинейных разностных схем* // Изв. вузов. Математика. – 1970. – № 7. – С. 63–71.
6. Ляшко А.Д. *О корректности нелинейных двухслойных операторно-разностных схем* // ДАН СССР. – 1974. – Т. 215. – № 2. – С. 263–265.
7. Лапин А.В., Ляшко А.Д. *О сходимости разностных схем для квазилинейных уравнений, параболических на решении* // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 12. – С. 30–42.
8. Арделян Н.В. *Разрешимость и сходимость нелинейных разностных схем* // ДАН СССР. – 1988. – Т. 302. – № 6. – С. 1289–1292.
9. Абрашин В.Н. *О разностных схемах газовой динамики* // Дифференц. уравнения. – 1981. – Т. 17. – № 4. – С. 710–718.
10. Абрашин В.Н., Матус П.П. *О точности разностных схем для одномерных задач газовой динамики* // Дифференц. уравнения. – 1981. – Т. 17. – № 7. – С. 1155–1170.

11. Абрашин В.Н. *Устойчивые разностные схемы для квазилинейных уравнений математической физики* // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18. – № 11. – С. 1967–1971.
12. Ляшко А.Д., Федотов Е.М. *Корректность одного класса консервативных нелинейных операторно-разностных схем* // Изв. вузов. Математика. – 1985. – № 10. – С. 47-55.
13. Ляшко А.Д., Федотов Е.М. *Исследование нелинейных двухслойных операторно-разностных схем с весами* // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21. – № 7. – С. 1217–1227.
14. Федотов Е.М. *Разностные схемы для нелинейных нестационарных задач.* – Учеб. пособие. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1987. – 90 с.
15. Федотов Е.М. *Об одном классе двухслойных разностных схем для нелинейных гиперболических уравнений* // Исследов. по прикл. матем. – Казань, 1990. – № 17. – С. 129–146.
16. Федотов Е.М. *Об одном классе двуслойных нелинейных операторно-разностных схем с весами* // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 4. – С. 96–103.
17. Карчевский М.М., Ляшко А.Д. *Разностные схемы для нелинейных задач математической физики.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1976. – 155 с.
18. Вайнберг М.М. *Функциональный анализ.* – М.: Просвещение, 1979. – 128 с.
19. Лионс Ж.-Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.* – М.: Мир, 1972. – 588 с.
20. Седов Л.И. *Механика сплошной среды.* I – М.: Наука, 1984. – 559 с.
21. Weyl H. *Shock waves in arbitrary fluids* // Commun. Pure and Appl. Math. – 1949. – V. 2–3. – P. 103–122.

Казанский государственный университет

Поступила
05.01.1996