Известия вузов. Математика
2016, № 5, с. 59–69

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Л.В. ШИРОКОВ

О ПРОДОЛЖЕНИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ, ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ И РЕТРАКТАХ

Аннотация. Одним из основополагающих понятий теории продолжения, развитой в работах А.Н. Дранишникова и Е.В. Щепина, является понятие отношения экстенсивности, введенное К. Куратовским. В данной статье приводится описание поведения отношения экстенсивности по отношению к некоторым типам подпространств топологических произведений и пространств, являющихся стоун-чеховскими компактификациями дискретных сумм гильбертова куба.

Ключевые слова: топологическое пространство, непрерывное отображение, компакт, тихоновский куб, гильбертов куб, стоун-чеховская компактификация, ретракт.

УДК: 515.12

Введенное К. Куратовским отношение $X\tau Y$ (отношение экстенсивности) привело к построению и развитию теории, получившей название “Теория продолжения”, наиболее значительными результатами которой являются найденные и получившие описание на языке экстенсивности характеристики топологической и гомологической размерности. Подробное описание достижений теории продолжения содержится в работах [1], [2] [3]–[7].

Именно развитие этой теории привело к постановке вопросов, рассмотренных в данной статье, суть которых заключается в исследовании поведения отношения экстенсивности в случае рассмотрения некоторых типов подпространств топологических произведений и пространств, являющихся стоун-чеховскими компактификациями дискретных сумм гильбертова куба.

Другой отправной точкой исследований, приведенных в работе, является доказанное автором равенство $\mathrm{Ext}_\beta(B^n) = \mathrm{AE}(n)$ [8].

Определение всех используемых понятий, терминов и обозначений можно найти в работах [1]–[7]. Компакт — компактное хаусдорфово пространство, не обязательно метризуемое, AR — класс компактных абсолютных ретрактов, Q — гильбертов куб.

Для формулировки основных результатов статьи потребуется определение следующих понятий и обозначений.

Пусть X и Y — топологические пространства. Запись $X\tau Y$ [6] означает, что для любого замкнутого подмножества $F \subset X$ и любого непрерывного отображения $f : F \to Y$ существует непрерывное продолжение $\overline{f} : X \to Y$. Другое обозначение для этого свойства — $Y \in AE(X)$ [1]. Пространство K называется абсолютным экстензором для класса пространств $\Im$, если все задачи продолжения на X по отношению к K для всех $X \in \Im$ имеют решения ($K \in AE(\Im)$) [1].

Пусть X — компакт и $\Im$ — класс пространств, являющихся стоун-чеховскими компактификациями дискретных сумм компакта X. Положим $\mathrm{Ext}_\beta(X) = \mathrm{AE}(\Im)$.

Поступила 22.09.2014

Всюду далее произведения топологических пространств наделены тихоновской топологией [7].

Если $X = \prod\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ — произведение топологических пространств X_α и $B \subset A$, то через X_B обозначается грань $\prod\{X_\alpha : \alpha \in B\}$. Естественная проекция пространства X на грань X_B обозначается через pr_B.

Пусть $X = \prod\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ — произведение топологических пространств X_α и $L \subset A$, причем $A \setminus L \neq \varnothing$.

Определение 1. Замкнутое подмножество $F(L)$ пространства X называется накрытием грани $X_{A\setminus L}$ с основанием L (или просто накрытием с основанием L), если

$$pr_{A\setminus L}(F(L)) = X_{A\setminus L}.$$

Технологии применения теории накрытий произведений оказались весьма эффективными при изучении непрерывных образов всюду плотных подпространств топологических произведений.

Основными результатами работы являются следующие утверждения.

Теорема 1. *Если $I^\tau = \prod\{I_\alpha : \alpha \in A\}$ — тихоновский куб веса $\tau > \omega_0$, $F(L)$ — накрытие в I^τ с основанием L мощности $< \tau$, то* $\mathrm{Ext}_\beta(F(L)) = \mathrm{Ext}_\beta(I^\tau)$.

Теорема 2. *Если вес компакта K равен $\aleph_1$ и $K \in \mathrm{Ext}_\beta(Q)$, то $K \in AR$.*

Теорема 3. *Если компакт K веса $\aleph_1$ является непрерывным образом открытого подмножества тихоновского куба, то* $\mathrm{Ext}_\beta(K) = AR$.

Следующее понятие является ключевой деталью проведенных в данной работе исследований. Если K — топологическое пространство, то через τ_K обозначается топология пространства K.

Определение 2. Пусть $F \subset X$ и $f : F \to Y$ — сюръективное отображение. Оператор $e : \tau_Y \to \tau_X$ называется d-регулярным оператором продолжения открытых множеств, если e удовлетворяет следующим условиям:

1) $e(U) \cap F = f^{-1}(U)$ для любого $U \in \tau_Y$,
2) $e(\varnothing) = \varnothing$, $e(Y) = X$,
3) $e(U \cap V) = e(U) \cap e(V)$ для любых $U, V \in \tau_Y$.

Отображение $f : F \to Y$, для которого существует d-регулярный оператор продолжения открытых множеств, называется d-регулярным.

Если f — гомеоморфизм, то оператор e называется d-регулярным оператором продолжения открытых множеств пространства F.

Вопросам теории операторов продолжения открытых множеств (операторов продолжения топологий) посвящена обширная литература, в том числе работы [8], [3], [9].

Следующие свойства $\mathrm{Ext}_\beta(X)$ подчеркивают особую роль $\mathrm{Ext}_\beta(X)$ в теории продолжения непрерывных отображений и в приведенных в статье результатах.

Свойство 1. Всякий компакт $K \in \mathrm{Ext}_\beta(X)$ является пространством Дугунджи.

Доказательство. Рассмотрим произвольное вложение K в тихоновский куб I^τ, семейство $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $f_\alpha : X_\alpha \to I^\tau$, $X_\alpha = X$ всевозможных непрерывных отображений компакта X в I^τ, пространство $Y = \bigoplus\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$, являющееся дискретной суммой пространств X_α и непрерывное отображение $f : Y \to I^\tau$, совпадающее на каждом слагаемом X_α с отображением f_α. Пусть $\overline{f} : \beta Y \to I^\tau$ — непрерывное продолжение отображения f на стоун-чеховское расширение пространства Y. Так как $K \in \mathrm{Ext}_\beta(X)$, то существует непрерывное отображение

$g : \beta Y \to K$ такое, что $g|\overline{f}^{-1}(K) = \overline{f}$. Определим оператор продолжения e открытых множеств пространства K, положив $e(U) = \overline{f}^{\#}(g^{-1}(U))$ для каждого $U \in \tau_K$. Непосредственная проверка показывает, что e является d-регулярным оператором продолжения открытых множеств и, следовательно, компакт K является пространством Дугунджи [8]. □

Замечание. Здесь уместно отметить доказанное автором равенство $AE(0) = \mathrm{Ext}_\beta(\{*\})$ ($\{*\}$ — одноточечное пространство) [4].

Свойство 2. Если компакт $X = X_1 \cup X_2$, где X_1,X_2 — замкнутые подпространства X, то $\mathrm{Ext}_\beta(X) = \mathrm{Ext}_\beta(X_1) \cap \mathrm{Ext}_\beta(X_2)$.

Доказательство этого свойства стандартно и основывается на свойствах стоун-чеховских компактификаций нормальных пространств. В частности, справедливо

Свойство 3. Если X — компакт и X' — замкнутое подпространство X, то $\mathrm{Ext}_\beta(X) \subset \mathrm{Ext}_\beta(X')$.

Нетрудно убедиться в справедливости свойств 4 и 5.

Свойство 4. Если $f : X \to Y$ — мягкое отображение компактов, то $\mathrm{Ext}_\beta(X) \subset \mathrm{Ext}_\beta(Y)$.

Свойство 5. Для любых компактов X_1 и X_2 выполняется

$$\mathrm{Ext}_\beta(X_1 \times X_2) \subset \mathrm{Ext}_\beta(X_1) \cap \mathrm{Ext}_\beta(X_2).$$

Свойство 6. Размерность $\dim X \le n$ тогда и только тогда, когда выполняется $\mathrm{Ext}_\beta(B^n) \subset \mathrm{Ext}_\beta(X)$ (B^n — n-мерный шар).

В основе доказательства свойства 6 лежит равенство $AE(T^n) = AE(n)$ [8] ($AE(n)$ — класс компактов, являющихся абсолютными экстензорами в размерности n) и следующая характеристика лебеговой размерности компактов, данная П.С. Александровым: $\dim X \le n$ тогда и только тогда, когда все задачи продолжения на X отображений в n-мерную сферу S^n разрешимы [1].

Несложное применение свойства 6 позволяет доказать справедливость следующего свойства 7.

Свойство 7. Если компакт X содержит B^n, то $\dim X \le n$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ext}_\beta(B^n) = \mathrm{Ext}_\beta(X)$.

Свойство 8. $\mathrm{Ext}_\beta(X) = AE(\beta(\oplus X))$.

Доказательство. Пусть $Y = \beta\Big(\bigoplus\limits_{\alpha\in A} X_\alpha\Big)$, где $X_\alpha = X$ для любого $\alpha \in A$ и $\overline{Y} = \beta\Big(\bigoplus\limits_{\beta\in B} Y_\beta\Big)$, где $Y_\beta = Y$ для каждого $\beta \in B$. Положим $X_\alpha = X_\alpha^\beta$ для каждого $\alpha \in A$, $\beta \in B$, где индекс β показывает участие X_α в формировании Y_β. Справедлива формула

$$\overline{Y} = \beta\Bigg(\bigoplus_{\substack{\alpha\in A\\ \beta\in B}} X_\alpha^\beta\Bigg),$$

которая обеспечивает включение $\mathrm{Ext}_\beta(X) \subset AE(\beta(\oplus X))$. Применение свойства 3 завершает доказательство. □

Через bX обозначается некоторая компактификация пространства X.

Свойство 9. Пусть $X = \bigoplus\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ (A бесконечно), где X_α — компакт для каждого $\alpha \in A$. Тогда $\mathrm{Ext}_\beta(bX) \subset \mathrm{Ext}_\beta(\beta X)$.

Доказательство. Положим $Y_\alpha = bX$ для каждого $\alpha \in A$ и $Y = \beta\Big(\bigoplus\limits_{\alpha\in A} Y_\alpha\Big)$. В силу свойств 3 и 8 достаточно построить замкнутое подмножество Y, гомеоморфное βX. Выберем в каждом Y_α компакт X_α, участвующий в формировании, X и пусть Z — объединение всех таких X_α. Ясно, что Z является замкнутым подмножеством $\bigoplus\limits_{\alpha\in A} Y_\alpha$. Тогда множество $Z' = [Z]_Y = \beta Z$ является искомым. □

Учитывая равенство $AE(T^n) = AE(n)$ ([8]), получаем

Свойство 10. $\mathrm{Ext}_\beta\left(b\Big(\bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} I^n\Big)\right) \subset \mathrm{Ext}_\beta\left(\beta\Big(\bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} I^n\Big)\right) \subset AE(\infty) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} AE(n)$.

Далее αX — александровская компактификация локально компактного хаусдорфова некомпактного пространства X.

Свойство 11. $\mathrm{Ext}_\beta\left(\alpha\Big(\bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} I^n\Big)\right) \subset \mathrm{Ext}_\beta\left(\beta\Big(\bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} I^n\Big)\right) \subset AE(\infty) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} AE(n)$.

Доказательство обеспечивает свойство 3.

Пусть X — компакт и F — замкнутое подмножество X. Будем писать $X \underset{n}{>} F$ [6], если для любого (некоторого) вложения X в любой (некоторый) тихоновский куб I^τ и для любой окрестности U компакта X в I^τ найдется такая окрестность V компакта F в I^τ, что $V \subset U$ и всякое непрерывное отображение $f : S^{n-1} \to V$ (S^k — k-мерная сфера) гомотопно постоянному в U.

Компакт X называется UV^n-компактом (является аппроксимативно n-связным), если $X \underset{i}{>} X$ для любого $i \le n+1$. Компакт X называется UV^∞-компактом, если для некоторого вложения X в некоторый тихоновский куб I^τ и любой окрестности U компакта X в I^τ найдется такая окрестность V компакта X в I^τ, что $V \subset U$ и вложение $V \to U$ гомотопно постоянному отображению V в U.

Свойство 12. Пусть $K \in \mathrm{Ext}_\beta(X)$, причем X является UV^{n-1}-компактом и для любого непрерывного отображения $\phi : S^k \to K$, $k < n$, существуют непрерывные отображения $\phi_1 : S^k \to X$ и $\phi_2 : X \to K$ такие, что $\phi = \phi_2\phi_1$. Тогда $K \in AE(n)$.

Доказательству свойства 12 предпошлем обсуждение следующих вопросов, имеющих и самостоятельный интерес.

В дальнейшем (P, P') — пара, состоящая из компакта P и его замкнутого подпространства P'.

Определение 3. Компакт X называется $UV^{(P,P')}$-компактом, если для любого (некоторого) вложения X в любой (некоторый) тихоновский куб I^τ и для любой окрестности U компакта X в I^τ найдется такая окрестность V компакта X в I^τ, что $V \subset U$ и всякое непрерывное отображение $f : P' \to V$ непрерывно продолжается на P со значениями в U.

Напомним, что для систем ω и ω' подмножеств множества A имеем

$$\omega \wedge \omega' = \{V \cap V' : V \in \omega,\ V' \in \omega'\}.$$

Определение 4. Семейство $A \subset \tau_X$ (τ_X — топология пространства X) называется слабо (P, P')-регулярной базой компакта X, если существует отображение $\varphi : \tau_X \to 2^A$ ($\varphi(U) = A_U$), удовлетворяющее условиям

1) $\cup A_U = U$ для каждого $U \in \tau_X$,

2) $A_U \wedge A_V \subset A_{U\cap V}$ для любых $U, V \in \tau_X$,

3) $X \in A_X$,

4) для любого $W \in A_U$ каждое непрерывное отображение $\phi : P' \to W$ непрерывно продолжается на компакт P со значениями в любой наперед заданной окрестности множества U в любом (некотором) содержащем компакт X тихоновском кубе.

Определение 5. Компакт X называется аппроксимативно (P, P')-связным, если X является пространством Дугунджи и обладает слабо (P, P')-регулярной базой.

Теорема 4. *Пусть $K \in \mathrm{Ext}_\beta(X)$, причем X является $UV^{(P,P')}$-компактом и для любого непрерывного отображения $\phi : P' \to K$ существуют непрерывные отображения $\phi_1 : P' \to X$ и $\phi_2 : X \to K$ такие, что $\phi = \phi_2\phi_1$. Тогда K является аппроксимативно (P, P')-связным.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное вложение K в тихоновский куб I^τ и оператор e продолжения открытых множеств пространства K, построенный при доказательстве свойства 1. Покажем, что компакт K обладает слабо (P, P')-регулярной базой.

Пусть $I^\tau = \prod\limits_{\alpha<\tau} I_\alpha$. Для каждого $\alpha < \tau$ через η_α обозначим базу I_α, образованную, например, интервалами с рациональными концами. Положим $H(V_{\alpha_1} \dots V_{\alpha_s}) = \prod\limits_{\alpha<\tau} Y_\alpha$, где $Y_{\alpha_1} = V_{\alpha_1} \in \eta_{\alpha_1}$, $Y_{\alpha_s} = V_{\alpha_s} \in \eta_{\alpha_s}$ и $Y_\alpha = I_\alpha$ для всех остальных α. Положим также $H = \{H(V_{\alpha_1} \dots V_{\alpha_s})\}$. Покажем, что семейство

$$A = \{H(V_{\alpha_1} \dots V_{\alpha_s}) \cap X : H(V_{\alpha_1} \dots V_{\alpha_s}) \in H\}$$

является слабо (P, P')-регулярной базой компакта X.

Определим отображение $\varphi : \tau_X \to 2^A$ следующим образом.

Положим $\varphi(U) = A_U = \{H(V_{\alpha_1} \dots V_{\alpha_s}) \cap X : [H(V_{\alpha_1} \dots V_{\alpha_s})] \subset e(U)\}$ для каждого $U \in \tau_X$.

Ясно, что φ удовлетворяет условиям 1–3 вышеприведенного определения. Далее используем обозначения, принятые при доказательстве свойства 1. Рассмотрим произвольное вложение $\psi : \beta Y \to I^{\tau'}$ в некоторый тихоновский куб $I^{\tau'}$ и непрерывное продолжение $\overline{g} : I^{\tau'} \to I^\tau$ отображения g.

Пусть $\phi : P' \to W \in A_U$ — произвольное непрерывное отображение и $H(V_{\alpha_1} \dots V_{\alpha_s}) \subset e(U)$ такое, что $[H(V_{\alpha_1} \dots V_{\alpha_s})] \subset e(U)$ и $H(V_{\alpha_1} \dots V_{\alpha_s}) \cap X = W$. Рассмотрим произвольную окрестность $\overline{U}$ множества U в тихоновском кубе I^τ и покажем, что отображение ϕ непрерывно продолжается на P со значениями в $\overline{U}$.

Пусть $\phi_1 : P' \to X$ и $\phi_2 : X \to K$ — непрерывные отображения такие, что $\phi = \phi_2\phi_1$. Так как $[H(V_{\alpha_1} \dots V_{\alpha_s})]$ — абсолютный экстензор, то существует непрерывное отображение $\overline{\phi} : X \to [H(V_{\alpha_1} \dots V_{\alpha_s})]$, совпадающее на $\phi_1(P')$ с ϕ_2.

Тогда по определению оператора e существует непрерывное отображение $\phi_3 : X \to U$, совпадающее на $\phi_1(P')$ с ϕ_2. По условию теоремы отображение ϕ_1 непрерывно продолжается на P со значениями в $\overline{g}^{-1}(\overline{U})$. Обозначим это продолжение через ϕ_4.

Отображение $\overline{g}\phi_4$ обеспечивает непрерывное продолжение на P отображения ϕ со значениями в $\overline{U}$. □

Следствие 1. Если X — бесконечный связный компакт, то $\mathrm{Ext}_\beta(X) \subset AE(1)$.

Следствие 2. Если X — компакт и $\dim X = n$, то $\mathrm{Ext}_\beta(X) = AE(1)$.

Теперь справедливость свойства 12 вытекает из теоремы 4 и результатов работы [5].

Доказательство свойства 13 аналогично.

Свойство 13. Если UV^{n-1}-компакт K удовлетворяет условию $K \in \mathrm{Ext}_\beta(K)$, то

$$K \in AE(n).$$

Свойство 13 показывает насколько в данном контексте условие $K \in \mathrm{Ext}_\beta(K)$ влияет на свойства компакта K. Такая постановка вопроса инспирирована следующими утверждениями (свойства 14–16).

Свойство 14. Если компакт $X \in \mathrm{Ext}_\beta(X \times Y)$ для некоторого компакта Y, содержащего отрезок I, то $X \in AE(\infty) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} AE(n)$.

Свойство 15. Если X является UV^∞-компактом и $X \in \mathrm{Ext}_\beta(X)$, то $X \in AE(\infty)$.

Справедливость свойств 14 и 15 вытекает из следующих двух лемм, доказательство которых проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 4.

Определение 6. Пара (P, P') называется экстенсивно гомотопически тривиальной по отношению к пространству X, если возможность непрерывного продолжения произвольного непрерывного отображения $f : P' \to X$ на P равносильна гомотопности f постоянному отображению.

Замечание. Термин “экстенсивность” заимствован из работ [1], [2].

Лемма 1. *Если компакт $X \in \mathrm{Ext}_\beta(X)$, то существует семейство $A \subset \tau_X$ и отображение $\varphi : \tau_X \to 2^A$ ($\varphi(U) = A_U$), удовлетворяющее условиям*
1) $\cup A_U = U$ *для каждого* $U \in \tau_X$,
2) $A_U \wedge A_V \subset A_{U \cap V}$ *для любых* $U, V \in \tau_X$,
3) $X \in A_X$,
4) *для любого* $W \in A_U$ *каждое непрерывное отображение замкнутого подпространства компакта* X *в* W *непрерывно продолжается на* X *со значениями в* U.

Лемма 2. *Если компакт $X \in \mathrm{Ext}_\beta(X \times I)$ и пара (P, P') экстенсивно гомотопически тривиальна по отношению к пространству X, то существует семейство $A \subset \tau_X$ и отображение $\varphi : \tau_X \to 2^A$ ($\varphi(U) = A_U$), удовлетворяющее условиям*
1) $\cup A_U = U$ *для каждого* $U \in \tau_X$,
2) $A_U \wedge A_V \subset A_{U \cap V}$ *для любых* $U, V \in \tau_X$,
3) $X \in A_X$,
4) *для любого* $W \in A_U$ *каждое непрерывное отображение* P' *в* W *непрерывно продолжается на* P *со значениями в* U.

Свойство 16. Если $X \in \mathrm{Ext}_\beta(X)$ и X несвязно, то X является нульмерным пространством Дугунджи.

Доказательство. В силу свойства 1 компакт X является пространством Дугунджи. Докажем нульмерность компакта X. Пусть $x \in X$ и U – произвольная окрестность точки x. Так как X несвязно, то $X = F_1 \cup F_2$, где $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, $F_1, F_2 \neq \varnothing$ и F_1, F_2 открыто-замкнуты в X. Рассмотрим непрерывное отображение $f : F \to X$, где $F = \{x\} \cup (X \setminus U)$, определенное правилом $f(x) = y_1$, $y_1 \in F_1$ и $f(z) = y_2$, $y_2 \in F_2$ для любого $z \in X \setminus U$ (y_1, y_2 — фиксированные произвольным образом точки соответственно в F_1 и F_2). По условию, существует непрерывное отображение $\overline{f} : X \to X$ такое, что $\overline{f}|F = f$. Множество $V = X \setminus \overline{f}^{-1}(F_2)$ является искомой открыто-замкнутой окрестностью точки x, содержащейся в U. □

Пусть $X = \prod\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ — произведение топологических пространств X_α. Через $H(V_{\alpha_1} \ldots V_{\alpha_s})$ обозначается произведение $\prod\{Y_\alpha : \alpha \in A\}$, где $Y_{\alpha_1} = V_{\alpha_1} \subset X_{\alpha_1}$, $Y_{\alpha_s} = V_{\alpha_s} \subset X_{\alpha_s}$ и $Y_\alpha = X_\alpha$ для всех остальных индексов $\alpha \in A$. Множество $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ называется основанием множества $H(V_{\alpha_1} \ldots V_{\alpha_s})$.

Пусть далее v — некоторое подмножество множества A. Множество $H_v^{i(v)}$ тех точек $x = (x_\alpha) \in X$, у которых для всех $\alpha \in v$ значения x_α фиксированы и принадлежат множеству $i(v) = i_\alpha$, а все остальные координаты произвольны, называется слоем пространства X с основанием v (Б.А. Ефимов). Ясно, что если $A \setminus v \neq \varnothing$, то каждый слой с основанием v является накрытием с тем же основанием. Множество $H_v^{i(v)} \cup \{x\}$, где $A \setminus v \neq \varnothing$, а $x \in X \setminus H_v^{i(v)}$, является примером накрытия, не являющегося слоем. Оказывается, что во многих случаях накрытие с основанием мощности $\leq \tau$ содержит слой с основанием той же мощности. Далее $|A|$ — мощность множества A.

Лемма 3. *Пусть $X = \prod\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ — произведение компактов X_α, $F(L)$ — накрытие с основанием L мощности $\leq \tau$ и вес X_α не превосходит τ для любого $\alpha \in L$, где τ — бесконечный кардинал. Тогда множество $F(L)$ содержит слой H с основанием мощности $\leq \tau$.*

Доказательство. Если $|A| \leq \tau$, то выберем произвольную точку $x \in F(L)$ и положим $H = \{x\}$.

Пусть $|A| > \tau$. Построение слоя H проведем по трансфинитной индукции. Рассмотрим базу $\eta = \{U_k : k \in K\}$ пространства X_L мощности $\leq \tau$. Зафиксируем на множестве K некоторое вполне упорядочение $(K, <)$ и рассмотрим наименьший элемент $k_1 \in K$ такой, что $\mathrm{pr}_L(F(L)) \setminus [U_{k_1}]_{X_L} \neq \varnothing$ и $\mathrm{pr}_L(F(L)) \cap U_{k_1} \neq \varnothing$.

Далее, положим $F_1^1 = \mathrm{pr}_L(F(L)) \cap [U_{k_1}]_{X_L}$ и $F_2^1 = \mathrm{pr}_L(F(L)) \setminus U_{k_1}$. Тогда $\mathrm{pr}_L(F(L)) = F_1^1 \cup F_2^1$. Отсюда следует $X_{A\setminus L} = \overline{F}_1^1 \cup \overline{F}_2^1$, где $\overline{F}_1^1 = \mathrm{pr}_{A\setminus L}(\mathrm{pr}_L^{-1}(F_1^1)) \cap F(L)$ и $\overline{F}_2^1 = \mathrm{pr}_{A\setminus L}(\mathrm{pr}_L^{-1}(F_2^1)) \cap F(L)$, т. е. либо множество $\overline{F}_1^1$, либо множество $\overline{F}_2^1$ имеет непустую внутренность в $X_{A\setminus L}$. Пусть, например, множество $\overline{F}_1^1$ удовлетворяет этому условию. Выберем в $\overline{F}_1^1$ слой $H_{v_1}^{i(v_1)}$ с конечным основанием v_1 и положим $F_1 = (F_1^1 \times H_{v_1}^{i(v_1)}) \cap F(L)$ и $A_1 = (A \setminus L) \setminus v_1$. Если $|\,\mathrm{pr}_L(F_1)| = 1$, то положим $H = F_1$, в противном случае продолжаем построение по индукции.

Предположим, что для каждого $k < \overline{k}$ множества F_k и A_k построены, причем выполняются следующие условия:

1) если $k' \leq k'' < \overline{k}$, то $F_{k''} \subset F_{k'}$ и $A_{k''} \subset A_{k'}$,

2) для любого $k < \overline{k}$ множество F_k является накрытием с основанием $A \setminus A_k$,

3) $|\,\mathrm{pr}_{A\setminus(L\cup A_k)}(F_k)| = 1$ для любого $k < \overline{k}$,

4) $|A \setminus (L \cup A_k)| \leq \tau$ для любого $k < \overline{k}$.

Положим $F_{\overline{k}}' = \cap\{F_k : k < \overline{k}\}$ и $A_{\overline{k}}' = \cap\{A_k : k < \overline{k}\}$. Ясно, что множество $F_{\overline{k}}'$ является накрытием с основанием $A \setminus A_{\overline{k}}'$ мощности $\leq \tau$.

Если $|\,\mathrm{pr}_L(F_{\overline{k}}')| = 1$, то положим $H = F_{\overline{k}}'$ и построение завершено, в противном случае рассмотрим наименьший элемент $k_{\overline{k}} \in K$ такой, что

$$\mathrm{pr}_L(F_{\overline{k}}') \setminus [U_{k_{\overline{k}}}]_{X_L} \neq \varnothing \quad \text{и} \quad \mathrm{pr}_L(F_{\overline{k}}') \cap U_{k_{\overline{k}}} \neq \varnothing.$$

Положим $F_1^{\overline{k}} = \mathrm{pr}_L(F_{\overline{k}}') \cap [U_{k_{\overline{k}}}]_{X_L}$ и $F_2^{\overline{k}} = \mathrm{pr}_L(F_{\overline{k}}') \setminus U_{k_{\overline{k}}}$. Тогда $\mathrm{pr}_L(F_{\overline{k}}') = F_1^{\overline{k}} \cup F_2^{\overline{k}}$. Отсюда следует $X_{A_{\overline{k}}'} = \overline{F}_1^{\overline{k}} \cup \overline{F}_2^{\overline{k}}$, где

$$\overline{F}_1^{\overline{k}} = \mathrm{pr}_{A_{\overline{k}}'}(\mathrm{pr}_L^{-1}(F_1^{\overline{k}}) \cap F_{\overline{k}}')$$

и

$$\overline{F}_2^{\overline{k}} = \mathrm{pr}_{A_{\overline{k}}'}(\mathrm{pr}_L^{-1}(F_2^{\overline{k}}) \cap F_{\overline{k}}'),$$

т. е. либо множество $\overline{F}_1^{\overline{k}}$, либо множество $\overline{F}_2^{\overline{k}}$ имеет непустую внутренность в $X_{A_{\overline{k}}'}$. Пусть, например, множество $\overline{F}_2^{\overline{k}}$ удовлетворяет этому условию.

Выберем в $\overline{F}_2^{\overline{k}}$ слой $H_{v_{\overline{k}}}^{i(v_{\overline{k}})}$ с конечным основанием $v_{\overline{k}}$ и положим

$$F_{\overline{k}} = (F_2^{\overline{k}} \times \mathrm{pr}_{A\setminus(L\cup A_{\overline{k}}')}(F_{\overline{k}}') \times H_{v_{\overline{k}}}^{i(v_{\overline{k}})}) \cap F_{\overline{k}}'$$

и $A_{\overline{k}} = A_{\overline{k}}' \setminus v_{\overline{k}}$.

Если $|\,\mathrm{pr}_L(F_{\overline{k}})| = 1$, то положим $H = F_{\overline{k}}$, и построение завершено, в противном случае продолжаем построение по индукции. Покажем, что $k_{\overline{k}} \geq \overline{k}$. Допустим противное и рассмотрим наименьший элемент $k^* \in K$ такой, что $k_0 = k_{k^*} < k^*$. Тогда имеем $k_{k_0} > k_{k^*}$ и получаем противоречие с тем, что k_{k_0} — наименьший элемент множества K, для которого выполняется $\mathrm{pr}_L(F_{k_0}{}') \setminus \left[U_{k_{k_0}}\right]_{X_L} \neq \varnothing$ и $\mathrm{pr}_L(F_{k_0}{}') \cap U_{k_{k_0}} \neq \varnothing$.

Так как X — компакт, то множество $H = \cap\{F_k : k \in K\}$ не пусто. Положим $A' = \cap\{A_k : k \in K\}$. Так как $|A \setminus A'| \leq \tau$, $\mathrm{pr}_{A'}(H) = X_{A'}$ и $|\,\mathrm{pr}_{A\setminus A'}(H)| = 1$, то множество H является искомым слоем. □

Доказательство теоремы 1. В силу леммы 3 накрытие $F(L)$ содержит слой H с основанием мощности $< \tau$. Тогда H гомеоморфно I^τ и, следовательно, $\mathrm{Ext}_\beta(H) = \mathrm{Ext}_\beta(I^\tau)$. Для завершения доказательства остается воспользоваться свойством 3 классов $\mathrm{Ext}_\beta(X)$. □

Непосредственная проверка показывает, что справедливо

Предложение. *Пусть $X \subset X_1 \times X_2$, причем существует ретракция $\varphi : X_1 \to \mathrm{pr}_{X_1}(X)$ и существует непрерывное отображение $\varphi' : \mathrm{pr}_{X_1}^{-1}(\mathrm{pr}_{X_1}(X)) \to X$, удовлетворяющее условию $\varphi'(x) \in \mathrm{pr}_{X_1}^{-1}(\mathrm{pr}_{X_1}(x)) \cap X$ для любого $x \in \mathrm{pr}_{X_1}^{-1}(\mathrm{pr}_{X_1}(X))$, и пусть $\varphi'' : X_1 \times X_2 \to \mathrm{pr}_{X_1}(X) \times X_2$ — отображение $\varphi \times id_{X_2}$. Тогда отображение $\psi = \varphi'\varphi''$ является ретракцией $X_1 \times X_2$ на X, причем для любого $x \in X_1 \times X_2$ выполняется $\varphi(\mathrm{pr}_{X_1}(x)) = \mathrm{pr}_{X_1}(\psi(x))$.*

Доказательство теоремы 2. Пусть $K \subset I^{\aleph_1} = \prod\{I_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, $A = \{\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Для каждого $\alpha < \omega_1$ через η_α обозначим базу I_α, образованную интервалами с рациональными концами, и положим $H(V_{\alpha_1} \dots V_{\alpha_s}) = \prod\{Y_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, где $Y_{\alpha_1} = V_{\alpha_1} \in \eta_{\alpha_1}$, $Y_{\alpha_s} = V_{\alpha_s} \in \eta_{\alpha_s}$ и $Y_\alpha = I_\alpha$ для остальных α. Семейство всех множеств вида $H(V_{\alpha_1} \dots V_{\alpha_s})$ обозначим через $\mathbb{H}$.

Если U — открытое подмножество I^τ, то через $v(U)$ обозначим счетное индексное подмножество такое, что $\mathrm{pr}_{v(U)}^{-1}(\mathrm{pr}_{v(U)}[U]) = [U]$, где $\mathrm{pr}_{v(U)}$ — проекция $I^{\aleph_1}$ на соответствующую грань. Так как $v(U)$ может принимать различные значения, то $v(U) \subset B$ означает, что одно из них является подмножеством B.

Рассмотрим всевозможные гомеоморфизмы g_β гильбертова куба Q_β в $I^{\aleph_1}$, $\beta \in B$ (каждое Q_β гомеоморфно гильбертову кубу Q). Пусть g — отображение пространства $Y = \{\oplus Q_\beta : \beta \in B\}$ на $I^{\aleph_1} = \prod\{I_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, совпадающее на каждом Q_β с g_β, $\overline{g}$ — его непрерывное продолжение на βY и пусть $f : \beta Y \to K$ — непрерывное отображение, совпадающее с $\overline{g}$ на $\overline{g}^{-1}(K)$.

Оператор продолжения e открытых множеств компакта K ([4], [9]) определим правилом $e(U) = \overline{g}^{\#}(f^{-1}(U))$ для любого $U \in \tau_K$ (τ_K — топология пространства K).

Для каждого $H(V_\alpha) \in \mathbb{H}$, $\alpha < \omega_1$, зафиксируем счетное покрытие $\mathbb{H}(V_\alpha)$ множества $H(V_\alpha) \cap K$ элементами семейства $\mathbb{H}$, содержащимися в $e(H(V_\alpha) \cap K)$, и положим

$$A(V_\alpha) = \cup\{\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\} : H(V_{\alpha_1}, \dots, V_{\alpha_s}) \in \mathbb{H}(V_\alpha)\}.$$

В последнем выражении для множеств $H(V_{\alpha_1}\dots V_{\alpha_s})$, совпадающих с $I^{\aleph_1}$, произвольным образом фиксируется индекс β.

Для каждого индекса α с помощью индукции построим последовательность $\{A^\alpha_m\}$ счетных множеств следующим образом. Положим $A^\alpha_1=\{\alpha\}$. Если счетное множество A^α_m уже построено, то $A^\alpha_{m+1}=\bigcup\{A(V):V\in\eta_\beta,\beta\in A^\alpha_m\}$. Далее, для каждого индекса α положим $A_\alpha=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}A^\alpha_m$. Каждое A_α является счетным, и для произвольных $\beta\in A_\alpha$ и $V\in\eta_\beta$ выполняется $A(V)\subset A_\alpha$.

Для каждого $\alpha<\omega_1$ положим $B_\alpha=\bigcup\limits_{\beta\le\alpha}A_\beta$, если α — непредельный ординал, и $B_\alpha=\bigcup\limits_{\beta<\alpha}A_\beta$, если α — предельный ординал. Элементы непрерывного обратного спектра S определим следующим образом. Для каждого $\alpha<\omega_1$ положим $K_\alpha=\mathrm{pr}_{B_\alpha}(K)$, а проекции $\pi^\beta_\alpha:K_\beta\to K_\alpha$ определим как ограничения соответствующих проекций произведения. Очевидно, $K=\varinjlim S$. Так как для любого $\alpha<\omega_1$ выполняется $|B_{\alpha+1}\setminus B_\alpha|\le\omega_0$, то все $\pi^{\alpha+1}_\alpha$ — проекции с метризуемым ядром (напомним, что отображение компактов $f:X\to Y$ называется отображением с метризуемым ядром, если f гомеоморфно проектированию подмножества произведения $Q\times Y$ параллельно гильбертову кубу Q).

По трансфинитной индукции построим ретракцию r тихоновского куба $I^{\aleph_1}$ на K. Гильбертовы кубы, участвующие в дальнейших построениях, суть подмножества тихоновского куба $I^{\aleph_1}$, представляющие собой счетные грани $I^{\aleph_1}$, умноженные на точку с координатами равными нулю, т. е. имеющие вид $\prod\limits_{\gamma<\omega_!}Z_\gamma$, где $Z_\gamma=I_\gamma$ для счетного числа индексов γ и $Z_\gamma=\{0\}$ для остальных индексов.

Начало индукции определяется ретракцией $r_{\alpha_1}=\mathrm{pr}_{B_{\alpha_1}}fg^{-1}_{B_{\alpha_1}}$ гильбертова куба $I^{B_{\alpha_1}}\times\prod\limits_{\mu\in A\setminus B_{\alpha_1}}0_\mu$, $0_\mu=0$ (B_{α_1} — счетно) на компакт $\mathrm{pr}_{B_{\alpha_1}}(K)$. Указанное свойство отображения r_{α_1} подтверждается d-регулярностью рассматриваемого оператора e продолжения открытых множеств компакта K ([3], [9]). Очевиден способ построения ретракции в случае конечности B_{α_1}.

Пусть α — непредельный ординал и ретракция $r_{\alpha-1}:I^{B_{\alpha-1}}\to\mathrm{pr}_{B_{\alpha-1}}(K)$ уже построена. Тогда в вышеприведенном предложении 1 роль φ играет $r_{\alpha-1}$, а непрерывное отображение φ' строится следующим образом. Пусть

$$Q_{B_\alpha}=I^{B_\alpha}\times\prod_{\mu\in A\setminus B_\alpha}0_\mu,\quad 0_\mu=0,\quad \xi_{B_\alpha}=\mathrm{pr}_{B_\alpha}fg^{-1}_{B_\alpha}.$$

Тогда φ' является сужением отображения ξ_{B_α} на пространство

$$\mathrm{pr}_{B_\alpha}(\mathrm{pr}^{-1}_{B_{\alpha-1}}(pr_{B_{\alpha-1}}(K))).$$

Если α — предельный ординал, то полагаем $r_\alpha=\lim\limits_{\gamma<\alpha}r_\gamma$.

Таким образом, искомая ретракция — $r=\lim\limits_{\alpha<\omega_1}r_\alpha$. □

Семейство γ подмножеств пространства X называется τ-центрированным, если для любого подсемейства $\gamma'\subset\gamma$ мощности $\le\tau$ выполнено $\bigcap\{U:U\in\gamma'\}\ne\varnothing$.

Лемма 4. *Пусть $\tau\ge\omega_0$, X — топологическое пространство, причем любое каноническое замкнутое подмножество X имеет тип $G_{\delta,\tau}$ в X, S — всюду плотное подпространство X такое, что для любого замкнутого подмножества $F\subset X$ типа $G_{\delta,\tau}$ в X пересечение F с*

S не пусто, f — непрерывное отображение S в пространство Y, причем $\mathrm{ic}(Y) \le \tau$. *Тогда существует непрерывное отображение $\overline{f} : X \to Y$ такое, что $f = \overline{f} \mid S$.*

Доказательство. Для каждой точки $x \in X$ обозначим через η_x семейство всех замкнутых подмножеств X типа $G_{\delta,\tau}$ в X, содержащих эту точку. Ясно, что для любого $x \in X$ семейство η_x является τ-центрированным. Положим $\eta'_x = \{F \cap S : F \in \eta_x\}$, $\eta''_x = \{f(V) : V \in \eta'_x\}$ и $\Phi_x = \cap\{[V]_Y : V \in \eta''_x\}$.

Так как для любого подсемейства $\eta^*_x \subset \eta_x$ мощности $\le \tau$ существует элемент $F \in \eta_x$ такой, что $F \subset \cap\{V : V \in \eta^*_x\}$, то семейство η'_x является τ-центрированным для любого $x \in X$, а так как $\mathrm{ic}(Y) \le \tau$, то множество Φ_x не пусто для любого $x \in X$.

Покажем, что для любого $x \in X$ выполняется $|\Phi_x| = 1$. Допустим, что существует точка $x' \in X$ такая, что $|\Phi_{x'}| > 1$. Выберем различные точки y_1, $y_2 \in \Phi_{x'}$ и окрестности O_{y_1} и O_{y_2} этих точек в Y такие, что $O_{y_1} \cap O_{y_2} = \varnothing$.

Пусть U_1 и U_2 — открытые подмножества пространства X такие, что

$$U_1 \cap S = f^{-1}(O_{y_1} \cap f(S)), \quad U_2 \cap S = f^{-1}(O_{y_2} \cap f(S)).$$

Так как S всюду плотно в пространстве X, то $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

Так как любое каноническое замкнутое подмножество X имеет тип $G_{\delta,\tau}$ в X, то существуют открытые подмножества U'_1 и U'_2 пространства X такие, что $U_1 \subset U'_1$, $U_2 \subset U'_2$, $U'_1 \cap U'_2 = \varnothing$ и замкнутые множества $X \setminus U'_1$ и $X \setminus U'_2$ имеют тип $G_{\delta,\tau}$ в пространстве X. В силу того, что $U'_1 \cap V \ne \varnothing$ и $U'_2 \cap V \ne \varnothing$ для любого элемента $V \in \eta'_{x'}$ получаем, что $X \setminus U'_1 \notin \eta_{x'}$ и $X \setminus U'_2 \notin \eta_{x'}$.

Тогда $x' \notin X \setminus U'_1$, $x' \notin X \setminus U'_2$ и получаем противоречие с тем, что $(X \setminus U'_1) \cup (X \setminus U'_2) = X$. Таким образом, $|\Phi_x| = 1$ для любой точки $x \in X$. Отображение, ставящее в соответствие каждой точке $x \in X$ одноточечное множество Φ_x, обозначим через $\overline{f}$. Очевидно, $\overline{f}|S = f$.

Покажем, что отображение $\overline{f}$ непрерывно.

Пусть U — произвольное открытое подмножество Y такое, что $U \cap \overline{f}(X) \ne \varnothing$. Для каждой точки $x \in \overline{f}^{-1}(U \cap \overline{f}(X))$ выберем окрестность $O_{\overline{f}(x)}$ точки $\overline{f}(x)$ в Y такую, что $[O_{\overline{f}(x)}]_Y \subset U$. Покажем

$$x \in W_x = \mathrm{Int}_X [f^{-1}(O_{\overline{f}(x)} \cap f(S))]_X$$

для любого $x \in \overline{f}^{-1}(U \cap \overline{f}(X))$.

Допустим, существует точка $x^* \in \overline{f}^{-1}(U \cap \overline{f}(X))$ такая, что $x^* \notin W_{x^*}$. Так как множество $X \setminus W_{x^*}$ имеет тип $G_{\delta,\tau}$ в X, то $X \setminus W_{x^*} \in \eta_{x^*}$, это противоречит тому, что $W_{x^*} \cap V \ne \varnothing$ для любого элемента $V \in \eta_{x^*}$. Покажем, что для любого $x \in \overline{f}^{-1}(U \cap \overline{f}(X))$ и любого $y \in W_x$ выполняется $\overline{f}(y) \in [O_{\overline{f}(x)}]_Y$.

Допустим, существует точка $y' \in W_x$ такая, что $\overline{f}(y') \notin [O_{\overline{f}(x)}]_Y$, и рассмотрим окрестность $O'_{\overline{f}(y')}$ точки $\overline{f}(y')$ в Y, где $O'_{\overline{f}(y')} \cap O_{\overline{f}(x)} = \varnothing$.

Тогда $\mathrm{Int}_X [f^{-1}(O'_{\overline{f}(y')} \cap f(S))]_X \cap W_x = \varnothing$, что противоречит $[W_x]_X \in \eta_{y'}$. Таким образом,

$$\overline{f}^{-1}(U \cap \overline{f}(X)) = \cup\{W_x : x \in \overline{f}^{-1}(U \cap \overline{f}(X))\},$$

т. е. $\overline{f}^{-1}(U \cap \overline{f}(X))$ является открытым подмножеством пространства X. □

Доказательство теоремы 3. В силу леммы 4 компакт K является объединением счетной совокупности компактов, являющихся непрерывными образами тихоновских кубов. Так как по теореме Е.В. Щепина всякий неметризуемый образ тихоновского куба содержит гильбертов куб, то справедливость теоремы 3 вытекает из свойства 3 и теоремы 2. □

Литература

[1] Дранишников А.Н. *О теории продолжения отображений компактов*, УМН **53** (5), 65–72 (1998).
[2] Щепин Е.В. *Арифметика теории размерности*, УМН **53** (5), 115–212 (1998).
[3] Широков Л.В. *О характеризации $AE(n)$-бикомпактов*, Докл. Болгарск. академии наук **42** (12), 9–10 (1989).
[4] Широков Л.В. *О $AE(n)$-бикомпактах*, Изв. РАН **56** (6), 1316–1327 (1992).
[5] Куратовский К. *Топология.* Т. 2 (Мир, М., 1969).
[6] Энгелькинг Р. *Общая топология* (Мир, М., 1986).
[7] Широков Л.В. *О $AE(n)$-бикомпактах и n-мягких отображениях*, Сиб. матем. журн. **33** (2), 151–156 (1992).
[8] Широков Л.В. *Внешняя характеристика пространств Дугунджи и $\aleph$-метризуемых бикомпактов*, ДАН СССР **263** (5), 1073–1077 (1982).
[9] Широков Л.В. *О некоторых видах вложений топологических пространств*, УМН **42** (2), 253–254 (1987).

Л.В. Широков

Арзамасский филиал Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, ул. К. Маркса, д. 36, г. Арзамас, Нижегородская обл., 607220, Россия,

e-mail: Shirokov1954@mail.ru

L.V. Shirokov

On extension of continuous mappings, topological products and retracts

Abstract. One of the fundamental concepts of the extension theory developed in the works of A.N. Dranishnikov and E.V. Shchepin is the concept of relation of extensiveness, which was introduced by K. Kuratovsky. We describe the behavior of the relation of extensiveness with respect to certain types of subspaces of topological products and spaces, which are the Stone–Cech compactifications of the discrete sums of the Hilbert cube.

Keywords: topological space, continuous mapping, compact, Tychonoff cube, Hilbert cube, Stone–Cech compactification, retract.

L.V. Shirokov

Arzamas Branch of the Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, 36 K. Marks str., Arzamas, Nizhni Novgorod Region, 607220 Russia,

e-mail: Shirokov1954@mail.ru