

Ю.Н. КАРАМЗИН, С.В. ПОЛЯКОВ, И.В. ПОПОВ

## РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА ТРЕУГОЛЬНЫХ СЕТКАХ

**1. Введение.** В последние десятилетия вследствие бурного роста производительности и объемов оперативной памяти вычислительных систем появилась возможность генерации неструктурированных треугольных сеток большого объема и расчета на них сложных прикладных задач в областях с произвольной геометрией. В связи с этим возникла потребность в создании эффективных разностных методов для решения различных классов задач математической физики в областях сложной формы на неструктурированных сетках, состоящих из треугольников или ячеек, подобных ячейкам Дирихле.

В данной работе для построения разностных схем на неструктурированных треугольных сетках рассматривается краевая задача для двумерного уравнения теплопроводности. Такой выбор модельной задачи обусловлен тем, что уравнение теплопроводности включает в себя два основных дифференциальных оператора, дивергенцию и градиент, входящих во все основные уравнения механики сплошной среды. Исследование свойств разностных аналогов этих операторов на неструктурированных сетках позволяет в дальнейшем обобщить теоретические и практические результаты на другие типы уравнений в частных производных.

В работе рассматривается метод построения консервативных разностных схем как второго, так и повышенного порядка точности. Схемы второго порядка построены для произвольных, в том числе дефектных сеток, не удовлетворяющих критерию Делоне, которые могут использоваться в технологических расчетах. Схемы повышенного порядка точности ориентированы на треугольные сетки, близкие к равномерным.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим процесс распространения тепла в произвольной замкнутой двумерной области  $D$  с границей  $\partial D$ . В безразмерных переменных он описывается с помощью уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{w} - qu + f, \quad (x, y) \in D, \quad t > 0, \quad (1)$$

где  $u = u(x, y, t)$  — искомая функция распределения изменения температуры в области  $D$  относительно температуры окружающей среды,  $\mathbf{w} = \mathbf{K} \operatorname{grad} u$  — вектор антипотока тепла, выражающийся через диагональный тензор температуропроводности  $\mathbf{K}$  с компонентами  $k_{ii}(x, y, t) \geq k_0 > 0$  и градиент температуры,  $q = q(x, y, t) \geq 0$  — коэффициент остывания/нагрева среды за счет излучательных процессов,  $f = f(x, y, t)$  — плотность источников/стоков тепла.

Уравнение (1) замыкается с помощью следующих естественных граничных и начальных условий:

$$(\mathbf{w}, \mathbf{n}) = -\eta u, \quad (x, y) \in \partial D, \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad (3)$$

где  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к границе области  $D$ ,  $\eta \geq 0$  — коэффициент тепловой проницаемости границы,  $u_0(x, y)$  — начальное распределение изменения температуры  $u$ .

В дальнейшем предполагается, что решение задачи (1)–(3) существует и является единственным. Этот факт будет иметь место в предположении кусочной непрерывности функций  $k_{ii}$ ,  $q$ ,  $f$

и  $u_0$  в области  $D$ , граница которой является кусочно-гладкой кривой. Отметим также, что искомая функция  $u$  удовлетворяет принципу максимума и следующему интегральному тождеству:

$$\iint_D u \, dx \, dy = - \oint_{\partial D} \eta u \, dl + \iint_D (-qu + f) \, dx \, dy. \quad (4)$$

**3. Построение разностных схем.** Рассмотрим проблему численного решения задачи (1)–(3) в области произвольно сложной формы, в том числе невыпуклой и/или многосвязной.

Будем предполагать, что в области  $D$  задана неструктурированная сетка  $\omega_P = \{P_i = (x_i, y_i), i = 1, \dots, N\}$ , содержащая как точки области  $D$ , так и точки ее границы  $\partial D$ . На сетке  $\omega_P$  построена некоторая триангуляция  $T = \{T_m = \Delta(P_{i_m}, P_{j_m}, P_{k_m}), P_{i_m}, P_{j_m}, P_{k_m} \in \omega_P, m = 1, \dots, M, M = N - 2\}$ . Относительно  $T$  известно:

- 1)  $T$  содержит все точки  $\omega_P$ ;
- 2) площадь  $S(T_m) > 0$  для всех  $T_m \in T$ ;
- 3)  $S(T_m \cap T_n) = 0$  для  $m \neq n$ ;
- 4) объединение всех треугольников  $D_h = \bigcup_{m=1}^M T_m$  составляет дискретный аналог  $D$  и имеет такую же связность, что и  $D$ ;
- 5) отношение площадей  $\xi = S(D_h)/S(D) = 1 - \varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$ , имеет предел  $\lim_{h \rightarrow 0} \xi = 1$ .

В общем случае триангуляция  $T$  может не удовлетворять критерию Делоне и в ней могут быть треугольники с тупыми углами, сколь угодно близкими к  $\pi$ . Поэтому потребуем, чтобы для всех треугольников из  $T$  выполнялось условие

$$\max(\alpha_m, \beta_m, \gamma_m) \leq \pi - \delta, \quad \delta \in (0, 2\pi/3], \quad m = 1, \dots, M,$$

где  $\alpha_m, \beta_m, \gamma_m$  — углы треугольника  $T_m$ .

Предположим далее, что задача (1)–(3) решается на временном отрезке  $[0, t_{\max}]$ , для которого введена равномерная сетка по времени  $\omega_t = \{t_n = n \cdot \tau, n = 0, \dots, N_t, \tau = t_{\max}/N_t\}$ .

Перейдем к построению разностных схем. Для этого применяется интегро-интерполяционный подход (метод конечных объемов) ([1], с. 144, 194; [2], с. 31) в сочетании с потоковым методом. В соответствии с ним исходное уравнение разделяется на два с помощью введения вектора потока или антипотока (что и было сделано в исходной постановке задачи). Такой подход применялся ранее для построения разностных схем на ортогональных четырехугольных сетках [3]. При этом температура задавалась внутри четырехугольной ячейки и считалась постоянной в ней, а потоки задавались на сторонах ячейки. В данной работе, как и в [4], предлагается значения неизвестной функции искать в узлах сетки  $\omega_P$ , а потоки аппроксимировать специальным образом по этим значениям. Такая методика имеет определенное преимущество, в том числе позволяет решать задачу с граничными условиями любого типа (Дирихле, Неймана, Ньютона или неоднородными).

Для применения интегро-интерполяционного метода введем понятие контрольного объема. Для этого для каждой точки сетки  $P_i \in \omega_P$  определим множество всех треугольников, вершиной которых она является,  $H_i = \{T_m \in T, P_i \in T_m\}$ , и назовем его шаблоном в точке  $P_i$ . Пусть количество таких треугольников равно  $N_i$ . Пронумеруем их в смежном порядке в направлении против часовой стрелки:  $T_{m_1}, \dots, T_{N_i}$ . При этом без нарушения общности можно считать, что каждый треугольник  $T_{m_j}$  образован точками  $P_i, P_{i_j}, P_{i_{j+1}}$  (см. рис. 1а)). В каждом из этих треугольников определим точку пересечения медиан  $M_{m_j}, j = 1, \dots, N_i$ . По этим точкам построим замкнутую ломаную  $L_i$ . Фигура, ограниченная ломаной  $L_i$ , и составляет контрольный объем  $V_i$  в точке  $P_i$  с площадью  $S_i$  (рис. 1а)). Если точка  $P_i$  является граничной, то ломаную  $L_i$  можно замкнуть через проекции точек  $M_{m_j}$  на соответствующие граничные ребра и саму точку  $P_i$  (рис. 1б)).

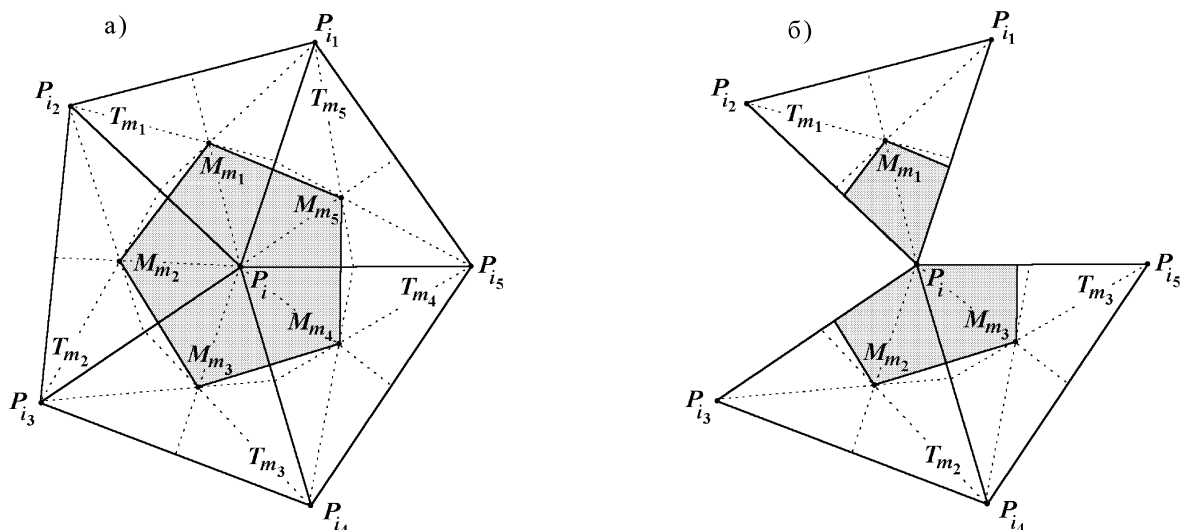


Рис. 1. Определение контрольного объема для внутренних а) и граничных б) точек

Проинтегрируем теперь исходное уравнение (1) по контрольному объему  $V_i$  и по времени на отрезке  $[t_n, t_{n+1}]$  длины  $\tau$ :

$$\frac{1}{S_i} \iint_{V_i} \frac{u(x, y, t_{n+1}) - u(x, y, t_n)}{\tau} dx dy = \frac{1}{S_i \tau} \iint_{V_i} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\operatorname{div} \mathbf{w} - qu + f) dt dx dy.$$

На основе данного равенства построим, например, неявную по времени схему. Для этого интегралы по времени аппроксимируем значением функции в точке  $t_{n+1}$ , умноженным на шаг  $\tau$ , интегралы по пространству (кроме потокового слагаемого) заменим на значения функций в точке  $P_i$ , умноженные на площадь контрольного объема  $S_i$ . В результате получим следующее приближенное соотношение:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} \approx \Lambda_i^{n+1} u_i^{n+1} - q_i^{n+1} u_i^{n+1} + f_i^{n+1}. \quad (5)$$

Здесь использованы стандартные обозначения вида  $\varphi_i^n = \varphi(x_i, y_i, t_n)$ . Первое слагаемое в правой части (5) является некоторой аппроксимацией потокового интеграла

$$I_i^{n+1} = \frac{1}{S_i} \iint_{V_i} \operatorname{div} \mathbf{w}^{n+1} dx dy.$$

Построим теперь аппроксимацию потокового члена. Для этого рассмотрим сначала случай полного контрольного объема, когда точка  $P_i$  является внутренней точкой расчетной области. Преобразуем потоковое слагаемое с помощью формулы Остроградского–Гаусса, опуская для удобства номер слоя по времени

$$I_i \equiv \frac{1}{S_i} \iint_{V_i} \operatorname{div} \mathbf{w} dx dy = \frac{1}{S_i} \int_{\partial V_i} (\mathbf{w}, \mathbf{n}) dl.$$

Здесь  $\partial V_i \equiv L_i$  — граница контрольного объема,  $\mathbf{n}$  — вектор внешней нормали к границе  $\partial V_i$ ,  $dl$  — элемент длины границы  $\partial V_i$ . Учитывая далее, что граница  $\partial V_i$  — ломаная линия, состоящая из  $N_i$  частей (т.е.  $L_i = \bigcup_{j=1}^{N_i} L_{ij}$ ), на которых вектор нормали фиксирован ( $\mathbf{n} = \mathbf{n}_{ij}$ ), последнее

равенство можно преобразовать следующим образом:

$$I_i = \frac{1}{S_i} \sum_{j=1}^{N_i} \int_{L_{ij}} (\mathbf{w}, \mathbf{n}_{ij}). \quad (6)$$

В итоге остается проблема аппроксимации вектора антипотока на каждом участке ломаной. Для ее решения введем дополнительное разбиение контрольного объема  $V_i$  на треугольники, образованные точками  $P_i$ ,  $M_{m_j}$  и точками  $Q_{ij}$  пересечения ребер  $[P_i, P_j]$  треугольников шаблона с соответствующими участками ломаной  $L_{ij}$  (см. рис. 2). Как видно из рисунка, контрольный объем состоит из  $2N_i$  таких треугольников, которые удобно обозначить  $\tilde{T}_{m_j}^{(\pm)}$  (рис. 2б)).

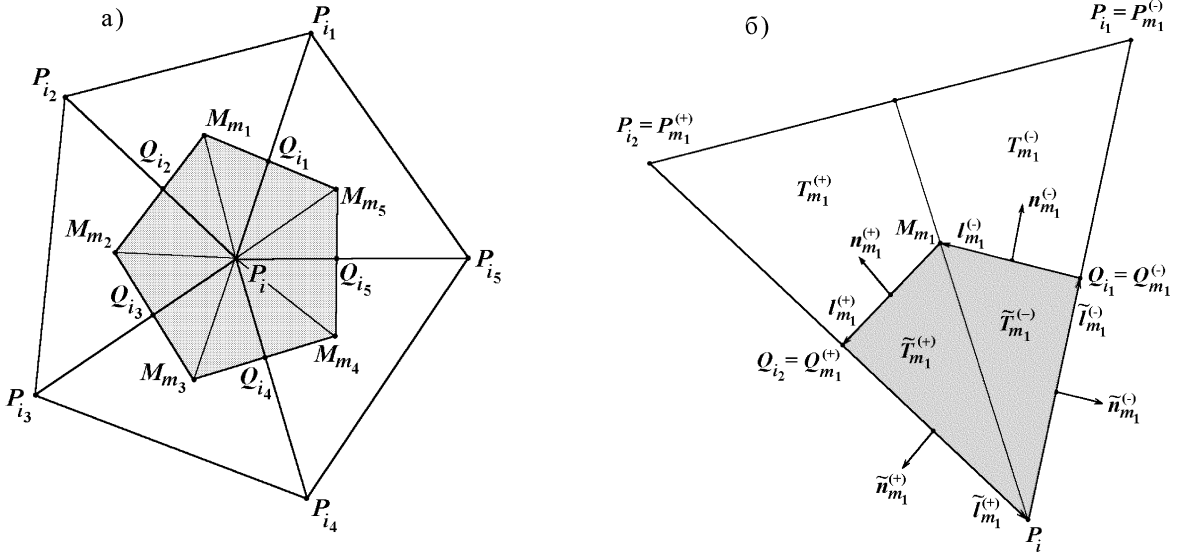


Рис. 2. Разбиение контрольного объема на части а) и направления нормалей и конормалей в одной из частей контрольного объема б)

В соответствии с этим разбиением контрольного объема  $L_i = \bigcup_{j=1}^{N_i} (L_{m_j}^{(+)} + L_{m_j}^{(-)})$ . Вводя новые обозначения для вектора нормали  $\mathbf{n}_{m_j}^{(\pm)}$  на соответствующих участках ломаной, из (6) получаем соотношение

$$I_i = \frac{1}{S_i} \sum_{j=1}^{N_i} \left( \int_{L_{m_j}^{(+)}} (\mathbf{w}, \mathbf{n}_{m_j}^{(+)}) + \int_{L_{m_j}^{(-)}} (\mathbf{w}, \mathbf{n}_{m_j}^{(-)}) \right). \quad (7)$$

На каждом из  $2N_i$  участков ломаной можно перейти от вектора антипотока к перпендикулярному ему вектору  $\mathbf{W} = (W_x, W_y) = (-w_y, w_x)$  (который будем называть в дальнейшем модифицированным потоком) и вектору конормали  $\boldsymbol{\nu} = (\nu_x, \nu_y) = (-n_y, n_x)$ . Эти переменные можно использовать в (7):

$$I_i = \frac{1}{S_i} \sum_{j=1}^{N_i} \left( \int_{L_{m_j}^{(+)}} (\mathbf{W}, \boldsymbol{\nu}_{m_j}^{(+)}) + \int_{L_{m_j}^{(-)}} (\mathbf{W}, \boldsymbol{\nu}_{m_j}^{(-)}) \right). \quad (8)$$

При этом следует заметить, что векторы конормалей можно вычислять по формулам

$$\boldsymbol{\nu}_{m_j}^{(\pm)} = \mathbf{l}_{m_j}^{(\pm)} / |\mathbf{l}_{m_j}^{(\pm)}|, \quad \mathbf{l}_{m_j}^{(+)} = \overrightarrow{M_{m_j} Q_{m_j}^{(+)}}, \quad \mathbf{l}_{m_j}^{(-)} = \overrightarrow{Q_{m_j}^{(-)} M_{m_j}}. \quad (9)$$

Здесь использованы новые обозначения для  $Q_{ij}$ . Если теперь в интегралах по участкам ломаной применить теорему о среднем значении (т. е. вынести за знак интеграла величину скалярного

произведения в некоторой точке), то из (8) с учетом (9) получим следующее приближенное равенство:

$$I_i = \frac{1}{S_i} \sum_{j=1}^{N_i} [(\mathbf{W}_{m_j}^{(+)}, \mathbf{I}_{m_j}^{(+)}) + (\mathbf{W}_{m_j}^{(-)}, \mathbf{I}_{m_j}^{(-)})]. \quad (10)$$

Здесь  $\mathbf{W}_{m_j}^{(\pm)}$  — неизвестные пока значения вектора модифицированного потока.

Для построения схемы второго порядка аппроксимации и точности по пространственным переменным достаточно предположить, что модифицированный поток  $\mathbf{W}_{m_j}^{(\pm)}$  является постоянным вектором внутри каждого треугольника  $T_{m_j}$ . Тогда

$$\mathbf{W}_{m_j}^{(+)} = \mathbf{W}_{m_j}^{(-)} = \mathbf{W}_{m_j}.$$

Для определения вектора  $\mathbf{W}_{m_j}$  можно использовать различные подходы. Наиболее общий из них состоит в следующем ([1], с. 145). Рассмотрим определение модифицированного потока:  $W_x = -k_{22} \frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $W_y = k_{11} \frac{\partial u}{\partial x}$  или  $\frac{W_x}{k_{22}} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{W_y}{k_{11}} = \frac{\partial u}{\partial x}$ . Проинтегрируем последние два равенства по треугольнику  $T_{m_j}$  с учетом формул Грина

$$\int_{T_{m_j}} \frac{W_x}{k_{22}} dx dy = \oint_{\partial T_{m_j}} u dx, \quad \int_{T_{m_j}} \frac{W_y}{k_{11}} dx dy = \oint_{\partial T_{m_j}} u dy.$$

Разделим эти равенства на значение  $S_{m_j}$  площади треугольника  $T_{m_j}$ , а интегралы в правых частях приблизим по формуле трапеций через значения  $u_i$ ,  $u_{m_j}^{(\pm)}$  искомой функции в вершинах треугольника  $P_i = (x_i, y_i)$ ,  $P_{m_j}^{(\pm)} = (x_{m_j}^{(\pm)}, y_{m_j}^{(\pm)})$  (здесь по аналогии с предыдущим введены новые обозначения для вершин  $T_{m_j}$ ). В результате получим следующие приближенные формулы для  $\mathbf{W}_{m_j}$ :

$$\begin{aligned} W_x &\approx b_{m_j} \left[ \bar{u}_{m_j}^{(-)} \Delta x_{m_j}^{(-)} + \bar{u}_{m_j} \Delta x_{m_j} - \bar{u}_{m_j}^{(+)} \Delta x_{m_j}^{(+)} \right], \\ W_y &\approx a_{m_j} \left[ \bar{u}_{m_j}^{(-)} \Delta y_{m_j}^{(-)} + \bar{u}_{m_j} \Delta y_{m_j} - \bar{u}_{m_j}^{(+)} \Delta y_{m_j}^{(+)} \right], \\ b_{m_j}^{-1} &= \frac{1}{S_{m_j}} \int_{T_{m_j}} \frac{dx dy}{k_{22}}, \quad a_{m_j}^{-1} = \frac{1}{S_{m_j}} \int_{T_{m_j}} \frac{dx dy}{k_{11}}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\bar{u}_{m_j}^{(\pm)} = 0.5(u_{m_j}^{(\pm)} + u_i)$ ,  $\bar{u}_{m_j} = 0.5(u_{m_j}^{(+)} + u_{m_j}^{(-)})$ ,  $\Delta x_{m_j}^{(\pm)} = x_{m_j}^{(\pm)} - x_i$ ,  $\Delta x_{m_j} = x_{m_j}^{(+)} - x_{m_j}^{(-)}$ ,  $\Delta y_{m_j}^{(\pm)} = y_{m_j}^{(\pm)} - y_i$ ,  $\Delta y_{m_j} = y_{m_j}^{(+)} - y_{m_j}^{(-)}$ . Из (10), (11) получаем итоговую аппроксимацию для потокового интеграла

$$I_i^{n+1} \approx \Lambda_i^{n+1} u_i^{n+1} = \frac{1}{S_i} \sum_{j=1}^{N_i} (\mathbf{W}_{m_j}^{n+1}, \mathbf{I}_{m_j}^{(+)} + \mathbf{I}_{m_j}^{(-)}). \quad (12)$$

Рассмотрим теперь случай, когда точка  $P_i$  лежит на границе области. Тогда некоторые из треугольников шаблона  $H_i$  имеют от одной до трех граничных сторон (см. рис. 1б)), что приводит к наличию дополнительных слагаемых в формулах (6), (7). Приведем конкретный пример, считая, что точка  $P_i$  — угловая точка области. В этом случае ее шаблон состоит из одного треугольника  $T_{m_1}$  (рис. 2б)). В этой ситуации формула (7) примет вид

$$I_i = \frac{1}{S_i} \left( \int_{L_{m_1}^{(+)}} (\mathbf{w}, \mathbf{n}_{m_1}^{(+)}) + \int_{L_{m_1}^{(-)}} (\mathbf{w}, \mathbf{n}_{m_1}^{(-)}) + \int_{\tilde{L}_{m_1}^{(+)}} (\mathbf{w}, \mathbf{n}_{m_1}^{(+)}) + \int_{\tilde{L}_{m_1}^{(-)}} (\mathbf{w}, \mathbf{n}_{m_1}^{(-)}) \right). \quad (13)$$

Если участки ломаной  $\tilde{L}_{m_1}^{(\pm)}$  лежат точно на границе области, то на них задано граничное условие (2), и его можно использовать в (13):

$$I_i = \frac{1}{S_i} \left( \int_{L_{m_1}^{(+)}} (\mathbf{w}, \mathbf{n}_{m_1}^{(+)}) + \int_{L_{m_1}^{(-)}} (\mathbf{w}, \mathbf{n}_{m_1}^{(-)}) - \int_{\tilde{L}_{m_1}^{(+)}} \eta u dl - \int_{\tilde{L}_{m_1}^{(-)}} \eta u dl \right). \quad (14)$$

Если участки ломаной  $\tilde{L}_{m_1}^{(\pm)}$  приближают соответствующие части криволинейной границы  $\partial D$  области с некоторой точностью, то равенство (14) будет приближенным. В этом случае при некоторых условиях, накладываемых на исходную триангуляцию, ошибка будет пропорциональна площади треугольника  $S_{m_1}$ , что соответствует второму порядку аппроксимации схемы по пространственным переменным.

Получим теперь из (14) аналог формулы (12). Для этого будем аппроксимировать первые два интеграла в правой части (14) так же, как изложено выше. Для аппроксимации последних двух интегралов из правой части (14) используем следующие интерполяционные формулы:

$$u \approx (1-l)u_i + lu_{m_1}^{(\pm)},$$

справедливые на  $\tilde{L}_{m_1}^{(\pm)}$ . Из них вытекает следующая аппроксимация (см. также рис. 2б))

$$\int_{\tilde{L}_{m_1}^{(\pm)}} \eta u dl \approx 0.5\eta l((2-l)u_i + lu_{m_1}^{(\pm)}), \quad (15)$$

где  $l = |\tilde{\mathbf{I}}_{m_1}^{(\pm)}|$ ,  $\tilde{\mathbf{I}}_{m_1}^{(+)} = \overrightarrow{Q_{m_1}^{(+)}P_i}$ ,  $\tilde{\mathbf{I}}_{m_1}^{(-)} = \overrightarrow{P_iQ_{m_1}^{(-)}}$ . Если теперь ввести операторы  $\eta_{m_j}^{(\pm)}$ , действующие по формулам

$$\eta_{m_j}^{(\pm)} u_i = \begin{cases} 0.5\eta l((2-l)u_i + lu_{m_j}^{(\pm)}), & P_i \in \partial D \text{ и } P_{m_j}^{(\pm)} \in \partial D; \\ 0, & P_i \notin \partial D \text{ или } P_{m_j}^{(\pm)} \notin \partial D, \end{cases}$$

то с учетом предыдущих результатов (12) и (14), (15) получим следующую общую аппроксимацию потокового интеграла в произвольной точке сетки:

$$I_i^{n+1} \approx \Lambda_i^{n+1} u_i^{n+1} = \frac{1}{S_i} \sum_{j=1}^{N_i} [(\mathbf{W}_{m_j}^{n+1}, \mathbf{I}_{m_j}^{(+)} + \mathbf{I}_{m_j}^{(-)}) - \eta_{m_j}^{(+)} u_i - \eta_{m_j}^{(-)} u_i].$$

Подводя итог, можем теперь выписать разностную схему для сеточной функции  $U$ , являющейся разностным аналогом непрерывной функции  $u$  на сетке  $\Omega = \omega_P \times \omega_t$ :

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} = \Lambda_i^{n+1} U_i^{n+1} - q_i^{n+1} U_i^{n+1} + f_i^{n+1}, \quad U_i^0 = u_0(P_i). \quad (16)$$

Схема (16) имеет второй порядок аппроксимации по пространству и первый по времени (что следует из процедуры ее построения), является консервативной (в смысле выполнения на сетке разностного аналога тождества (4)) и удовлетворяет разностному принципу максимума. Нетрудно показать, что эта схема сходится в сеточной норме  $L_2(\omega_P) \times C(\omega_t)$  к точному решению дифференциальной задачи (1)–(3) со скоростью  $O(\overline{\Delta l}^2 + \tau)$ , где  $\overline{\Delta l}$  — средний размер ребра треугольников из  $T$ .

Сделаем теперь несколько замечаний относительно точности схемы в некоторых специальных случаях. Во-первых, если в триангуляции  $T$  имеются треугольники, примыкающие к границе, в которых точки пересечения медиан  $M_{m_j}$  проектируются только на одно граничное ребро (рис. 3), и при этом перестройка таких треугольников по критерию Делоне или локальное измельчение триангуляции по каким-либо причинам нежелательны, то в качестве точек  $Q_{m_j}^{\pm}$  можно брать середины граничных отрезков  $[P_i, P_{m_j}^{\pm}]$ . Этот подход можно применять и в случае остроугольных граничных треугольников. На порядок точности схемы это изменение граничных контрольных объемов влияния не оказывает, т. е. и в этом случае сохраняется второй порядок точности схемы по пространству.

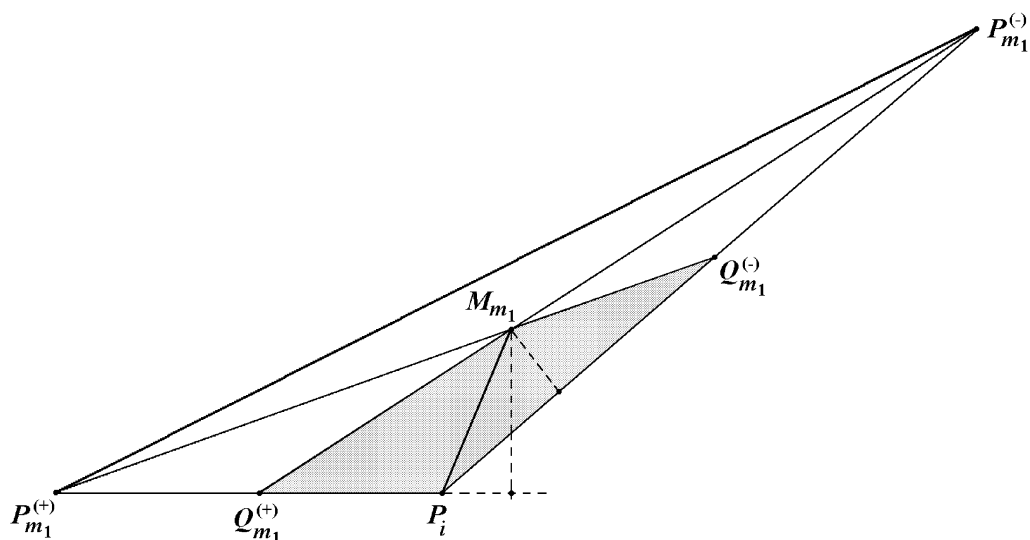


Рис. 3. Определение контрольного объема в случае тупоугольного граничного треугольника

Во-вторых, для повышения порядка разностной схемы по пространству до четвертого предлагается расширить шаблон при аппроксимации потокового слагаемого за счет треугольников, непосредственно примыкающих к треугольникам шаблона  $H_i$ . В результате поток в каждом треугольнике  $T_{m_j}$  аппроксимируется уже не по трем значениям функции  $u$  в вершинах этого треугольника, а по шести значениям, среди которых дополнительные три берутся в вершинах соседей  $T_{m_j}$ . На границе в этом случае сохраняется второй порядок аппроксимации. Однако точность схемы в целом будет иметь четвертый порядок по пространству.

Следует также добавить, что с помощью изложенной методики несложно провести построение разностной схемы в случае недиагонального тензора теплопроводности  $\mathbf{K}$ , а также в случае параболического или эллиптического уравнений общего вида. Нетрудно также построить схемы повышенного порядка точности по времени.

**4. Заключение.** Отметим, что авторами разработан оригинальный подход к генерации самих неструктурированных треугольных сеток для невыпуклых многосвязных областей с адаптивной подстройкой сетки под особенности границы области [5]. С помощью генератора сеток можно также строить квазиравномерные треугольные сетки.

Отметим также, что проведенная нами апробация построенных разностных схем подтвердила их эффективность для решения целого ряда параболических краевых задач (в том числе и квазилинейных) в областях сложной формы.

## Литература

1. Самарский А.А. *Теория разностных схем*. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
2. Самарский А.А., Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П. *Разностные схемы на нерегулярных сетках*. – Минск, 1996. – 276 с.
3. Фрязинов И.В. *Метод баланса и вариационно-разностные схемы // Дифференц. уравнения*. – 1980. – Т. 16. – № 7. – С. 1332–1343.
4. Atluri S.N., Gallagher R.H., Zienkiewicz O.C. *Hybrid and mixed finite element methods*. – John Wiley & Sons. – New York, 1983. – 582 p.
5. Попов И.В., Поляков С.В. *Построение адаптивных нерегулярных треугольных сеток для двумерных многосвязных невыпуклых областей // Матем. моделирование*. – 2002. – Т. 14. – Вып. 6. – С. 25–35.

*Институт математического  
моделирования Российской Академии наук*

*Поступила  
25.06.2002*