1834 1929

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
КАЗАНСКОГО
Государственного Университета
имени В. И. Ульянова-Ленина.

Ответственный редактор проф. **В. С. Груздев.**

Редакционная коллегия:

проф. **А. Е. Арбузов**, доц. **Н.-Б. З. Векслин**, проф. **В. В. Милославский**, доц. **М. А. Сегаль** и проф. **А. А. Яковкин.**

Год издания LXXXIX.

КНИГА 2.

КАЗАНЬ.
Государственный Университет.

Об устойчивости в смысле Пуассона[1]).

Н. Четаева.

1. Теорема.

Движение произвольной материальной системы всегда возможно свести на рассмотрение движения некоторой точки P от n переменных x_s, которое определялось бы дифференциальными уравнениями вида

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \quad (s=1, 2, \ldots, n).$$

Положим, что X_s суть функции аналитические и однозначные для всех реальных значений переменных x и t.

Будем говорить, что для некоторого начального состояния системы движение устойчиво в смысле Пуассона, если отвечающая точка P за бесконечный промежуток времени t произвольно много раз пройдет сколь угодно близко от своего начального положения P_0.

Если допустить: 1^0—что действительным состояниям системы отвечают лишь вещественные значения переменных; 2^0—что функции X_s в дифференциальных уравнениях движения суть периодические относительно t с одним общим им всем периодом τ; 3^0—что в своем движении точка P не выйдет из некоторой замкнутой области R, если ее начальное положение P_0 находится где-либо внутри определенной области r_0, 4^0—что

$$Mes\, W_k \geqslant \mu\, Mes\, W_0,$$

где

$$Mes\, W_k = \int_{W_k} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

обозначает меру множества W_k (объем в смысле Лебега (Lebesgue), какое заполняют в момент $t = t_0 + k\tau$ движущиеся точки, вышедшие в t_0 из W_0; k некоторое целое число; постоянная μ предполагается не бесконечно малой,—при этом оказывается—*почти всюду (кроме, быть может, множества точек меры нуля) в области r_0 траектории имеют устойчивость в смысле Пуассона.*

2. Доказательство.

Движущиеся точки, какие в начальный момент времени t_0 занимали некоторое множество B_j, через время kt будут занимать некоторое иное множество $B_j^{(k)}$. Условимся говорить, что $B^{(k)}$ есть *к-тое отвечающее* (положение) для B_j.

[1]) В настоящей заметке излагается основная для теории устойчивости в смысле Пуассона (Poisson) теорема, какую я дал в *Comptes Rendus*, t. 187, 1928, p. 637.

Прежде всего отметим, что, если отвечающие $B_j^{(i)}$ и $B_j^{(i+k)}$ имеют при рассматриваемом движении (непустую) общую часть, то общую часть будут иметь также и множества B_j и $B_j^{(k)}$. Действительно, так как дифференциальные уравнения суть периодические относительно времени t с периодом τ, то траектория произвольной точки будет одной и той же безразлично, есть ли начальное значение времени t_0, или $t_0+k\tau$, где k—произвольное целое число. Отсюда ясно, что точки, занимающие в момент $t_0+k\tau$ множества B_j и $B_j^{(k)}$, через время $i\tau$ (i—целое число) будут заполнять соответственно множества B_j^i и $B_j^{(i+k)}$; если последние имеют общую часть, то, следовательно, общую часть необходимо имели и множества B_j и $B_j^{(k)}$.

Обозначим теперь через $A(h)$ множество точек P_0 внутри области r_0, для которых расстояние $P_0 P_i$ больше h; P_i есть положение P_0 в момент времени $t_0+i\tau$.

Для произвольного h, сколь бы мало оно ни было, множество $A(h)$ имеет измеримый в смысле Лебега объем.

Докажем, что

$$Mes\ A(h) = 0.$$

Для этого разобьем область r_0 на счетное множество областей

$$u_1, u_2, \dots, u_j, \dots$$

так, чтобы диаметры их были меньше h, и положим, что B_j есть множество точек общих $A(h)$ и U_j

$$B_j = A(h)\ U_j.$$

Отсюда имеем

$$Mes\ A(h) \leqslant \sum_j Mes\ B_j. \tag{1}$$

Отвечающие $B_j^{(i)}$ и $B_j^{(i+k)}$ не могут иметь общих точек, так как тогда общую часть имели бы множества B_j и $B_j^{(k)}$; иными словами в B_j нашлись бы тогда точки P_0, для которых расстояние $P_0 P_k$ было бы меньше h,—что невозможно.

Но $B_j^{(i)}$ суть множества измеримые и находятся очевидно внутри замкнутой области R; значит,

$$\sum_j Mes\ B_j^{(i)} < Mes\ R. \tag{2}$$

Вследствие нашего предположения 4° имеем

$$Mes\ B_j^{(i)} \geqslant \mu\ Mes\ B_j.$$

Отсюда ясно, что неравенство (2) не может иметь места, кроме как при

$$Mes\ B_j = 0.$$

Из (1) поэтому следует

$$Mes\ A(h) = 0,$$

т. е. сколь бы мало h не было, множество $A(h)$ точек P_0 области r_0

таких, что ни одна из отвечающих P_i не отстоит от P_0 ближе h, всегда имеет меру нуль, что и требовалось доказать.

3. *Примечание.*

В заключение следует отметить, что теорема остается также справедливой, если вместо объема в смысле Лебега существует некоторый положительный интеграл

$$J = \int\limits_W M dx_1\, dx_2 \ldots dx_n\,,$$

который для значений времени $t = t_0 + k\tau$ не меньше некоторой не бесконечно малой части μ своего начального значения. В этом случае движение точки P может быть не связано условием 3^0 оставаться всегда внутри некоторой конечной, замкнутой области R, если последний интеграл, распространенный на все пространство, имеет конечное значение.

Для того частного случая, когда X_s не зависят от времени t и последний интеграл является интегральным инвариантом, теорема впервые была подмечена Пуанкаре (Poincaré) в работе «Sur le probléme des trois corps et les équations de la dynamique» [1]). Оставляющее желать большего в строгости доказательство Пуанкаре улучшено Каратеодори [2]).

Вопрос о существовании предположения 4^0 в конкретных примерах представляет некоторые трудности. Но во всяком случае ясно, что, если траектории, выходящие из r_0 в момент времени t_0, не проходят особенных точек системы дифференциальных уравнений движения, то это условие удовлетворено. В общих случаях иногда бывает удобнее искать дифференциальное уравнение, какому удовлетворяет J.

Вопрос об области R особенно просто разрешается, когда известен один или несколько интегралов системы дифференциальных уравнений движения. Пусть

$$F(t, x_1, x_2 \ldots, x_n) = Const$$

интеграл, известный нам наперед, и C есть начальное значение постоянной.

Область R при этом будет внутри области, которую опишут поверхности

$$F(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = C$$

при изменении t от нуля до произвольно больших значений. Когда F не содержит явно времени, область R будет частью сколь угодно тонкой полы

$$C - \varepsilon < F < C + \varepsilon.$$

---

[1]) Acta mathematica, v. 13, p. 69.

[2]) Carathéodory, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Iuli, 1919.