ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 6 (505)

УДК 517.929

К.М. ЧУДИНОВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

1. Критерий устойчивости по части переменных системы обыкновенных дифференциальных уравнений

В данном разделе исследуется линейная система

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{1}$$

где преобразование $\mathbf{A}$ комплексного линейного пространства S размерности n задано матрицей A в базисе $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^n$, который будем называть естественным, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $t \geq 0$.

Через $M(\alpha, \beta)$, где M — матрица размера $r \times s$, $\alpha \subseteq \{1, 2, \dots, r\}$, $\beta \subseteq \{1, 2, \dots, s\}$, будем обозначать матрицу, являющуюся пересечением строк матрицы M с номерами из набора α и столбцов с номерами из набора β, а через I_q — единичную матрицу порядка q.

Пусть $\nu = \{1, 2, \dots, n\}$ и $\mu = \{1, 2, \dots, p\}$, где $1 \leq p \leq n-1$, $\beta = \{p+1, p+2, \dots, n\}$, $\gamma = \{1, 2, \dots, C_n^p\}$, α_i, $i \in \gamma$, — все различные подмножества из $(n-p)$ элементов множества ν. Для каждого $i \in \gamma$ обозначим $C_i = A(\alpha_i, \beta)$, $P_i = I(\alpha_i, \beta)$ и $\delta_i(\lambda) = \det(C_i - \lambda P_i)$. Через $\delta_\mu(\lambda)$ обозначим наибольший общий делитель полиномов $\delta_i(\lambda)$, $i \in \gamma$. Легко видеть, что полином $\delta_\mu(\lambda)$ является делителем характеристического полинома $\Delta(\lambda)$ матрицы A.

Основным содержанием раздела является доказательство следующего утверждения.

Теорема 1. *Первые p компонент решения системы* (1) *представляются в виде сумм квазиполиномов от t, показателями которых являются корни полинома $\Delta_\mu(\lambda) = \frac{\Delta(\lambda)}{\delta_\mu(\lambda)}$ и только они.*

Согласно [1] последовательность векторов $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_s$ пространства S будем называть серией с собственным значением λ_0 относительно преобразования $\mathbf{A}$, если выполнены соотношения $\mathbf{h}_1 \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{A}\mathbf{h}_1 = \lambda_0\mathbf{h}_1$, $\mathbf{A}\mathbf{h}_2 = \lambda_0\mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{A}\mathbf{h}_s = \lambda_0\mathbf{h}_s + \mathbf{h}_{s-1}$. Очевидно, линейная оболочка серии является инвариантным относительно преобразования $\mathbf{A}$ подпространством пространства S. Согласно теореме о жордановой форме матрицы существует базис пространства S, состоящий из одной или нескольких серий ([1], сс. 366–375, 383–389). Таким образом, каждому собственному значению преобразования $\mathbf{A}$ соответствует инвариантное относительно преобразования $\mathbf{A}$ подпространство.

Каждой серии $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_s$ соответствуют s линейно независимых решений системы (1)

$$\mathbf{x}_r(t) = e^{\lambda t} \sum_{q=1}^{r} \frac{t^{r-q}}{(r-q)!} \mathbf{h}_q, \quad r = \overline{1, s}.$$

Сериям, составляющим базис, соответствуют n решений, образующих фундаментальную систему: решениями системы (1) являются линейные комбинации решений фундаментальной системы и только они.

Обозначим через S_μ линейную оболочку системы векторов $\{\mathbf{e}_k\}_{k=p+1}^n$. Таким образом, элементами пространства S_μ являются те и только те векторы пространства S, первые p компонент которых в естественном базисе пространства S равны нулю.

Пусть λ_0 — произвольное собственное значение преобразования $\mathbf{A}$. Через m обозначим его кратность. Для каждого $i \in \gamma$, если λ_0 является корнем полинома $\delta_i(\lambda)$, положим m_i равным его кратности, в противном случае $m_i = m$. Сделаем два замечания.

(a) Первые p компонент решения системы (1) представляются в виде сумм квазиполиномов от t, показателями которых являются те и только те собственные значения преобразования $\mathbf{A}$, соответствующие которым инвариантные подпространства не лежат в пространстве S_μ.

(b) Собственное значение λ_0 не является корнем $\Delta_\mu(\lambda)$ тогда и только тогда, когда для всех $i \in \gamma$ выполняются неравенства $m_i \geq m$.

Сопоставление замечаний (a) и (b) с теоремой 1 показывает, что последняя будет доказана, если будет доказана

Теорема 2. *Чтобы соответствующее собственному значению λ_0 инвариантное относительно преобразования $\mathbf{A}$ подпространство S_0 являлось подпространством пространства S_μ, необходима и достаточна справедливость неравенств $m_i \geq m$, $i \in \gamma$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $S_0 \subseteq S_\mu$. Зафиксируем произвольный индекс $i \in \gamma$. Через $\mathbf{C}_i$ и $\mathbf{P}_i$ обозначим операторы, определяемые в базисе $\{\mathbf{e}_k\}_{k=p+1}^n$ пространства S_μ матрицами соответственно C_i и P_i. Заметим, что $\mathbf{C}_i S_0 = (\mathbf{C}_i - \lambda_0 \mathbf{P}_i) S_0 + \lambda_0 \mathbf{P}_i S_0 \subseteq \mathbf{P}_i S_0$, т. е. $(\mathbf{C}_i - \lambda_0 \mathbf{P}_i)x \in \mathbf{P}_i S_0$ $\forall x \in S_0$.

Обозначим состоящий из серий базис пространства S_0 через $X = \{\boldsymbol{\xi}_j\}_{j=1}^m$, причем векторы каждой серии занумеруем последовательно. Для каждого $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ положим $\boldsymbol{\eta}_j = \mathbf{P}_i \boldsymbol{\xi}_j$. Линейной оболочкой системы $Y = \{\boldsymbol{\eta}_j\}_{j=1}^m$ является $\mathbf{P}_i S_0$, значит, если Y линейно зависима, то $\delta_i(\lambda) \equiv 0$, т. е. $m_i = m$. Пусть система Y линейно независима. Дополним системы X и Y произвольным образом до базисов $X_\mu = \{\boldsymbol{\xi}_j\}_{j=1}^{n-p}$ и $Y_\mu = \{\boldsymbol{\eta}_j\}_{j=1}^{n-p}$ пространства S_μ. Матрица $U_i(\lambda)$ оператор-функции $(\mathbf{C}_i - \lambda \mathbf{P}_i)$, если координаты векторов, на которые она действует, задаются в базисе X_μ, а координаты их образов — в базисе Y_μ, имеет вид

$$U_i(\lambda) = \begin{pmatrix} J_i - \lambda I_m & M_{i,1}(\lambda) \\ 0 & M_{i,2}(\lambda) \end{pmatrix},$$

где J_i — жорданова матрица порядка m с единственным собственным значением λ_0, $M_{i,1}(\lambda)$ и $M_{i,2}(\lambda)$ — некоторые λ-матрицы. Поскольку $U_i(\lambda) = V(C_i - \lambda P_i)W$, где V и W — некоторые невырожденные матрицы, кратность корня λ_0 полинома $\det U_i(\lambda)$ не меньше m, т. е. $m_i \geq m$. Необходимость доказана.

При доказательстве достаточности используются две леммы.

Пусть линейные преобразования $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$ конечномерного комплексного векторного пространства R заданы в некоторой системе координат матрицами F и G соответственно.

Последовательность векторов $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_m$ пространства R будем называть серией относительно пары преобразований $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$, если при некотором λ_1 выполнены соотношения

$$\mathbf{h}_1 \neq \mathbf{0},\ \mathbf{F}\mathbf{h}_1 = \mathbf{G}(\lambda_1 \mathbf{h}_1),\ \mathbf{F}\mathbf{h}_2 = \mathbf{G}(\lambda_1 \mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_1), \ldots, \mathbf{F}\mathbf{h}_m = \mathbf{G}(\lambda_1 \mathbf{h}_m + \mathbf{h}_{m-1}).$$

Лемма 1 (обобщение теоремы о приведении матрицы к жордановой форме ([1], с. 384)). *Пусть степень многочлена $\det(F - \lambda G)$ равна d. Тогда существует такое подпространство $R_0 \subseteq R$, что $\mathbf{F}R_0 \subseteq \mathbf{G}R_0$, $\dim R_0 = d$ и базисом R_0 являются векторы одной или нескольких серий относительно пары преобразований $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$.*

Доказательство. Обозначим $R_1 = \mathbf{G}R$ и $d_1 = \dim R_1$. Существует такое подпространство Q_1 пространства R, что $\mathbf{F}Q_1 \subseteq R_1$ и $\dim Q_1 = d_1$ (действительно, размерность любого такого множества M векторов из R, что $\mathbf{F}M \cap R_1 = \emptyset$, не превосходит $\dim R - d_1$, значит, размерность подпространства таких $\mathbf{x} \in R$, что $\mathbf{F}\mathbf{x} \in R_1$, больше или равна d_1). Если $\mathbf{G}Q_1 \neq R_1$, то обозначим $R_2 = \mathbf{G}Q_1$. Имеем $d_2 = \dim R_2 < \dim R_1$. Найдем такое подпространство Q_2 пространства Q_1, что $\mathbf{F}Q_2 \subseteq R_2$ и $\dim Q_2 = d_2$. Если $\mathbf{G}Q_2 \neq R_2$, то обозначим $R_3 = \mathbf{G}Q_2$ (при этом $d_3 = \dim R_3 < \dim R_2$) и найдем такое подпространство Q_3 пространства Q_2, что $\mathbf{F}Q_3 \subseteq R_3$ и $\dim Q_3 = d_3$.

Продолжая таким образом построение цепочек $Q_1 \supset Q_2 \supset Q_3 \supset \cdots$ и $R_1 \supset R_2 \supset R_3 \supset \cdots$, поскольку $d_1 > d_2 > d_3 > \cdots$, найдем такие подпространства Q_k и R_k пространства R, что

$$\mathbf{F}Q_k \subseteq \mathbf{G}Q_k = R_k \quad \text{и} \quad \dim Q_k = \dim R_k = d_k \geq 0.$$

Рассмотрим случай $d_k > 0$. Выберем произвольный базис $X_k = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^{d_k}$ пространства Q_k. По построению пространств Q_k и R_k система векторов $Y_k = \{\mathbf{y}_i\}_{i=1}^{d_k}$, где $\mathbf{y}_i = \mathbf{G}\mathbf{x}_i$, образует базис пространства R_k. В определяемых базисами X_k и Y_k системах координат пространств Q_k и R_k матрица сужения $\mathbf{U}_k(\lambda) : Q_k \to R_k$ оператор-функции $\mathbf{U}(\lambda) = \mathbf{F} - \lambda\mathbf{G}$ имеет вид $U_k(\lambda) = C_k - \lambda I_{d_k}$, где матрица C_k не зависит от λ. Дополним произвольным образом системы X_k и Y_k до базисов $X_{k-1} = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^{d_{k-1}}$ и $Y_{k-1} = \{\mathbf{y}_i\}_{i=1}^{d_{k-1}}$ пространств соответственно Q_{k-1} и R_{k-1}. В системах координат пространств Q_{k-1} и R_{k-1}, определяемых базисами X_{k-1} и Y_{k-1}, матрица сужения $\mathbf{U}_{k-1}(\lambda) : Q_{k-1} \to R_{k-1}$ оператор-функции $\mathbf{U}(\lambda)$ имеет вид

$$U_{k-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} C_k - \lambda I_{d_k} & D_{k-1}(\lambda) \\ 0 & C_{k-1} \end{pmatrix},$$

где матрицы C_k и C_{k-1} не зависят от λ. Дополнив системы векторов X_{k-1} и Y_{k-1} до базисов X_{k-2} и Y_{k-2} пространств Q_{k-2} и R_{k-2}, получим матрицу сужения $\mathbf{U}_{k-2}(\lambda) : Q_{k-2} \to R_{k-2}$ оператор-функции $\mathbf{U}(\lambda)$ вида

$$U_{k-2}(\lambda) = \begin{pmatrix} C_k - \lambda I_{d_k} & & D_{k-2}(\lambda) \\ & C_{k-1} & \\ 0 & & C_{k-2} \end{pmatrix},$$

где матрицы C_k, C_{k-1} и C_{k-2} не зависят от λ. Дополняя таким образом далее системы векторов X_j и Y_j, получим базисы X_1 и Y_1 пространств соответственно Q_1 и R_1. Эти системы дополним соответственно до базисов $X_0 = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^{d}$ и $Y_0 = \{\mathbf{y}_i\}_{i=1}^{d}$ пространства R. Матрица оператор-функции $\mathbf{U}(\lambda)$ при задании векторов, к которым применяется преобразование, в системе координат, задаваемой базисом X_0, а их образов в системе координат, задаваемой базисом Y_0, имеет вид

$$U(\lambda) = \begin{pmatrix} C_k - \lambda I_{d_k} & & & & \\ & C_{k-1} & & D(\lambda) & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & C_1 & \\ & & & & C_0 \end{pmatrix},$$

где матрицы C_j, $j = \overline{0, k}$, не зависят от λ.

Поскольку $F - \lambda G = VU(\lambda)W$, где V и W — некоторые невырожденные матрицы, то $\det(F - \lambda G) = \det V \det U(\lambda) \det W = c \det U(\lambda) = c \prod\limits_{i=0}^{k-1} \det C_i \det U_k(\lambda) = c_1 \det U_k(\lambda) = c_1 \det(C_k - \lambda I_{d_k})$, следовательно, $d = d_k$ и множества корней полиномов $\det(F - \lambda G)$ и $\det(C_k - \lambda I_{d_k})$ непусты и совпадают. По теореме о приведении матрицы к жордановой форме существует базис комплексного пространства $\mathbf{C}^d$ упорядоченных наборов из d чисел, состоящий из одной или нескольких серий относительно преобразования, задаваемого матрицей C_k. Остается заметить, что этот базис пространства $\mathbf{C}^d$ определяет в координатной системе, задаваемой X_k, базис пространства R_k, состоящий из серий относительно преобразований $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$.

Если же $d_k = 0$, то положим $X_k = Y_k = \emptyset$ и, как и в предыдущем случае, дополняя последовательно системы векторов X_j и Y_j до базисов пространств соответственно Q_{j-1} и R_{j-1}, получим базисы $X_0 = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^{d}$ и $Y_0 = \{\mathbf{y}_i\}_{i=1}^{d}$ пространства R и матрицу $U(\lambda)$, при этом $\det U(\lambda)$ не зависит от λ. Поскольку $F - \lambda G = VU(\lambda)W$, получаем, что ситуация $d_k = 0$ возможна только в тривиальном случае $d = 0$.

Итак, R_k — искомое пространство и X_k — искомый базис. $\square$

Лемма 2. *Пусть F и G — произвольные матрицы размера $(s+r)\times s$, $r>0$. Положим $\tau=\{1,2,\dots,C_{s+r}^s\}$, ρ_i, где $i\in\tau$, — все различные поднаборы из s номеров набора $\{1,2,\dots,s+r\}$, $\sigma=\{1,2,\dots,s\}$, $F_i=F(\rho_i,\sigma)$, $G_i=G(\rho_i,\sigma)$. Тогда ранг матрицы C размера $k(s+r)\times ks$ вида*

$$C=\begin{pmatrix} F & G & & & \\ & F & G & \mathbf{0} & \\ & & \ddots & & \\ & \mathbf{0} & & F & G \\ & & & & F \end{pmatrix}$$

равен наибольшему из рангов матриц C_i, $i\in\tau$, размера $(ks)\times(ks)$ вида

$$C_i=\begin{pmatrix} F_i & G_i & & & \\ & F_i & G_i & \mathbf{0} & \\ & & \ddots & & \\ & \mathbf{0} & & F_i & G_i \\ & & & & F_i \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Пронумеруем строки матрицы C снизу вверх. Системы строк с номерами от $(j-1)(s+r)+1$ до $j(s+r)$, $j=\overline{1,k}$, обозначим соответственно через Q_j. Пусть $R_j=\bigcup\limits_{m=1}^{j}Q_m$. Ранг любой системы R_j, $1\le j\le k$, равен рангу системы из js левых столбцов матрицы C. Значит, $\operatorname{rank}R_{j+1}-\operatorname{rank}R_j\le s$, $j=\overline{1,k-1}$. Будем называть соответствующими строки матрицы C, номера которых отличаются на число, кратное $(s+r)$. Выберем максимальную линейно независимую подсистему T_1 системы Q_1. Поскольку $\operatorname{rank}T_1=\operatorname{rank}Q_1=\operatorname{rank}R_1\le s$, система T_1 состоит из не более чем s векторов. Дополним ее соответствующими строками из Q_2. Линейная независимость при этом, очевидно, сохранится. Дополним полученную систему, сохраняя линейную независимость, если нужно, еще несколькими строками из системы Q_2 так, чтобы ранг новой системы был равен рангу R_2, и назовем полученную систему T_2. Она включает не более s строк системы Q_2, поскольку $\operatorname{rank}T_2-\operatorname{rank}T_1=\operatorname{rank}R_2-\operatorname{rank}R_1\le s$. Если $k\ge 3$, то дополним систему T_2 строками системы Q_3, соответствующими входящим в T_2 строкам системы Q_2, и затем, если нужно, еще несколькими строками из Q_3 так, чтобы ранг полученной системы был равен рангу R_3. Полученную систему назовем T_3. Она включает не более s строк из системы Q_3 и некоторые из соответствующих им строк из Q_2 и Q_1. Если $k\ge 4$, то продолжим процесс построения систем T_j аналогичным образом. На k-м шаге получим такую подсистему T_k системы R_k всех строк матрицы C, что $\operatorname{rank}T_k=\operatorname{rank}R_k=\operatorname{rank}C$ и T_k является подсистемой системы всех строк некоторой матрицы C_i, $i\in\tau$. Лемма следует из существования такой системы T_k. □

Продолжим доказательство теоремы 2.

Достаточность. Пусть $m_i\ge m$ $\forall i\in\gamma$. Обозначим $C=A(\nu,\beta)$, $P=I_n(\nu,\beta)$. Покажем, что размерность ядра матрицы

$$\mathfrak{I}=\begin{pmatrix} C-\lambda_0P & -P & & & \\ & C-\lambda_0P & -P & \mathbf{0} & \\ & & \ddots & & \\ & \mathbf{0} & & C-\lambda_0P & -P \\ & & & & C-\lambda_0P \end{pmatrix}$$

размера $mn\times m(n-p)$ не превосходит m. Рассмотрим квадратные матрицы порядка $m(n-p)$

$$\mathfrak{I}_i=\begin{pmatrix} C_i-\lambda_0P_i & -P_i & & & \\ & C_i-\lambda_0P_i & -P_i & \mathbf{0} & \\ & & \ddots & & \\ & \mathbf{0} & & C_i-\lambda_0P_i & -P_i \\ & & & & C_i-\lambda_0P_i \end{pmatrix},\quad i\in\gamma.$$

Зафиксируем произвольный индекс $i \in \gamma$. Согласно определению m_i и лемме 1 существует линейно независимая система $\{x_k^{(j)}\}$, $j = \overline{1,r}$, $k = \overline{1,s_j}$, $\sum\limits_{j=1}^{r} s_j = m_i$, где $x_k^{(j)} = (x_{k1}^{(j)}, x_{k2}^{(j)}, \ldots, x_{k\ n-p}^{(j)}) \in \mathbf{C}^{n-p}$, такая, что $(C_i - \lambda_0 P_i)x_1^{(j)} = 0$, $(C_i - \lambda_0 P_i)x_2^{(j)} = P_i x_1^{(j)}, \ldots, (C_i - \lambda_0 P_i)x_{s_j}^{(j)} = P_i x_{s_j-1}^{(j)}$. Решениями системы $\mathfrak{I}_i\xi = 0$ являются m_i элементов $\xi_k^{(j)} = (x_{k1}^{(j)}, x_{k2}^{(j)}, ..., x_{k\ n-1}^{(j)}, x_{k-1\,1}^{(j)}, x_{k-1\,2}^{(j)}, ..., x_{k-1\ n-1}^{(j)}, \ldots, x_{11}^{(j)}, x_{12}^{(j)}, \ldots, x_{1\ n-1}^{(j)}, 0, 0, \ldots, 0)$ пространства $\mathbf{C}^{m(n-p)}$, линейная независимость которых следует из линейной независимости системы $\{x_k^{(j)}\}$. Таким образом, $\dim\ker \mathfrak{I}_i \geq m_i \geq m$. Поскольку α_i, $i \in \gamma$, — все поднаборы из $(n-p)$ номеров набора $\{1, 2, \ldots, n\}$, то согласно лемме 2 $\operatorname{rank} \mathfrak{I} = \max\limits_{i\in\gamma} \operatorname{rank} \mathfrak{I}_i$, т. е. $\dim\ker \mathfrak{I} = \min\limits_{i\in\gamma} \dim\ker \mathfrak{I}_i \geq m$.

Выберем произвольную систему $\{\eta^j = (\eta_1^j, \eta_2^j, \ldots, \eta_{m(n-p)}^j)\}_{j=1}^m$ линейно независимых наборов из $\mathbf{C}^{m(n-p)}$, являющихся решениями системы $\mathfrak{I}\xi = 0$. Положим $y_k^j = (\eta_{(k-1)(n-p)+1}^j, \eta_{(k-1)(n-p)+2}^j, \ldots, \eta_{k(n-p)}^j)$, $j = \overline{1,m}$, $k = \overline{1,m}$. Докажем, что система $\{y_1^j\}_{j=1}^m$ линейно независима. Заметим, что $y_{k+1}^j = (C - \lambda_0 P)y_k^j$, $1 \leq j \leq m$, $1 \leq k \leq m-1$. Значит, если $c_1 y_1^1 + c_2 y_1^2 + \cdots + c_m y_1^m = 0$, $c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_m^2 > 0$, то $c_1 y_k^1 + c_2 y_k^2 + \cdots + c_m y_k^m = 0$, $k = \overline{2,m}$, откуда $c_1\eta^1 + c_2\eta^2 + \cdots + c_m\eta^m = 0$, что невозможно ввиду линейной независимости $\{\eta^j\}_{j=1}^m$. Таким образом, линейная оболочка системы $\{y_k^j\}_{j,k=1}^m$ имеет не менее чем m измерений. Рассмотрим теперь линейную оболочку S_z системы $\{\mathbf{z}_k^j\}_{j,k=1}^m$ векторов пространства S с координатами в естественном базисе $z_k^j = (0, 0, \ldots, 0, \eta_{(k-1)(n-p)+1}^j, \eta_{(k-1)(n-p)+2}^j, \ldots, \eta_{k(n-p)}^j)$, $j = \overline{1,m}$, $k = \overline{1,m}$. Имеем $\dim S_z \geq m$. По построению системы $\{\mathbf{z}_k^j\}_{j,k=1}^m$ получим $S_z \subseteq S_0$ и $S_z \subseteq S_\mu$. Поскольку $\dim S_0 = m$, то $S_z = S_0$, значит, $S_0 \subseteq S_\mu$. Достаточность доказана.

Таким образом, доказана теорема 2, а значит, и теорема 1.

Из теоремы 1 очевидным образом следует критерий асимптотической устойчивости системы (1) по первым p компонентам.

Теорема 3. *Чтобы первые p компонент решения системы* (1) *были асимптотически устойчивы, необходимо и достаточно, чтобы все корни полинома $\Delta_\mu(\lambda) = \frac{\Delta(\lambda)}{\delta_\mu(\lambda)}$ имели отрицательные вещественные части.*

Следствие 1. Если кратности корней наибольшего общего делителя нескольких из полиномов $\{\delta_i(\lambda)\}$, $i \in \gamma$, меньше кратностей этих же корней полинома $\Delta(\lambda)$ (в частности, найдутся два взаимно простых полинома $\delta_j(\lambda)$ и $\delta_k(\lambda)$), то асимптотическая устойчивость системы (1) по p первым компонентам совпадает с асимптотической устойчивостью по всем переменным.

Следствие 2. Асимптотическая устойчивость системы (1) по $(n-1)$ первым компонентам совпадает с асимптотической устойчивостью по всем компонентам, если выполняется хотя бы одно из следующих условий:

1) среди элементов правого столбца матрицы A, не считая нижнего, есть ненулевые;
2) вещественная часть правого нижнего элемента матрицы A неотрицательна.

Следствие 3. Если столбцы, получаемые отбрасыванием от двух правых столбцов матрицы A двух нижних элементов, линейно независимы, то асимптотическая устойчивость системы (1) по $(n-2)$ первым компонентам совпадает с асимптотической устойчивостью по всем компонентам.

Рассмотрим автономную систему с правой частью

$$\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{f}. \tag{2}$$

Отождествим оператор $\mathbf{A}$ с его матрицей в естественном базисе. Формула Коши имеет вид ([2], с. 82)

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{X}(t-s)\mathbf{f}(s)ds, \tag{3}$$

где $\mathbf{X}(t)$ — фундаментальная матрица системы (1). Используя эту формулу, можно устанавливать вид зависимости компонент решения системы (2) от функции $\mathbf{f}(t)$. Например, докажем

Следствие 4. Ограниченность k-й компоненты решения системы (2) при любой $\mathbf{f} \in L_p$, $1 < p \le \infty$, равносильна асимптотической устойчивости k-й компоненты $x_k(t)$ решения системы (1).

Доказательство. Заметим, что для системы (1) асимптотическая устойчивость совпадает с экспоненциальной ([2], с. 254). Достаточно показать, что экспоненциальная устойчивость $x_k(t)$ равносильна ограниченности при любой $\mathbf{f} \in L_p$, $1 < p \le \infty$, интеграла из правой части формулы (3). Поскольку любой элемент k-й строки матрицы $\mathbf{X}(t)$ представляется в виде $\xi(t) = t^m \sum\limits_{j=1}^{r} c_j e^{\lambda_j t} + o(t^m e^{\alpha t})$, где константы $c_j \ne 0$ и $\alpha = \operatorname{Re}\lambda_j$ для всех $1 \le j \le r$, то достаточно показать, что при $\alpha < 0$ функция $I(t) = \int\limits_0^t \xi(t-s) f(s) ds$ ограничена при любых $f \in L_p$, а при $\alpha \ge 0$ существует такая $f \in L_p$, что $I(t)$ неограничена.

Пусть $\alpha < 0$. Для любого вещественного β, применяя неравенство Гёльдера, имеем

$$\left| \int_0^t (t-s)^m e^{(\alpha+i\beta)(t-s)} f(s) ds \right| \le \|f\|_p \left(\int_0^t |(t-s)^m e^{(\alpha+i\beta)(t-s)}|^q ds \right)^{1/q} =$$

$$= \|f\|_p \left(\int_0^t s^{qm} e^{q\alpha s} ds \right)^{1/q} < M^{1/q} \|f\|_p,$$

где $M = \int\limits_0^\infty s^{qm} e^{-q\alpha s} ds < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\|f\|_p$ — норма f в L_p ([3], с. 64). Отсюда следует ограниченность $I(t)$.

Пусть, наоборот, $\alpha \ge 0$. Обозначим $\beta_j = \operatorname{Im}\lambda_j$, $j = \overline{1,r}$. Положим

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1; \\ \dfrac{e^{i\beta_1 t}}{t}, & 1 \le t < \infty. \end{cases}$$

Таким образом, $f \in L_p$, $1 < p \le \infty$, и при $t \to \infty$

$$|I(t)| = \int_1^t e^{\alpha(t-s)} (t-s)^m \left[\sum_{j=1}^{r} c_j e^{i\beta_j (t-s)} \right] \frac{1}{s} e^{i\beta_1 s} ds = \begin{cases} At^m \ln t + o(t^m \ln t), & \alpha = 0; \\ Be^{\alpha t} t^m + o(e^{\alpha t} t^m), & \alpha > 0, \end{cases}$$

т. е. $|I(t)| \to \infty$ при $t \to \infty$. $\square$

2. Критерий устойчивости системы с последействием

Решением краевой задачи

$$\dot{\mathbf{F}}(\tau) = z\mathbf{A}\mathbf{F}(\tau), \quad \tau \in [0,\omega], \tag{4}$$

$$\mathbf{F}(0) - z\mathbf{F}(\omega) = \mathbf{x}_0, \tag{5}$$

где $\mathbf{A}$ — комплекснозначная $n \times n$-матрица, $z \in \mathbf{C}$, считается удовлетворяющая (4), (5) вектор-функция $\mathbf{F}(\tau) = (F_1(\tau), F_2(\tau), \ldots, F_n(\tau))$, где $F_k(\tau) \in C^1[0,\omega]$, $k = \overline{1,n}$. Покажем, что при достаточно малых по модулю z решение задачи (4), (5) существует и единственно. Действительно, уравнению (4) и начальному условию $\mathbf{F}(0) = \mathbf{y}_0$ удовлетворяет функция $\mathbf{F}(\tau) = e^{z\tau\mathbf{A}}\mathbf{y}_0$ и только она. Значит, условие (5) можно записать в виде $(\mathbf{I} - ze^{\omega z\mathbf{A}})\mathbf{F}(0) = \mathbf{x}_0$, где $\mathbf{I}$ — тождественный оператор. Очевидно, $\exists d > 0\ \forall z(|z| < d) : |z| + \frac{\ln|z|}{\omega\|\mathbf{A}\|} < 0$. Таким образом, внутри круга $\{z : |z| < d\}$ $\|ze^{\omega z\mathbf{A}}\| \le |z| e^{\omega|z|\,\|\mathbf{A}\|} = (e^{|z| + \ln|z|/\omega\|\mathbf{A}\|})^{\omega\|\mathbf{A}\|} < 1$ и, поскольку $C^1[0,\omega]$ банахово, существует оператор $(\mathbf{I} - ze^{\omega z\mathbf{A}})^{-1}$ ([3], с. 120). Полагая $\mathbf{y}_0 = (\mathbf{I} - ze^{\omega z\mathbf{A}})^{-1}\mathbf{x}_0$, сводим условие (5) к начальному условию $\mathbf{F}(0) = \mathbf{y}_0$ и задачу (4), (5) к задаче Коши, решение которой существует и единственно.

Пусть базис пространства $\mathbf{C}^n$ составляют r серий $\{\mathbf{h}_{i1}, \mathbf{h}_{i2}, \dots, \mathbf{h}_{i\,n_i}\}$, $i = \overline{1,r}$, с собственными значениями соответственно λ_i (частично они могут совпадать). Тогда все решения уравнения (4) имеют вид

$$\mathbf{F}(\tau) = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i z\tau} \sum_{j=1}^{n_i} c_{ij} \left(\frac{\tau^{j-1}}{(j-1)!}\mathbf{h}_{i1} + \dots + \tau\mathbf{h}_{ij-1} + \mathbf{h}_{ij} \right), \tag{6}$$

где c_{ij} — функции от z. Подставив (6) в (5), имеем

$$\mathbf{x}_0 = \sum_{i=1}^{r} \Bigg\{ \mathbf{h}_{i1} \bigg[c_{i1}(1 - ze^{\lambda_i \omega z}) - ze^{\lambda_i \omega z} \bigg(\omega c_{i2} + \frac{\omega^2}{2} c_{i3} + \dots + c_{i\,n_i} \frac{\omega^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \bigg) \bigg] +$$
$$+ \mathbf{h}_{i2} \bigg[c_{i1}(1 - ze^{\lambda_i \omega z}) - ze^{\lambda_i \omega z} \bigg(\omega c_{i3} + \frac{\omega^2}{2} c_{i4} + \dots + c_{i\,n_i} \frac{\omega^{n_i-2}}{(n_i-2)!} \bigg) \bigg] + \dots + \mathbf{h}_{i\,n_i}[c_{i\,n_i}(1 - ze^{\lambda_i \omega z})] \Bigg\},$$

откуда

$$\begin{aligned} c_{i\,n_i} &= \frac{\gamma_{i\ n_i}}{1 - ze^{\lambda_i \omega z}}, \\ c_{ij} &= \frac{\gamma_{ij}}{1 - ze^{\lambda_i \omega z}} + \frac{ze^{\lambda_i \omega z}}{1 - ze^{\lambda_i \omega z}} \sum_{i=1}^{n_i - j} \frac{\omega^l}{l!} c_{i\,j+l}(z), \end{aligned} \tag{7}$$

где γ_{ij} — коэффициенты разложения $\mathbf{x}_0$ по базису $\{\mathbf{h}_{ij}\}$, $i = \overline{1,r}$, $j = \overline{1,n_i}$. Формулы (6), (7) определяют все решения задачи (4), (5) при $|z| < d$. Существует такое $d_0 \le d$, что в окрестности нуля $S = \{z : |z| < d_0\}$ все функции $1 - ze^{\lambda_i \omega z}$, $i = \overline{1,r}$, не имеют нулей, значит, в S $\mathbf{F}$ является аналитической функцией от z с параметром τ и представляется в виде абсолютно сходящегося ряда

$$\mathbf{F}(\tau) \equiv \mathbf{F}(z,\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{x}_m(\tau) z^m. \tag{8}$$

Вследствие непрерывности $\mathbf{F}(z,\tau)$ в S как функции от z, $2\pi i \dot{\mathbf{x}}_m(\tau) = \frac{\partial}{\partial\tau} \int\limits_c \frac{\mathbf{F}(z,\tau)dz}{z^{m+1}} = \int\limits_c \frac{\dot{\mathbf{F}}(z,\tau)dz}{z^{m+1}} = 2\pi i \mathbf{y}_m(\tau)$ ([4], с. 661–663, доказательство переносится на комплексный случай без изменений), где $\dot{\mathbf{F}}(z,\tau) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \mathbf{y}_m(\tau) z^m$ и c — окружность радиуса меньше d_0 с центром в нуле. Таким образом, ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \mathbf{x}_m(\tau) z^m$ можно дифференцировать по τ. При любом $z \in S$ из (8) и (4) имеем $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \dot{\mathbf{x}}_m(\tau) z^m = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \mathbf{A}\mathbf{x}_{m-1}(\tau) z^m$, т. е. $\dot{\mathbf{x}}_0(\tau) + \sum\limits_{m=1}^{\infty} (\dot{\mathbf{x}}_m(\tau) - \mathbf{A}\mathbf{x}_{m-1}(\tau)) z^m = \mathbf{0}$, откуда

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}_0(\tau) = \mathbf{x}_0, \\ &\dot{\mathbf{x}}_m(\tau) - \mathbf{A}\mathbf{x}_{m-1}(\tau) = \mathbf{0}, \quad m \in \mathbf{N}. \end{aligned} \tag{9}$$

Из (8) и (5) имеем $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \mathbf{x}_m(0) z^m - \sum\limits_{m=1}^{\infty} \mathbf{x}_{m-1}(\omega) z^m = \mathbf{x}_0$, т. е. $\mathbf{x}_0(0) + \sum\limits_{m=1}^{\infty} (\mathbf{x}_m(0) - \mathbf{x}_{m-1}(\omega)) z^m = \mathbf{x}_0$ при любом $z \in S$, откуда

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}_0(0) = \mathbf{x}_0, \\ &\mathbf{x}_m(0) - \mathbf{x}_{m-1}(\omega) = 0, \quad m \in \mathbf{N}. \end{aligned} \tag{10}$$

Положив

$$\mathbf{x}(m\omega + \tau) = \mathbf{x}_m(\tau), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \tag{11}$$

получим функцию $\mathbf{x}(t)$, $t \geq 0$, которая, как следует из (9) и (10), везде, кроме, может быть, точек $m\omega$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, дифференцируема, а значит, подавно абсолютно непрерывна на любом конечном промежутке $[0, b]$ и является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t-\omega), & t \geq 0; \\ \mathbf{x}(\xi) = 0, & \xi \in [-\omega, 0); \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \tag{12}$$

Вследствие единственности решения задачи (12) при каждом $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{C}^n$ ([5], сс. 35, 88), формулы (6)–(8), (11) определяют все ее решения.

Исследуем на асимптотическую устойчивость по части переменных решение задачи (12) при произвольных начальных условиях $\mathbf{x}_0$. Определим многочлен $\Delta_\mu(\lambda)$ как в разделе 1. Пусть $P = \{i : \Delta_\mu(\lambda_i) = 0\}$. Согласно (6) $F_k(z,\tau) = \sum\limits_{i \in P} e^{\lambda_i z \tau} \sum\limits_{j=1}^{n_i} c_{ij}(1 - e^{\lambda_i \omega z})\left(\frac{\tau^{j-1}}{(j-1)!} h_{i1}^{(k)} + \cdots + \tau h_{i\ j-1}^{(k)} + h_{i\ j}^{(k)}\right)$, где $c_{ij}(1 - e^{\lambda_i \omega z})$ определяются формулами (7) и для каждого i среди $h_{ij}^{(k)}$, $j = \overline{1, n_i}$, есть ненулевые. Поскольку все $1 - e^{\lambda_i \omega z}$, $i \in P$, имеют конечное число корней в круге конечного радиуса с центром в нуле, можем определить $Z_1 = \left\{z : \prod\limits_{i \in P}(1 - e^{\lambda_i \omega z}) = 0\right\}$, $\rho = \min\limits_{z \in Z_1} |z|$, $Z_2 = \{z \in Z : |z| = \rho\} = \{z_j\}_{j=1}^q$. Найдется такое $\rho_0 > \rho$, что внутри круга $S_0 = \{z : |z| < \rho_0\}$ нет особых точек функции $F_k(z,\tau)$, кроме принадлежащих Z_2. Пусть для каждого $j \in \{1, 2, \ldots, q\}$ m_j — порядок полюса z_j функции $F_k(z,\tau)$. Внутри S_0 имеем представление $F_k(z,\tau) = \sum\limits_{j=1}^{q} \sum\limits_{l=1}^{m_j} \frac{u_l^{(j)}(\tau)}{(z - z_j)^l} + G_k(z,\tau)$, где функция $G_k(z,\tau)$ аналитическая. Рассмотрим разложение $F_k(z,\tau) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} x_m^{(k)}(\tau) z^m$ в круге $S \cap S_0$. Пусть $M = \max\limits_{1 \leq j \leq r} m_j$, $\zeta = \{j : m_j = M,\ 1 \leq j \leq q\}$. Положив $G_k(z,\tau) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} y_m^{(k)}(\tau) z^m$, имеем согласно неравенствам Коши $y_m^{(k)}(\tau) < \frac{K}{\rho_0^m} = o(\rho^{-m})$ при $m \to \infty$. Так как $(z - z_j)^{-l} = (-1)^l \frac{1}{z_j^l}\left(1 - \frac{z}{z_j}\right)^{-l} = (-1)^l \frac{1}{z_j^l} \sum\limits_{m=0}^{\infty} C_{m+l-1}^m \left(\frac{z}{z_j}\right)^m$ и $C_{m+l-1}^m = \frac{(m+l-1)(m+l-2)\ldots(m+1)}{(l-1)!} = \frac{(m\omega)^{l-1}}{\omega^{l-1}(l-1)!} + o((m\omega)^{l-1})$ при $m \to \infty$, то $|x_m^{(k)}(\tau)| = O(t^{M-1}/\rho^m)$ при $m \to \infty$. Поскольку $x_k(m\omega + \tau) = x_m^{(k)}(\tau)$, сопоставляя каждому $j \in \zeta$ все такие $i \in P$, что $\frac{1}{z_j} = e^{\lambda_i \omega z_j}$, и полагая $t = m\omega + \tau$, имеем

$$x_k(m\omega + \tau) = \sum_{i,j} \varkappa_{ij} (m\omega)^{M-1} \left(\frac{1}{z_j}\right)^m + o((m\omega)^{M-1} e^{\lambda_i z_j m\omega}) =$$
$$= \sum_{i,j} \varkappa_{ij} (t-\tau)^{M-1} e^{\lambda_i z_j (t-\tau)} + o((t-\tau)^{M-1} e^{\lambda_i z_j (t-\tau)}) = \sum_{i,j} \varkappa_{ij} t^{M-1} e^{\lambda_i z_j t} + o(t^{M-1} e^{\lambda_i z_j t}).$$

Для всех входящих в полученное выражение произведений $\lambda_i z_j$ имеем $\rho = |z_j| = e^{\omega \operatorname{Re}(\lambda_i z_j)} = e^{\alpha\omega}$, где $\alpha \in \mathbf{R}$, откуда $\alpha = -\ln\rho/\omega$.

Итак, справедлива

Теорема 4. *Среди первых p компонент решения задачи* (12) *найдется такая, что при $t \to \infty$*

$$x_k(t) = t^{M-1} \sum_j c_{jk} e^{(\alpha + i\beta_{j,k})t} + o(t^{M-1} e^{\alpha t}), \tag{13}$$

где $\alpha = -\frac{\ln \rho}{\omega}$, $\rho = \min\limits_{z \in Z_1} |z|$, $Z_1 = \left\{z : \prod\limits_{i \in P}(1 - z e^{\lambda_i \omega z}) = 0\right\}$. Остальные из этих p компонент либо представляются в виде (13), *либо являются бесконечно малыми относительно $t^{M-1} e^{\alpha t}$.*

Таким образом, для асимптотической (и экспоненциальной) устойчивости первых p компонент всех решений задачи (12) необходимо и достаточно условия $\rho > 1$. В работе [6] показано, что все корни функции $1 - z e^{\gamma z}$ лежат вне единичного круга тогда и только тогда, когда γ лежит внутри области D, ограниченной кривой $\partial D = \left(z : |\arg z| - |z| = \frac{\pi}{2},\ -\pi < \arg z \le \pi\right)$. С учетом этого факта из теорем 1 и 4 сразу следует критерий асимптотической устойчивости по части переменных для системы (12).

Теорема 5. *Чтобы первые p компонент системы* (12) *были асимптотически устойчивы, необходимо и достаточно, чтобы для всех корней λ_i полинома $\Delta_\mu(\lambda)$ выполнялось условие $\lambda_i\omega \in D$.*

Для автономной системы

$$\begin{aligned} &\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t-\omega) = \mathbf{f}(t), \\ &\mathbf{x}(\xi) = 0, \quad \xi \in [-\omega, 0), \end{aligned} \tag{14}$$

формула Коши имеет тот же вид, что и для системы без запаздывания (3)

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{X}(t-s)\mathbf{f}(s)ds,$$

где $\mathbf{X}(t)$ — фундаментальная матрица системы (14) ([7], сс. 98, 116). Доказательство следующего утверждения с учетом (13) и (14) дословно повторяет доказательство следствия 4 раздела 1.

Следствие теоремы 4. Ограниченность k-й компоненты решения системы (14) при любой $\mathbf{f} \in L_p$, $1 < p \le \infty$, равносильна асимптотической устойчивости k-й компоненты решения системы (12).

Литература

1. Понтрягин Л.С. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* – 6-е изд. – Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. – 400 с.
2. Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости.* – 2-е изд. – М.: Изд-во МГУ, 1998. – 480 с.
3. Люстерник Л.А., Соболев В.И. *Краткий курс функционального анализа.* – М.: Высш. школа, 1982. – 272 с.
4. Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Т. II. – 7-е изд. – М.: Наука, 1969. – 800 с.
5. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1991. – 280 с.
6. Рехлицкий З.И. *Об устойчивости решений некоторых линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом в банаховом пространстве* // ДАН СССР. – 1956. – Т. 111. – № 1. – С. 29–32.
7. Азбелев Н.В., Симонов П.М. *Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными.* – Пермь, Изд-во Пермск. ун-та, 2001. – 230 с.

Пермский государственный технический университет

Поступила 31.03.2003