ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 10 (449)

УДК 517.929

М.Т. ТЕРЕХИН

БИФУРКАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работе изучается проблема существования ненулевого периодического решения функционально-дифференциального уравнения вида

$$\dot{x}(t) = A(\lambda)x(t) + (F_\lambda x)(t)x(t), \tag{1}$$

где $x(t)$ — n-мерный вектор, $A(\lambda)$, $(F_\lambda x)(t)$, — $n \times n$-матрицы, $\lambda \in E_m$, λ — параметр, E_s — s-мерное векторное пространство.

Под решением уравнения (1) будем понимать двустороннее решение, т.е. абсолютно непрерывную на любом сегменте, принадлежащем интервалу $I =]-\infty, \infty[$, вектор-функцию x, почти всюду на этом сегменте удовлетворяющую уравнению (1).

Пусть $|\lambda| = \max\limits_i |\lambda_i|$, $\Lambda(\delta) = \{\lambda : \lambda \in E_m,\ |\lambda - \lambda_0| \le \delta\}$, $\|\psi\| = |\psi(0)| + \int\limits_0^\omega |\dot{\psi}(t)|dt$, $\omega > 0$, $\delta > 0$ — некоторые числа, $\lambda_0 \in E_m$, ψ — абсолютно непрерывная на сегменте $[0, \omega]$ вектор-функция, $|B| = \max\limits_{|v| \le 1} |Bv|$, B — матрица.

Символом $D(\omega, R)$ обозначим множество всех ω-периодических абсолютно непрерывных на сегменте $[0, \omega]$ вектор-функций φ таких, что $\|\varphi\| \le R$ и при любом $t \in [0, \omega]$, любом $\lambda \in \Lambda(\delta)$ матрица $(F_\lambda \varphi)(t)$ определена, $R > 0$ — некоторое число.

Очевидно, что $x \equiv 0$ является решением уравнения (1) при любом λ.

Определение. Следуя ([1], с. 172), вектор $\lambda_0 \in E_m$ назовем бифуркационным значением параметра λ уравнения (1), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует вектор $\lambda \in \{\lambda : \lambda \in E_m,\ |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon\}$, при котором уравнение (1) имеет ненулевое периодическое решение x, удовлетворяющее неравенству $\|x\| < \varepsilon$.

Пусть $R_0 > 0$, $\delta_0 > 0$ — некоторые числа. Далее всюду будем предполагать, что для любой вектор-функции $\varphi \in D(\omega, R_0)$ и любого вектора $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$ матрица $(F_\lambda \varphi)(t)$ суммируема на сегменте $[0, \omega]$ и при любом $t \in [0, \omega]$ выполнено равенство $(F_\lambda \varphi)(t) = (F_\lambda \varphi)(t + \omega)$.

Одновременно с уравнением (1) рассмотрим систему линейных уравнений вида

$$\dot{y} = [A(\lambda) + (F_\lambda \varphi)(t)]y, \tag{2}$$

в которой $\varphi \in D(\omega, R_0)$, $y \in E_n$.

Под решением системы (2) будем понимать абсолютно непрерывную на сегменте $[0, \omega]$ вектор-функцию, почти всюду на этом сегменте удовлетворяющую системе (2).

Пусть $(Y_\lambda \varphi)(t)$ — фундаментальная матрица решений системы (2), $(Y_\lambda \varphi)(0) = E$, E — единичная матрица. Тогда решение системы (2) определится равенством

$$(y_\lambda \varphi)(t) = (Y_\lambda \varphi)(t)\alpha_\varphi, \tag{3}$$

α_φ — некоторый вектор.

Равенство (3) при любом фиксированном $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$ на множестве $D(\omega, R_0)$ определяет оператор $\Gamma_\lambda : \varphi \to y_\lambda \varphi$, который любой вектор-функции $\varphi \in D(\omega, R_0)$ ставит в соответствие абсолютно непрерывную вектор-функцию.

Теорема 1. *Неподвижные точки оператора Γ_λ являются ω-периодическими решениями уравнения* (1), *принадлежащими множеству $D(\omega, R_0)$.*

Доказательство. Пусть при некотором $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$ вектор-функция $x \in D(\omega, R_0)$ — неподвижная точка оператора Γ_λ. Это значит, что при любом $t \in [0, \omega]$ $x(t) = (Y_\lambda x)(t)\alpha_x$, т.е. при $\varphi = x$ вектор-функция x является решением системы (2), а, следовательно, решением уравнения (1). $\square$

В основе доказательства теоремы о существовании бифуркационного значения параметра λ уравнения (1) лежит

Теорема 2. *Пусть* 1) K *и* Λ — *непустые замкнутые компактные множества некоторых линейных нормированных пространств,* K — *выпуклое множество*; 2) *на подмножестве множества $K \times \Lambda$ определен оператор R_λ такой, что для любого $\varphi \in K$ существует единственное $\lambda \in \Lambda$, удовлетворяющее включению $R_\lambda \varphi \in K$*; 3) *из того, что $\varphi_n \to \varphi_0$, $\lambda_n \to \lambda_0$, $\psi_n = R_{\lambda_n}\varphi_n$, $\psi_n \to \psi_0$, следует $\psi_0 = R_{\lambda_0}\varphi_0$. Тогда существуют $\varphi^* \in K$, $\lambda^* \in \Lambda$ такие, что $\varphi^* = R_{\lambda^*}\varphi^*$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon^{(k)}$ — произвольное положительное число. Так как множество K компактное, то существует конечная $\varepsilon^{(k)}$-сеть $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{n_k}^{(k)}$ для этого множества, $x_i^{(k)} \in K$, $i = 1, 2, \ldots, n_k$.

Рассмотрим функции $\varphi_i^{(k)}$, $w_i^{(k)}$, определенные на множестве K равенствами

$$\varphi_i^{(k)}(x) = \max\{\varepsilon^{(k)} - \|x - x_i^{(k)}\|,\ 0\}, \quad w_i^{(k)}(x) = \varphi_i^{(k)}(x) \Big/ \sum_{j=1}^{n_k} \varphi_j^{(k)}(x).$$

Функции $\varphi_i^{(k)}$ непрерывны и неотрицательны на множестве K, причем для любого $x \in K$ найдется хотя бы одно j такое, что $\varphi_j^{(k)}(x) > 0$. Поэтому и функции $w_i^{(k)}$ непрерывны на множестве K. Так как $x_i^{(k)} \in K$, то согласно условию 2) теоремы существует единственное $\lambda_i^{(k)} \in \Lambda$ такое, что $R_{\lambda_i}^{(k)} x_i^{(k)} \in K$. Пусть $y_i^{(k)} = R_{\lambda_i}^{(k)} x_i^{(k)}$. Непрерывное отображение $\Gamma_k : K \to K$ определим равенством

$$\Gamma_k x = \sum_{i=1}^{n_k} w_i^{(k)}(x) y_i^{(k)}.$$

Так как $y_i^{(k)} \in K$, $w_i^{(k)}(x) \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n_k} w_i^{(k)}(x) = 1$, то из выпуклости множества K следует, что $\Gamma_k x \in K$. Следовательно, при любом k непрерывное отображение Γ_k преобразует множество K в себя и поэтому по теореме Шаудера о неподвижной точке существует $x_k \in K$ такое, что $\Gamma_k x_k = x_k$.

Из условия 2) теоремы следует, что для каждого $x_k \in K$ существует единственное $\lambda_k \in \Lambda$, для которого $y_k = R_{\lambda_k} x_k \in K$. Из компактности K, Λ следует существование последовательностей $(\varepsilon^{(k)})$, (x_k), (λ_k) таких, что $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon^{(k)} = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$, $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = \lambda^*$. В силу замкнутости множеств K, Λ выполняются включения $x^* \in K$, $\lambda^* \in \Lambda$ и поэтому (см. условие 3) теоремы) $y^* = R_{\lambda^*} x^* \in K$.

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Тогда существует такой номер N, что при любом $k > N$ выполняются неравенства

$$\varepsilon^{(k)} < \varepsilon/2, \quad \|x_k - x^*\| < \varepsilon/2, \quad \|\lambda_k - \lambda^*\| < \varepsilon.$$

Рассмотрим те значения i, при которых $w_i^{(k)}(x_k) > 0$. Очевидно, $\|x_i^{(k)} - x^*\| \leq \|x_i^{(k)} - x_k\| + \|x_k - x^*\| < \varepsilon^{(k)} + \varepsilon/2 < \varepsilon$ при $k \geq N$.

Из условия 3) теоремы следует, что для любого числа $\sigma > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что, как только $\|x - x^*\| < \delta$, $\|\lambda - \lambda^*\| < \delta$, выполнено неравенство $\|R_\lambda x - y^*\| < \sigma$.

Пусть $0 < \overline{\varepsilon} \leq \delta$. Выберем номер N_1 таким образом, чтобы при всех $k \geq N_1$ и при любом i, при котором $w_i^{(k)}(x_k) > 0$, выполнялось неравенство $\|x_i^{(k)} - x^*\| < \overline{\varepsilon}$ и в силу единственности λ^* — неравенство $\|\lambda_i^{(k)} - \lambda^*\| < \overline{\varepsilon}$, но тогда — и неравенство $\|y^{(k)} - y^*\| < \sigma$.

Из равенства $x_k = \sum\limits_{i=1}^{n_k} w_i^{(k)}(x_k) y_i^{(k)}$ следует, что x_k есть выпуклая комбинация тех $y_i^{(k)}$, для которых $\|y_i^{(k)} - y^*\| < \sigma$. Поэтому $\|x_k - y^*\| < \sigma$. Переходя к пределу при $k \to \infty$ и учитывая произвольность σ, получим, что $x^* = R_{\lambda^*} x^*$. $\square$

Заметим, что справедливо представление $(Y_\lambda \varphi)(t) = X(t,\lambda) + (\Phi_\lambda \varphi)(t)$, в котором $X(t,\lambda)$ — фундаментальная матрица решений системы $\dot{x} = A(\lambda)x$, $X(0,\lambda) = E$, матрица $(\Phi_\lambda \varphi)(t)$ является решением системы дифференциальных уравнений вида

$$(\dot{\Phi}_\lambda \varphi)(t) = [A(\lambda) + (F_\lambda \varphi)(t)](\Phi_\lambda \varphi)(t) + (F_\lambda \varphi)(t) X(t,\lambda) \tag{4}$$

с условием $(\Phi_\lambda \varphi)(0) = 0$ при любом $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$, и $\lim\limits_{\|\varphi\| \to 0} |(\Phi_\lambda \varphi)(t)| = 0$ равномерно относительно $t \in [0,\omega]$ и $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$ при требовании $\lim\limits_{\|\varphi\| \to 0} |(F_\lambda \varphi)(t)| = 0$ равномерно относительно $t \in [0,\omega]$ и $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$.

Пусть существует число $\delta \in]0,\delta_0[$ такое, что при любом $\lambda \in \Lambda(\delta)$ матрица $A(\lambda)$ имеет k действительных собственных значений $\mu_l(\lambda)$, $l \in \{1,2,\ldots,k\}$, и p пар комплексно-сопряженных собственных значений $\sigma_j(\lambda) \pm i\tau_j(\lambda)$, $j \in \{1,2,\ldots,p\}$, и неособенным линейным преобразованием сводится к матрице вида

$$A(\lambda) = \operatorname{diag}\{L(\lambda), A_1(\lambda), \ldots, A_p(\lambda), \mu_1(\lambda), \ldots, \mu_k(\lambda)\},$$

где

$$A_j(\lambda) = \begin{pmatrix} \sigma_j(\lambda) & \tau_j(\lambda) \\ -\tau_j(\lambda) & \sigma_j(\lambda) \end{pmatrix}, \qquad j \in \{1,2,\ldots,p\}.$$

Будем полагать, что указанное преобразование выполнено.

Заметим, что для любой вектор-функции $\varphi \in D(\omega, R_0)$ решение $y_\lambda \varphi$ системы (2) является ω-периодическим тогда и только тогда, когда $[(Y_\lambda \varphi)(\omega) - E]\alpha_\varphi = 0$.

Предположим, что существуют такие числа $\delta \in]0,\delta_0]$ и $R \in]0,R_0]$, что при любых $\lambda \in \Lambda(\delta)$ и $\varphi \in D(\omega,R)$ матрицу $(Y_\lambda\varphi)(\omega) - E$ можно представить в виде $(Y_\lambda\varphi)(\omega) - E = [B_{ij}^\varphi(\omega,\lambda)]_1^2$, в котором $B_{11}^\varphi(\omega,\lambda)$ — $[n-(2p+k)] \times [n-(2p+k)]$-матрица, $\det B_{11}^\varphi(\omega,\lambda) \neq 0$. Это предположение, в частности, выполнено, если ω-периодическим решением системы $\dot{z} = L(\lambda_0)z$ является только тривиальное решение и $|(F_\lambda\varphi)(t)| \to 0$ при $\|\varphi\| \to 0$ равномерно относительно $t \in [0,\omega]$ и $\lambda \in \Lambda(\delta)$. Тогда существует такая матрица $(S_\lambda\varphi)(\omega)$ с отличным от нуля, не зависящим от ω, φ и λ определителем ([2], с. 135), что n-й столбец матрицы $[(Y_\lambda\varphi)(\omega) - E](S_\lambda\varphi)(\omega)$ имеет вид

$$\begin{gathered}\operatorname{colon}(0,\ldots,0, \exp[\sigma_1(\lambda)\omega]\cos\tau_j(\lambda)\omega - 1 + f_1^*(\omega,\varphi,\lambda), \exp[\sigma_1(\lambda)\omega]\sin\tau_j(\lambda)\omega + f_1^{**}(\omega,\varphi,\lambda), \ldots, \\ \exp[\sigma_p(\lambda)\omega]\cos\tau_p(\lambda)\omega - 1 + f_p^*(\omega,\varphi,\lambda), \exp[\sigma_p(\lambda)\omega]\sin\tau_p(\lambda)\omega + f_p^{**}(\omega,\varphi,\lambda), \\ \exp[\mu_1(\lambda)\omega] - 1 + f_1(\omega,\varphi,\lambda), \ldots, \exp[\mu_k(\lambda)\omega] - 1 + f_k(\omega,\varphi,\lambda)). \end{gathered} \tag{5}$$

Для простоты записей будем полагать $\lambda_0 = 0$.

Символом $D^*(\omega,R)$ обозначим непустое, замкнутое, выпуклое, компактное множество, удовлетворяющее включению $D^*(\omega,R) \subset D(\omega,R)$.

Теорема 3. *Пусть* 1) *существуют такие* $2p+k$ *координаты* λ_{q_s} $(s = 1,2,\ldots,2p+k)$ *вектора* $\lambda \in E_m$ $(m \geq 2p+k)$, *что*

$$\begin{aligned}
\sigma_j(\lambda) &= \sum_{s=1}^{2p+k} \sigma_s^j \lambda_{q_s}^{p_s} + \sigma_j^*(\lambda) + \sigma_j^{**}(\lambda), \\
\tau_j(\lambda) &= \sum_{s=1}^{2p+k} \tau_s^j \lambda_{q_s}^{p_s} + \tau_j(0) + \tau_j^*(\lambda) + \tau_j^{**}(\lambda), \\
\mu_l(\lambda) &= \sum_{s=1}^{2p+k} \mu_s^l \lambda_{q_s}^{p_s} + \mu_l^*(\lambda) + \mu_l^{**}(\lambda),
\end{aligned} \tag{6}$$

$\cos\tau_j(0)\omega = 1$; при $\lambda_\eta = 0$, $\eta = 1, 2, \dots, m$, $\eta \ne q_s$, $s = 1, 2, \dots, 2p + k$, и любых $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, $l \in \{1, 2, \dots, k\}$ выполнены равенства $\sigma_j^{**}(\lambda) = \tau_j^{**}(\lambda) = \mu_l^{**}(\lambda) = 0$; при любых $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, $l \in \{1, 2, \dots, k\}$ и любом $\delta \in]0, \delta_0]$ на множестве $\Lambda(\delta)$ функции $\sigma_j^*(\lambda)$, $\tau_j^*(\lambda)$, $\mu_l^*(\lambda)$ удовлетворяют условию Липшица по переменной $\overline{\lambda} = (\overline{\lambda}_{q_1}, \overline{\lambda}_{q_2}, \dots, \overline{\lambda}_{q_{2p+k}})$, $\overline{\lambda}_{q_s} = \lambda_{q_s}^{p_s}$, с постоянной q и такой, что $q \to 0$ при $\delta \to 0$, $\sigma_j^*(0) = \tau_j^*(0) = \mu_l^*(0) = 0$; матрица Δ, столбцом которой при любом $s \in \{1, 2, \dots, 2p + k\}$ является $\mathrm{colon}(\sigma_s^1, \tau_s^1, \dots, \sigma_s^p, \tau_s^p, \mu_s^1, \dots, \mu_s^k\}$, неособенная; 2) при любом $s \in \{1, 2, \dots, 2p+k\}$ число $p_s > 0$ и удовлетворяет равенству $(-\gamma)^{p_s} = -\gamma^{p_s}$, $\gamma > 0$ — некоторое число; 3) на множестве $\Lambda(\delta_0)$ матрица $L(\lambda)$ непрерывна и при $\lambda = 0$ не имеет собственных значений вида $\pm i\nu\tau_j(0)$, $\nu = 0, 1, 2, \dots$, $j \in \{1, 2, \dots, p\}$; 4) матрица $(F_\lambda\varphi)(t)$ равномерно относительно $t \in [0, \omega]$ непрерывна на множестве $D(\omega, R_0) \times \Lambda(\delta_0)$ и $\lim\limits_{\|\varphi\| \to 0} |(F_\lambda\varphi)(t)| = 0$ равномерно относительно $t \in [0, \omega]$ и $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$; 5) в области определения при любых $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, $l \in \{1, 2, \dots, k\}$ функции $f_j^*(\omega, \varphi, \lambda)$, $f_j^{**}(\omega, \varphi, \lambda)$, $f_l(\omega, \varphi, \lambda)$ непрерывны по φ и λ и удовлетворяют условию Липшица по $\overline{\lambda}$ с постоянной q_φ и $q_\varphi \to 0$ при $\|\varphi\| \to 0$ равномерно относительно $\overline{\lambda}$; 6) для любого числа $R \in]0, R_0]$ из того, что решение $y_\lambda\varphi$ системы (2) принадлежит $D(\omega, R)$, следует, что $y_\lambda\varphi \in D^*(\omega, R)$. Тогда $\lambda_0 = 0$ — бифуркационное значение параметра λ системы (1).

Доказательство. Из условия 3) теоремы следует, что единственным ω-периодическим решением системы $\dot{z} = L(0)z$ является тривиальное решение. А так как согласно условию 4) теоремы равномерно относительно $t \in [0, \omega]$ и $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$ $\lim\limits_{\|\varphi\| \to 0} |(F_\lambda\varphi)(t)| = 0$, а, следовательно (в силу (4)), и $\lim\limits_{\|\varphi\| \to 0} |(\Phi_\lambda\varphi)(t)| = 0$, то числа $R \in]0, R_0]$ и $\delta \in]0, \delta_0]$ можно выбрать так, что для любой вектор-функции $\varphi \in D(\omega, R)$, любого вектора $\lambda \in \Lambda(\delta)$ n-й столбец матрицы $[(Y_\lambda\varphi)(\omega) - E](S_\lambda\varphi)(\omega)$ имеет вид (5), при этом для любых $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ и $l \in \{1, 2, \dots, k\}$

$$\lim_{\|\varphi\| \to 0} f_j^*(\omega, \varphi, \lambda) = \lim_{\|\varphi\| \to 0} f_j^{**}(\omega, \varphi, \lambda) = \lim_{\|\varphi\| \to 0} f_l(\omega, \varphi, \lambda) = 0 \tag{7}$$

равномерно относительно $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$.

Убедимся, что числа $R \in]0, R_0]$, $\delta \in]0, \delta_0]$ можно выбрать так, что для любой вектор-функции $\varphi \in D(\omega, R)$ будет существовать вектор $\lambda \in \Lambda(\delta)$, при котором

$$\begin{gathered}
\exp[\sigma_j(\lambda)\omega] \sin\tau_j(\lambda)\omega + f_j^{**}(\omega, \varphi, \lambda) = 0, \\
\exp[\sigma_j(\lambda)\omega] \cos\tau_j(\lambda)\omega - 1 + f_j^*(\omega, \varphi, \lambda) = 0, \\
\exp[\sigma_j(\lambda)\omega] - 1 + f_l(\omega, \varphi, \lambda) = 0, \\
j = 1, 2, \dots, p, \quad l = 1, 2, \dots, k.
\end{gathered} \tag{8}$$

Символом $\Lambda^*(\delta_0)$ обозначим множество таких векторов $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$, что $\lambda_\eta = 0$ при любом $\eta \in \{1, 2, \dots, m\}$, $\eta \ne q_s$, $s = 1, 2, \dots, 2p + k$. Тогда согласно условию 1) теоремы $\sigma_j^{**}(\lambda) = \tau_j^{**}(\lambda) = \mu_l^{**}(\lambda) = 0$ при любых $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, $l \in \{1, 2, \dots, k\}$ и $\lambda \in \Lambda^*(\delta_0)$.

При $\lambda \in \Lambda^*(\delta_0)$ равенства (8) будут выполнены, если

$$\overline{\lambda} = \Delta^{-1} g(\omega, \varphi, \lambda),$$

где $(2p + k)$-мерный вектор

$$\begin{gathered}
g(\omega, \varphi, \lambda) = \Big\{ \frac{1}{\omega} \Big(\frac{1}{2} \ln[1 - 2f_j^{**}(\omega, \varphi, \lambda) + f_j^{**2}(\omega, \varphi, \lambda) + f_j^{*2}(\omega, \varphi, \lambda)] - \sigma_j^*(\lambda), \\
- \operatorname{arctg} \frac{f_j^*(\omega, \varphi, \lambda)}{1 - f_j^{**}(\omega, \varphi, \lambda)} - \tau_j^*(\lambda) \Big),\ j = 1, 2, \dots, p;\ \frac{1}{\omega}(\ln[1 - f_l(\omega, \varphi, \lambda)] - \mu_l^*(\lambda)),\ l = 1, 2, \dots, k \Big\}.
\end{gathered}$$

Оператор A определим равенством $A\overline{\lambda} = \Delta^{-1} g(\omega, \varphi, \lambda)$. Из условий 1) и 5) теоремы следует, что вектор-функция $g(\omega, \varphi, \lambda)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной $\overline{\lambda}$ с постоянной $\overline{q}$ и $\overline{q} \to 0$ при $\delta \to 0$ и $\|\varphi\| \to 0$. Следовательно, числа $R \in]0, R_0]$ и $\delta \in]0, \delta_0]$ можно выбрать так, что для любой вектор-функции $\varphi \in D(\omega, R)$ оператор A на множестве $\Lambda^*(\delta)$ будет сжимающим. Кроме того, из условия 1) теоремы и равенств (7) следует, что числа $R \in]0, R_0]$ и $\delta \in]0, \delta_0]$ можно выбрать так, что для любой вектор-функции $\varphi \in D(\omega, R)$ и любого вектора $\overline{\lambda} \in \Lambda^*(\delta)$ оператор A удовлетворяет включению $A\overline{\lambda} \in \Lambda^*(\delta)$. А это значит, что существуют числа $R \in]0, R_0]$ и $\delta \in]0, \delta_0]$ такие, что для любой вектор-функции $\varphi \in D(\omega, R)$ во множестве $\Lambda^*(\delta)$ существует единственная неподвижная точка $\overline{\lambda}$ оператора A.

Пусть постоянный n-мерный вектор $c \neq 0$ такой, что его первые $n-1$ координат равны нулю. Тогда, если положить $\alpha_\varphi = (S_\lambda \varphi)(\omega)c$, то получим, что для любой вектор-функции $\varphi \in D(\omega, R)$ существует единственный вектор $\lambda \in \Lambda^*(\delta)$, удовлетворяющий равенству $[(Y_\lambda \varphi)(\omega) - E]\alpha_\varphi = 0$. Кроме того, вектор c можно выбрать так, чтобы вектор-функция $y_\lambda \varphi$, определяемая равенством (3), принадлежала множеству $D(\omega, R)$, а , следовательно, по условию 6) теоремы и множеству $D^*(\omega, R)$.

Матрица $(F_\lambda \varphi)(t)$ равномерно относительно $t \in [0, \omega]$ непрерывна на множестве $D(\omega, R_0) \times \Lambda^*(\delta_0)$, матрица $L(\lambda)$ непрерывна на множестве $\Lambda^*(\delta_0)$. Поэтому оператор Γ_λ, определенный равенством (3), непрерывен на множестве $D(\omega, R_0) \times \Lambda^*(\delta_0)$ и при любых $(\varphi, \lambda) \in D(\omega, R_0) \times \Lambda^*(\delta_0)$ $\Gamma_\lambda \varphi = y_\lambda \varphi$.

Таким образом, окончательно получаем, что существуют числа $R \in]0, R_0]$, $\delta \in]0, \delta_0]$ такие, что на множестве $D^*(\omega, R) \times \Lambda^*(\delta)$ оператор Γ_λ непрерывен и для любой вектор-функции $\varphi \in D^*(\omega, R)$ существует единственный вектор $\lambda \in \Lambda^*(\delta)$, удовлетворяющий включению $\Gamma_\lambda \varphi \in D^*(\omega, R)$. Тогда по теореме 2 существуют $\varphi^* \in D^*(\omega, R)$ и $\lambda^* \in \Lambda^*(\lambda)$ такие, что φ^* — неподвижная точка оператора Γ_{λ^*}, причем $\varphi^* \neq 0$, т.к. $\alpha_{\varphi^*} \neq 0$. $\square$

Отметим, что из условия 1) теоремы 3 следует, что матрица $A(\lambda)$ системы (1) при $\lambda = 0$ имеет как нулевые, так и чисто мнимые собственные значения. Это требование является существенным. Действительно, предположив, что при $\lambda = 0$ матрица не имеет ни нулевых, ни чисто мнимых собственных значений, получим, что при выполнении условий 3) и 4) этой теоремы существуют числа $R \in]0, R_0]$ и $\delta \in]0, \delta_0]$ такие, что при любом $\lambda \in \Lambda(\delta)$ единственным ω-периодическим решением системы (1), принадлежащим множеству $D(\omega, R)$, является тривиальное решение. Отметим также, что равенства (6) определяют наиболее общее представление функций $\sigma_j(\lambda)$, $\tau_j(\lambda)$ и $\mu_l(\lambda)$, одновременно с другими условиями обеспечивающее справедливость теоремы 3. В общем случае некоторые из функций $\sigma_j(\lambda)$, $\tau_j(\lambda)$ и $\mu_l(\lambda)$, удовлетворяющие равенствам (6), могут быть недифференцируемы. Если же при любом $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ и $\lambda \neq 0$ эти функции дифференцируемы, то с учетом того, что числа p_s могут быть как больше, так и меньше единицы, матрицы Якоби функций $\sigma_j(\lambda)$, $\tau_j(\lambda)$ и $\mu_l(\lambda)$ могут иметь элементы как сколь угодно малые, так и неограниченные в достаточно малой окрестности точки $\lambda = 0$.

В целом условия теоремы 3 определены теоремой 2. Поэтому ослабление условий существования ненулевого периодического решения системы (1) связано с ослаблением условий существования неподвижной точки оператора Γ_λ.

Пример. Рассмотрим систему (1), в которой

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 2+\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda_1 + \lambda_3^3 + 3\lambda_2^2 & 1 + \lambda_2 + 3\lambda_3^2 & 0 \\ 0 & -(1 + \lambda_2 + 3\lambda_3^2) & 2\lambda_1 + \lambda_3^3 + 3\lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 - 3\lambda_3^3 + \lambda_3^7 \end{pmatrix},$$

$$(F_\lambda x)(t) = \begin{pmatrix} x_2(t)\cos t & x_1(t - 2x_1(t)) & x_1(t) & x_3(t - x_1(t)) \\ x_1(t - x_3(t))\sin t & \lambda_2 x_2(t - x_4(t)) & \lambda_1 x_4(t) & x_4(t - x_3(t)) \\ x_3(t - x_4(t)) & x_1(t - x_2(t)) & \lambda_2 x_2(t) & x_1(t - x_2(t)) \\ x_4(t - x_1(t)) & x_2(t - x_1(t)) & 2x_4(t) & 3x_3(t - x_1(t)) \end{pmatrix}. \tag{9}$$

В такой системе $\omega = 2\pi$, $j = 1$, $l = 1$, $m = 3$, $\sigma(\lambda) = 2\lambda_1 + \lambda_3^3 + 3\lambda_2^2$, $\tau(\lambda) = \lambda_2 + 3\lambda_3^3 + 1$, $\mu(\lambda) = \lambda_1 - 3\lambda_3^3 + \lambda_3^7$, $p_1 = p_2 = 1$, $p_3 = 3$, $\cos\tau(0)2\pi = 1$, $\sigma^*(\lambda) = 3\lambda_2^2$, $\tau^*(\lambda) = 0$, $\mu^*(\lambda) = \lambda_3^7$. Тогда, положив $\overline{\lambda} = (\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \overline{\lambda}_3)$, $\overline{\lambda}_1 = \lambda_1$, $\overline{\lambda}_2 = \lambda_2$, $\overline{\lambda}_3 = \lambda_3^3$, получим, что на множестве $\Lambda(\delta)$ функции $\sigma^*(\lambda)$ и $\mu^*(\lambda)$ удовлетворяют условию Липшица по переменной $\overline{\lambda}$ с постоянной, стремящейся к нулю при $\delta \to 0$.

Матрица Δ определяется равенством $\Delta = [\mathrm{colon}(2,0,1), \mathrm{colon}(0,1,0), \mathrm{colon}(1,0,-3)]$, $\det \Delta = -7$. Следовательно, выполнены условия 1) и 2) теоремы 3.

Пусть $D^*(2\pi, R)$ — множество всех непрерывных 2π-периодических четырехмерных вектор-функций φ, удовлетворящих неравенству $\|\varphi\| \le R$ и условию Липшица с постоянной M, $M > 0$ — некоторое число. Следовательно, $D^*(2\pi, R)$ непустое, замкнутое, выпуклое, компактное множество.

В данном примере $L(\lambda) = 2 + \lambda_1$. Выполнимость условия 3) теоремы 3 проверяется непосредственно. Следовательно (см. доказательство теоремы 3), числа $R \in]0, R_0]$ и $\delta \in]0, \delta_0]$ можно выбрать так, что для любой вектор-функции $\varphi \in D^*(2\pi, R)$ и любого вектора $\lambda \in \Lambda(\delta)$ четвертый столбец матрицы $[(Y_\lambda\varphi)(2\pi) - E](S_\lambda\varphi)(2\pi)$ имеет вид (5).

Из равенства (9) следует, что $\lim\limits_{\|\varphi\|\to 0} |(F_\lambda\varphi)(t)| = 0$ равномерно относительно $t \in [0, 2\pi]$ и $\lambda \in \Lambda(\delta_0)$, т.е. выполнено условие 4) теоремы 3. А так как элементы матрицы $(F_\lambda\varphi)(t)$ имеют непрерывные частные производные по координатам вектора $\overline{\lambda}$, стремящиеся к нулю при $\|\varphi\| \to 0$ равномерно относительно $t \in [0, 2\pi]$, то на основании теоремы о дифференцируемости решения уравнения по параметру устанавливаем, что функции $f^*(2\pi, \varphi, \lambda)$, $f^{**}(2\pi, \varphi, \lambda)$ и $f(2\pi, \varphi, \lambda)$ удовлетворяют условию Липшица по переменной $\overline{\lambda}$ с постоянной q_φ и $q_\varphi \to 0$ при $\|\varphi\| \to 0$ равномерно относительно $\overline{\lambda}$. Следовательно, выполнено условие 5) теоремы 3.

Из равенства (3) с учетом того, что $\alpha_\varphi = (S_\lambda\varphi)(2\pi)c$, следует, что $(\Gamma_\lambda\varphi)(t) = (y_\lambda\varphi)(t) = (Y_\lambda\varphi)(t)(S_\lambda\varphi)(2\pi)c$. Поэтому вектор $c \ne 0$ можно выбрать так, что при любом $\varphi \in D^*(2\pi, R)$ и при любом $t \in [0, 2\pi]$ $\|\Gamma_\lambda\varphi\| \le R$, $\left|\frac{d}{dt}(y_\lambda\varphi)(t)\right| \le M$. А это значит, что для любой вектор-функции $\varphi \in D^*(2\pi, R)$ выполнено включение $(\Gamma_\lambda\varphi) \in D^*(2\pi, R)$, т.е. выполнено условие 6) теоремы 3.

Таким образом, в примере выполнены все условия теоремы 3, поэтому $\lambda_0 = 0$ — бифуркационное значение параметра λ.

Литература

1. Красносельский М.А. *Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1966. – 331 с.
2. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* – М.: Наука, 1966. – 576 с.

Рязанский государственный педагогический университет

Поступили
первый вариант 12.06.1995
окончательный вариант 10.01.1997