ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 2 (453)

УДК 512.546.6

Ю.Н. МУХИН

О ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУППАХ СО СЧЕТНЫМ МНОЖЕСТВОМ МОНОТЕТИЧНЫХ ПОДГРУПП

Среди ограничений, позволяющих выделять доступные изучению классы локально компактных топологических групп G, значительный интерес представляют ограничения в терминах множества (решетки) $L(G)$ всех замкнутых подгрупп из G. Из многочисленных уже изученных ограничений такого рода укажем счетность $L(G)$. В [1] установлено строение дискретных или компактных абелевых, а также индуктивно компактных групп со счетным $L(G)$. Цель данной работы — изучить группы, подчиненные требованию счетности лишь некоторого множества монотетичных (т. е. порожденных топологически одним элементом) замкнутых подгрупп. Множество всех монотетичных подгрупп из G (обозначим его мощность через $\mu = \mu(G)$, а мощность $L(G)$ — через $\lambda = \lambda(G)$) является базисом решетки $L(G)$ относительно операции порождения замкнутой подгруппы. Как показано в ([2], с. 76), такой базис $M(G)$ в $L(G)$ можно составить всего лишь из $\mathbb{Z}$-подгрупп (бесконечных дискретных циклических) и циклов (таких $A \in L(G)$, что $A(L)$ есть цепь с коатомом, — это либо подгруппы, изоморфные аддитивным группам $\mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел, либо конечные примарные циклические $\mathbb{C}_{p^n}$ [3]); мощность $\beta = \beta(G)$ этого множества — инвариант (в отличие от μ) решетки $L(G)$ [3]. Ясно, что $\beta \le \mu \le \lambda$. А.Ю. Ольшанский построил примеры бесконечных периодических дискретных групп, все собственные подгруппы которых — простые циклические, так что $\beta = \mu = \lambda = \alpha$, где α — счетная мощность (“алеф-нуль”). Этим мотивируется изучение групп с не более, чем счетными λ, μ или β при дополнительных предположениях типа обобщенной коммутативности или обобщенной конечности. Здесь выбирается для этой цели требование индуктивной пронильпотентности группы G. Индуктивно компактные группы с $\beta \le \alpha$ будут описаны в другом месте.

Через G_0 обозначим связную компоненту единицы e группы G; $\Omega(G)$ — совокупность всех элементов конечных порядков из G; $\Pi(G)$ — множество всех простых чисел p, для которых в G есть топологический p-элемент, не равный e; G_p — силовская p-подгруппа, если она единственна; $Z_G(M)$ — централизатор подмножества M в группе G; $\mathbb{T}^m$ — m-мерный тор; $\mathbb{Q}_p$ — группа всех p-адических чисел; $\mathbb{C}_{p^\infty} = \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ — квазициклическая группа, $\times$, $\leftthreetimes$ — знаки прямого и полупрямого топологических произведений; $\simeq$ — знак топологического изоморфизма. Элемент a чист, если порождает подгруппу $\overline{\langle a\rangle} \simeq \mathbb{Z}$.

Примеры. 1) G — тихоновское произведение конечных групп $G_i \ne e$ взаимно простых порядков, $i \in I$, $|I| = \alpha$. Здесь каждый примарный элемент лежит в $\cup_i G_i$, так что $\beta(G) = \alpha$. Однако $\Omega(G)$ — прямое произведение всех G_i — плотная подгруппа в G. Таким образом, для групп с $\beta \le \alpha$ невозможно получить ту же структурную теорему, что и для групп с $\lambda \le \alpha$. В данном примере имеем континуум элементов вида (y_i), где y_i принимает одно из двух фиксированных значений g_i или e в G_i, порождающих различные монотетичные подгруппы, так что $\mu(G) > \alpha$. С другой стороны, если все G_i изоморфны одной группе (напр., $\mathbb{C}_p$), то $\beta(G) > \alpha$.

2) G — дискретное прямое произведение конечных групп $G_i \ne e$, $i \in I$, $|I| = \alpha$. В отличие от примера 1) здесь $\mu(G) = \alpha$, однако уже множество подгрупп ранга 1 (и тем более абелевых подгрупп) несчетно.

3) $G = A \leftthreetimes B$, $A = \langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}$, B — бесконечная компактная группа. Как известно, мощность B не меньше континуума. Каждый элемент ax, $x \in B$, чист, т. е. $\langle ax \rangle \simeq \mathbb{Z}$, причем $\langle ax \rangle = \langle ax_1 \rangle$ возможно лишь при $x_1 = x$, откуда $\beta(G) > \alpha$.

4) $G = A \times B$, $A \simeq \mathbb{Z}_p \simeq B$. Элементы, топологически порождающие B, образуют множество $B \backslash B^p$ мощности континуума. Покажем, что если $x, y \in B \backslash B^p$ и $e \neq a \in A$, то $\mathbb{Z}_p$-подгруппы $\overline{\langle ax \rangle}$ и $\overline{\langle ay \rangle}$ различны при $y \neq x$. Если это не так, то $ay = \lim\limits_{k \to \infty} (ax)^{n_k}$, $n_k \in \mathbb{Z}$. Учитывая $(ax)^{n_k} = a^{n_k} x^{n_k}$, однозначность разложения элементов в $A \times B$ и топологию прямого произведения, заключаем, что $a^{n_k} \to a$, $x^{n_k} \to y$. Из определения топологии в $\mathbb{Z}_p$ видно, что первый из этих пределов реализуется, лишь если $n_k \equiv \operatorname{mod} p^{m_k}$, где $m_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Но в этом случае и $x^{n_k} \to x$, т. е. $y = x$. Легко понять, что $G/\overline{\langle ax \rangle} \simeq \mathbb{Z}_p$, если $x \in A \setminus A^p$, так что в G несчетно множество даже $\mathbb{Z}_p$-подгрупп, определяющих $\mathbb{Z}_p$-факторгруппу. По теории двойственности получаем, что $(\mathbb{C}_{p^\infty})^2$ обладает несчетным множеством квазициклических факторгрупп и подгрупп, тогда как множество всех монотетичных (= циклических) подгрупп в $(\mathbb{C}_{p^\infty})^2$ счетно.

5) G — расширение конечной или квазициклической группы D посредством $\mathbb{Q}_p$. Ввиду делимости последней и отсутствия делимых подгрупп в $\operatorname{Aut} D$ имеем $G = DZ_G(D)$ и $Z_G(D)$ есть центральное расширение группы $Z(D)$ посредством $\mathbb{Q}_p$. Тогда из того, что $\mathbb{Q}_p$ есть объединение возрастающей последовательности монотетичных подгрупп, следует абелевость $Z_G(D)$, причем ее периодическая часть $Z(D)$, будучи либо делимой, либо конечной, имеет прямое дополнение, содержащее заданную открытую подгруппу U с $U \cap D = e$, так что $G = D \times Q$, $Q \simeq \mathbb{Q}_p$.

Если D конечна, то конечно и число подгрупп, взаимно простых с Q, каждая же из остальных $X \in L(G)$ пересекает Q по одной из счетного семейства $\mathbb{Z}_p$-подгрупп Y. В счетной группе $G/Y \simeq D \times \mathbb{C}_{p^\infty}$ все подгруппы, кроме Q/Y, конечны, так что их счетное множество.

Если $D \simeq \mathbb{C}_{p^\infty}$, $q \neq p$, то любая $X \in L(G)$ имеет вид $(X \cap D) \times (X \cap Q)$, откуда следует счетность $L(G)$.

Если же $D \simeq \mathbb{C}_{p^\infty}$, $e \neq Y < Q$, то ввиду примера 4 группа G/Y обладает несчетным множеством подгрупп типа p^∞. Полный прообраз каждой из них, кроме DY/Y, есть группа без кручения, являющаяся расширением $\mathbb{Z}_p$ посредством $\mathbb{C}_{p^\infty}$ и потому с учетом нульмерности изоморфная $\mathbb{Q}_p$. Таким образом, в $\mathbb{C}_{p^\infty} \times \mathbb{Q}_p$ множество $\mathbb{Q}_p$-подгрупп несчетно, тогда как множество монотетичных подгрупп счетно (ибо все циклические лежат в D, а все $\mathbb{Z}_p$-подгруппы зацепляют Q, сводя вопрос к $G/Y \simeq (\mathbb{C}_{p^\infty})^2$).

Лемма 1. *Свойства “$\beta(G) \leq \alpha$” и “$\mu(G) \leq \alpha$” наследуются замкнутыми подгруппами и факторгруппами (но не прямыми произведениями).*

Для подгрупп лемма очевидна. Каждая $\mathbb{Z}$-подгруппа факторгруппы G/N есть образ $\mathbb{Z}$-подгруппы из G. Если $\widetilde{C} = \overline{\langle \widetilde{c} \rangle}$ — p-группа в G/N, то $C_0 \leq N$, а элемент $a \in \widetilde{c}$ порождает либо $\mathbb{Z}$-подгруппу, либо компактную подгруппу A, равную ([2], с. 75) BA_0, где $B = \overline{\langle b \rangle}$ нульмерна, $B = B_p \times B_{p'}$. Ясно, что A_0 и B_p лежат в ядре морфизма $G \to G/N$, следовательно, C есть образ B_p, и мы пришли к $\beta(G/N) \leq \beta(G)$. Замечание о произведениях подтверждается примером 4, ибо $\beta(\mathbb{Z}_p) = \alpha$.

Лемма 2. *Если группа G дискретна, то каждое из неравенств $\beta(G) \leq \alpha$, $\mu(G) \leq \alpha$ равносильно тому, что G не более чем счетна.*

В самом деле, $|G| \geq \mu(G) \geq \beta(G)$, а если $\beta(G) \leq \alpha$, то счетно и множество конечных наборов бесконечных и примарных циклических подгрупп, откуда следует счетность G, равной объединению (счетных) подгрупп, порожденных этими наборами.

С другой стороны, для счетной группы G, как видно из примера 2, $\lambda(G)$ может быть несчетным.

Лемма 3. *Пусть N — нормализатор в G подгруппы $H = \overline{H}$ и пространство G/N компактно. Если $H \in M(G)$ (H монотетична) и $\beta(G) \leq \alpha$ (соответственно $\mu(G) \leq \alpha$), то $|G{:}H| < \infty$.*

Доказательство. Мощность компактного однородного пространства G/N либо конечна, либо не меньше континуума. В последнем случае класс сопряженных с H подгрупп оказался бы несчетным в противоречие с условием.

Лемма 4. *Пусть G нульмерна, индуктивно компактна и $\beta(G) \leq \alpha$. Тогда $\Omega = \Omega(G)$ — (характеристическая) индуктивно конечная счетная подгруппа в G (не обязательно замкнутая).*

Доказательство. Если $x_1, \ldots, x_k \in \Omega$, то каждый x_i, $i \leq k$, есть произведение конечного числа примарных элементов, образующих конечный набор $Y = \{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq \Omega$. Вместе с некоторой предкомпактной окрестностью единицы Y порождает ввиду индуктивной компактности G ([2], с. 86) компактную подгруппу U, в которой по лемме 3 класс сопряженных подгрупп с $Y_i = \langle y_j \rangle$ конечен и объединение всех этих подгрупп, $j \leq n$, — конечное U-инвариантное множество элементов конечных порядков. По лемме Дицмана порожденная этим множеством подгруппа $F \triangleleft U$ конечна, т. е. $F \leq \Omega$, откуда следует с учетом $x_1, \ldots, x_k \in F$, что Ω — подгруппа в G, причем индуктивно конечная. Она счетна, ибо порождается счетным множеством примарных циклических подгрупп.

Теорема 1. *Если G — индуктивно компактная p-группа, то $\beta(G) \leq \alpha$ тогда и только тогда, когда $\Omega = \Omega(G)$ — счетная дискретная подгруппа, а G/Ω — группа ранга 1 без кручения (т. е. $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{Z}_p$ или e).*

Доказательство. Необходимость. Пусть U — открытая компактная подгруппа в G, A — абелева подгруппа из $\Omega(U) = \Omega \cap U$. В компактной p-группе $\overline{A}$ факторгруппа по подгруппе Фраттини есть тихоновская степень $\mathbb{C}_p$ и ввиду примера 1 должна быть конечной. Но тогда $\overline{A}$ конечнопорождена и согласно [4] имеет вид $(\mathbb{Z}_p)^n \times F$, где $F = \Omega(\overline{A})$ конечна. Ясно, что $A = \Omega(A)$ должна лежать в F, но тогда A конечна и $\overline{A} = A$. Если бы индуктивно конечная группа $\Omega(U)$ была бесконечной, она содержала бы бесконечную абелеву подгруппу [5]. Значит, $\Omega \cap U$ конечна и, следовательно, Ω дискретна.

Перейдя к G/Ω, можем считать G p-группой без кручения. Ее элементы b и c порождают $\mathbb{Z}_p$-подгруппы B и C. В порожденной ими компактной подгруппе H нормализаторы B и C имеют по лемме 3 конечные индексы, поэтому их пересечение содержит нормальные $\mathbb{Z}_p$-подгруппы B_1 и C_1. Если бы $B_1 \cap C_1 = e$, то G содержала бы $(\mathbb{Z}_p)^2$, что невозможно (см. пример 4). Следовательно, $D = B \cap C \neq e$. Если бы любые две $\mathbb{Z}_p$-подгруппы были инцидентны, то всякий конечный набор элементов порождал бы $\mathbb{Z}_p$-подгруппу и G была бы изоморфна $\mathbb{Z}_p$ или $\mathbb{Q}_p$ [3]. Допустим, что B и C не инцидентны. Будучи нормальной в B и C, $D \triangleleft H$, а H/D порождается элементами bD и cD конечных порядков. По изложенному выше (с учетом лемм 1 и 4) H/D — конечная группа. Взяв еще $\mathbb{Z}_p$-подгруппу $X = \overline{\langle x \rangle}$ в H, замечаем, что $X \cap D \neq e$, так что $Z_X(D)$ имеет конечный индекс в X. Конечная p-группа $X/Z_X(D)$ вкладывается в $\operatorname{Aut} \mathbb{Z}_P$; но это невозможно при $p \neq 2$, т. к. в $\operatorname{Aut} \mathbb{Z}_p$ нет конечных p-подгрупп; из $\operatorname{Aut} \mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{C}_2 \times \mathbb{Z}_2$ следует, что при $p = 2$ X инвертирует D, что несовместимо с $X \cap D \neq e$. Итак, DX — абелева группа без кручения, в ней извлечение корней однозначно, откуда видна инцидентность D и X. Следовательно, D/D^{p^2} — единственная циклическая подгруппа порядка p^2 в H/D^{p^2}, и последняя согласно ([6], с. 212) должна быть циклической в противоречие с неинцидентностью B и C.

Достаточность видна из леммы 2 при $G = \Omega$. В противном случае G покрывается счетным набором подгрупп Y с $Y/\Omega \simeq \mathbb{Z}_p$. Согласно ([2], с. 75) $Y = X \leftthreetimes \Omega$, $X \simeq \mathbb{Z}_p$. Ввиду дискретности Ω и компактности $\mathbb{Z}_p$ X-орбита элемента $t \in \Omega$ конечна и порождает конечную X-инвариантную подгруппу T. Ясно, что Y покрывается счетным набором подгрупп вида $X \leftthreetimes T$. Централизатор Z подгруппы T и X конечного индекса p^k, так что p^k-степень произвольного элемента $xt \in XT$ имеет вид zt_1, и $(zt_1)^m = z^m$, где m — период T. Значит, каждая $\mathbb{Z}_p$-подгруппа $\overline{\langle xt \rangle}$ пересекает X по одной из подгрупп X^{p^i}. Для каждого i число $\mathbb{Z}_p$-подгрупп, содержащих X^{p^i}, конечно ввиду конечности XT/X^{p^i}, $i \geq k$, откуда $\beta(XT) \leq \alpha$.

Замечание. Поскольку для p-группы G множество монотетичных подгрупп совпадает с $M(G)$, теорема 1 описывает индуктивно компактные p-группы G с $\mu(G) \le \alpha$.

Следствие 1. Компактные p-группы G с $\beta(G) \le \alpha$ ($\mu(G) \le \alpha$) суть группы вида $Z \leftthreetimes F$, где F — конечная p-группа, Z — $\mathbb{Z}_p$ или e, и только они. Всякая такая группа содержит центральную $\mathbb{Z}_p$-подгруппу конечного индекса.

Применяя теорию двойственности Л.С. Понтрягина к теореме 1 в случае абелевой группы, получаем

Следствие 2. У абелевой p-группы G тогда и только тогда счетно множество циклических и квазициклических факторгрупп, когда G есть расширение $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{C}_{p^\infty}$ или e посредством компактной группы счетного веса; для дискретной G это означает $G = C \times F$, где F конечна, C — $\mathbb{C}_{p^\infty}$ или e.

Следствие 3. Для индуктивно компактной p-группы G счетность множества всех абелевых замкнутых подгрупп равносильна счетности $L(G)$, а также тому, что G одного из видов CF, $\mathbb{Z}_p \leftthreetimes CF$ или $\mathbb{Q}_p \times F$, где F — конечная p-группа, C — либо e, либо $\mathbb{C}_{p^\infty}$.

Доказательство. Делимый радикал D произвольной абелевой подгруппы A из Ω либо тривиален, либо изоморфен $\mathbb{C}_{p^\infty}$ ввиду примера 4, и $A = D \times B$, где B редуцирована. Если бы B/B^p была бесконечна, то число ее подгрупп ввиду примера 2 было бы несчетно. Значит, B/B^p конечна, откуда B конечнопорождена, а потому конечна. Итак, все абелевы подгруппы локально-конечной группы Ω оказались черниковскими. По теореме С.Н. Черникова ([7], с. 244) тогда и Ω — черниковская группа. Как отмечено выше, ее делимый радикал C либо тривиален, либо $C \simeq \mathbb{C}_{p^\infty}$. Представители смежных классов Ω по C порождают в Ω конечную подгруппу F_1 периода, скажем, p^m. Умножая ее на циклическую подгруппу того же периода из C, получим конечную характеристическую в Ω подгруппу F, причем $\Omega = CF$. Если $G/\Omega \simeq \mathbb{Z}_p$, то $G = \mathbb{Z}_p \leftthreetimes \Omega$ ([2], с. 75).

Допустим, что $G/\Omega \simeq \mathbb{Q}_p$, но $C \neq e$. Ввиду примера 5 имеем в G подгруппу вида $\mathbb{Q}_p \times \mathbb{C}_{p^\infty}$, обладающую несчетным множеством $\mathbb{Q}_p$-подгрупп, — противоречие с условием, приводящее к группе $\mathbb{Q}_p \times F$.

Счетность $L(G)$ для групп G указанного вида проверена в [1].

Теорема 2. *Для индуктивно пронильпотентной группы G тогда и только тогда $\beta(G) \le \alpha$, когда либо G — счетная дискретная группа, либо G индуктивно компактна и конечномерна, силовские p-подгруппы в G/G_0 устроены как в теореме 1, силовские p-подгруппы нульмерной подгруппы H из G_0 с $G_0/H \simeq \mathbb{T}^m$ устроены как в следствии 1, причем H_p и $(G/G_0)_p$ не содержат $\mathbb{Z}_p$ одновременно.*

Доказательство. Как известно [8], структура индуктивно пронильпотентной группы G такова: ее индуктивно компактный радикал $I = I(G)$ содержит все компактные подгруппы, $J = IG_0$ — открытая подгруппа, G/J — дискретная без кручения, $I \cap G_0 = I_0$ компактна и центральна в J, G_0/I_0 имеет центральный ряд с векторными секциями, I/I_0 — ограниченное прямое произведение своих силовских p-подгрупп S_p.

Если $\beta(G) \le \alpha$, то в G нет векторных секций, поскольку $\mathbb{R}$ содержит континуум $\mathbb{Z}$-подгрупп. Значит, $G_0 = I_0$, $J = I$. Допустив, что $\langle \widetilde{a} \rangle$ — $\mathbb{Z}$-подгруппа в G/I, берем $a \in \widetilde{a}$. Тогда $\langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}$, в подгруппе $\langle a \rangle \leftthreetimes I$ все элементы вида ax, $x \in I$, порождают попарно различные $\mathbb{Z}$-подгруппы (см. пример 3), число которых не меньше континуума, если в I есть бесконечная компактная подгруппа. Значит, таковой нет, т. е. I дискретна, а с нею и G.

В случае $G = I$ рассмотрим дискретную группу характеров A для G_0. Она без кручения и содержит свободную абелеву подгруппу B ранга m (т. е. прямое произведение m экземпляров $\mathbb{Z}$) с периодической A/B. По теории двойственности Л.С. Понтрягина аннулятор H подгруппы B в G_0 нульмерен, а G_0/H — тихоновская степень $\mathbb{T}^m$ окружности $\mathbb{T}$ и поэтому содержит $(\mathbb{C}_p)^m$, что противоречит условию (см. пример 1), если m бесконечно. Следовательно, G_0 конечномерна.

Абелева группа H равна тихоновскому произведению своих силовских p-подгрупп H_p, которые по следствию 1 имеют вид F_p или $\mathbb{Z}_p \times F_p$, где F_p конечна.

Силовские p-подгруппы S_p устроены в соответствии с теоремой 1. Если $\widetilde{X}$ — $\mathbb{Z}_p$-подгруппа в I/G_0, то $X = Y \leftthreetimes G_0$, $Y \simeq \mathbb{Z}_p$ ([2], с. 75), и $X = Y \times G_0$ ввиду центральности G_0. Допустив, что H содержит $Z \simeq \mathbb{Z}_p$, получаем подгруппу $Y \times Z$ вопреки примеру 4.

Достаточность условий в первом варианте следует из леммы 2. Пусть $G = I$. Каждая примарная монотетичная подгруппа из G/G_0 лежит в одной из S_p, где их множество счетно по теореме 1. Далее, дискретная абелева группа A без кручения содержит свободную подгруппу B ранга m, а силовская p-подгруппа в A/B имеет вид $\mathbb{C}_{p^\infty} \times \widetilde{F}_p$, где $\widetilde{F}_p$ конечна, и по следствию 2 обладает счетным множеством циклических и квазициклических факторгрупп. Поскольку B и A/B, очевидно, счетны, такова и A. Счетным будет и множество ее баз из m элементов, и тем более счетно множество всех свободных подгрупп B_1 ранга m. Отметим, что A/B_1 устроена так же, как и A/B, и содержит $\mathbb{C}_{p^\infty}$ одновременно с A/B. Теперь ясно, что и A обладает счетным множеством циклических и квазициклических факторгрупп, откуда $\beta(G_0) \leq \alpha$.

Всякий p-элемент x лежит в подгруппе XG_0, $X = \overline{\langle x \rangle}$, $\widetilde{X} = XG_0/G_0$ либо $\mathbb{C}_{p^n}$, либо $\mathbb{Z}_p$. Множество таких подгрупп, как уже отмечено, счетно, при этом XG_0 абелева ввиду центральности G_0. Если $\widetilde{X}$ конечна, то $XG_0 = C \times G_0$ в силу делимости G_0, а при $\widetilde{X} \simeq \mathbb{Z}_p$ — из-за двойственности и делимости $\mathbb{C}_{p^\infty}$. Имеем $x = yt$, $Y = \overline{\langle y \rangle} \leq C$, $T = \overline{\langle t \rangle} \leq G_0$. Из $t = y^{-1}x$ следует $T \leq XY$, но XY — p-группа. Отсюда вытекает, что аннулятор T в A содержит свободную подгруппу B_1 ранга m, а T лежит в ее аннуляторе H_1, устроенном так же, как и H. В частности, ее силовская p-подгруппа имеет вид $E \times K$, где E — либо e, либо $\mathbb{Z}_p$, K конечна. Следовательно, X лежит в $C \times E \times K$. По условию C и E не могут быть одновременно $\mathbb{Z}_p$-подгруппами, так что $\beta(CEK) \leq \alpha$ по следствию 1, и (с учетом счетности множества подгрупп B_1) теорема доказана.

Теория двойственности в случае абелевых групп позволяет получить

Следствие 4. У абелевой группы G тогда и только тогда счетно множество факторгрупп вида $\mathbb{T}$, $\mathbb{C}_{p^\infty}$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$, когда либо G — компактная группа счетного веса, либо G нульмерна, $G/I(G)$ есть расширение $\mathbb{Z}^m$ посредством дискретной периодической группы H, силовские p-подгруппы в G и в H устроены как в следствии 2 и не могут иметь $\mathbb{C}_{p^\infty}$-факторгрупп одновременно.

Следствие 5. Для индуктивно пронильпотентной группы G тогда и только тогда $\mu(G) \leq \alpha$, когда либо G — счетная дискретная группа, либо G индуктивно компактна, G_0 есть расширение подгруппы H вида $\mathbb{Z}_{p_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k}$ посредством конечномерного тора $\mathbb{T}^m$, $G/G_0 = K \times D$, где D — счетная дискретная группа, $\Pi(K)$ конечно, $\Pi(K) \cap \Pi(D) = \varnothing$, силовские p-подгруппы в K устроены как в теореме 1, H и K не содержат $\mathbb{Z}_p$ одновременно.

Доказательство. Ввиду теоремы 2 и леммы 2 можем считать, что G недискретна, индуктивно компактна и конечномерна, G_0 центральна в G и содержит нульмерную подгруппу H, равную тихоновскому произведению подгрупп $H_p = A_p \times B_p$, где B_p конечна, A_p — $\mathbb{Z}_p$ или e. Если $\Pi(H)$ бесконечно, то, взяв в каждой H_p по элементу $x_p \neq e$, породим ими монотетичную подгруппу X с $\Pi(X) = \Pi(H)$. Согласно примеру 1 $\mu(X) > \alpha$. Следовательно, $H = A \times B$, где B конечна, $A \simeq \mathbb{Z}_{p_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k}$. G_0/A связна, m-мерна и лиева, т. е. вида $\mathbb{T}^m$, так что можно, заменив H на A, считать H группой без кручения.

По теореме 2 $\widetilde{G} = G/G_0$ не содержит $\mathbb{Z}_{p_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Кроме того, $\mu(\widetilde{G}) \leq \alpha$. Если U — открытая компактная подгруппа в $\widetilde{G}$, то, как и выше, убеждаемся в конечности $\Pi(U)$. Следовательно, все силовские p-подгруппы в $\widetilde{G}$ с $p \in \Pi(U)$ порождают дискретную счетную подгруппу D, а оставшиеся силовские p-подгруппы — группу K, и $\widetilde{G} = K \times D$.

Обратно, если G имеет указанное строение, то $L(G_0)$ счетна по лемме 7 из [1]. По лемме 1 $\mu(D) \leq \alpha$. По теореме 1 $\mu(K_p) \leq \alpha$. Любая монотетичная подгруппа из $\widetilde{G}$ есть прямое произведение своих пересечений с сомножителями K_p, $p \in \Pi(K)$, и D. Отсюда видно, что $\mu(\widetilde{G}) \leq \alpha$.

Для произвольной монотетичной подгруппы X из G пересечение $X \cap G_0$ и монотетичная группа XG_0/G_0 выбираются счетным множеством способов. Осталось убедиться в счетности множества таких монотетичных подгрупп Y, что $Y \cap G_0 = X \cap G_0$ и $YG_0 = XG_0$. Группа XG_0 абелева ввиду центральности G_0. Пренебрегая $X \cap G_0$, считаем $XG_0 = X \times G_0$. Проекция ψ группы Y на G_0 есть морфизм с ядром $Y \cap X$, так что $\psi(Y)$ топологически изоморфна нульмерной компактной группе $Y/Y \cap X$. Если последняя бесконечна, то она содержит $\mathbb{Z}_p$ в силу конечности $\Pi(Y)$, но тогда и $\psi(Y)$ содержит $\mathbb{Z}_p$, что запрещено устройством G. Значит, $\psi(Y)$ конечна. Элемент $y = xt$ порождает Y тогда и только тогда, когда x порождает X, $t \in G_0$. При фиксированном x для $t = \psi(y)$, лежащего в $\psi(Y)$, имеется лишь счетное число возможностей, поскольку $\Omega(G_0)$ изоморфна подгруппе счетной группы $\Omega(\mathbb{T}^m)$.

Следствие 6. Для индуктивно пронильпотентной группы G условие $\mu(G) \leq \alpha$ равносильно счетности множества всех нульмерных монотетичных подгрупп.

Теорема 3. *Для индуктивно пронильпотентной группы G без чистых элементов счетность множества всех абелевых замкнутых подгрупп равносильна счетности $L(G)$, а также тому, что G одного из видов*:

1) $G = L \times (A \leftthreetimes CF)$, *где F конечна,* $L \simeq \mathbb{Q}_{p_1} \times \cdots \times \mathbb{Q}_{p_k}$, $A \simeq \mathbb{Z}_{p_{k+1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_l}$, $C \simeq \mathbb{C}_{q_1^\infty} \times \cdots \times \mathbb{C}_{q_m^\infty}$, *как p_i, $1 \leq i \leq l$, так и q_j, $1 \leq j \leq m$, — различные простые числа, причем все q_j отличны от всех p_i с $i \leq k$;*
2) $G = (A \times G_0)F$, *где F конечна и $F \lhd G$, G_0 содержит подгруппу H вида* $\mathbb{Z}_{p_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k}$ *с* $G_0/H \simeq \mathbb{T}^m$, $A \simeq \mathbb{Z}_{p_{k+1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_l}$, *все p_i, $1 \leq i \leq l$, — различные простые числа.*

Доказательство. Пусть сначала $G_0 = e$. При бесконечном $\Pi(G)$, взяв по монотетичной подгруппе в каждой G_p, породили бы ими абелеву подгруппу ранга 1 с секцией из примера 1, дающей противоречие со счетностью множества всех абелевых замкнутых подгрупп. Таким образом, $G = G_{p_1} \times \cdots \times G_{p_k}$ и, учитывая строение силовских p-подгрупп G_p, описанное в следствии 5, приходим к типу 1).

Пусть теперь $G_0 \neq e$. Тогда G_0 центральна в G, а ее строение описано в следствии 5. Прообраз в G подгруппы ранга 1 из G/G_0 абелев ввиду центральности G_0, поэтому рассуждение из предыдущего абзаца приводит к конечности $\Pi(G/G_0)$. Поскольку $G_0/H \simeq \mathbb{T}^m$, а силовская p-подгруппа тора $\mathbb{T}^m$ изоморфна $(\mathbb{C}_{p^\infty})^m$, нижний слой силовской p-подгруппы из G_0 конечен. Далее, полный прообраз D подгруппы типа $\mathbb{C}_{p^\infty}$ или $\mathbb{Q}_p$ из G/G_0 абелев. Дуальная группа $\widehat{D}$ есть расширение $\mathbb{Z}_p$ или $\mathbb{Q}_p$ посредством дискретной группы без кручения и потому содержит подгруппу вида $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p$, что в силу примера 3 противоречит счетности $L(D)$. Итак, в G/G_0 нет делимых подгрупп ранга 1.

В силовской p-подгруппе S_p из G/G_0 по теоремам 1 и 2 $\Omega(S_p)$ дискретна. Убедимся в ее конечности. Для этого возьмем в ней абелеву подгруппу $\widetilde{E}$ периода p, а в полном прообразе E группы $\widetilde{E}$ — максимальную абелеву подгруппу M, содержащую G_0. Расширение G_0 посредством $\mathbb{C}_p$ абелево, поэтому $M > G_0$. Поскольку группа E нильпотентна класса ≤ 2, то $M = Z_E(M)$, а отображение $\varphi_y : xG_0 \mapsto [x, y]$ корректно определено для каждого $y \in E$ и будет морфизмом группы M/G_0 в G_0. Образ M/G_0 при φ_y лежит в нижнем слое P силовской p-подгруппы из G_0, который, как отмечено выше, конечен. Отображение $\varphi : y \mapsto \varphi_y$ есть морфизм группы E, ядро которого есть $Z_E(M) = M$. Бесконечность M/G_0 означала бы ввиду примера 2 несчетность множества абелевых подгрупп. Конечность M/G_0 с учетом конечности P влечет конечность множества морфизмов из M/G_0 в G_0, в которое вкладывается E/M. Следовательно, $\widetilde{E}$ конечна. Итак, каждая абелева подгруппа в $\Omega(S_p)$ имеет конечный нижний слой, т. е. черниковская. По теореме С.Н. Черникова ([7], с. 244) черниковской будет и вся $\Omega(S_p)$, а поскольку в ней отсутствуют квазициклические подгруппы, она конечна. Тогда по теореме 1 S_p — расширение конечной группы K_p посредством $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Q}_p$ или e. В первом случае $S_p = \mathbb{Z}_p \leftthreetimes K_p$ ([2], с. 75). Во втором случае согласно примеру 5 $S_p = \mathbb{Q}_p \times K_p$, однако в G/G_0 нет подгрупп типа $\mathbb{Q}_p$. Следовательно, G/G_0 имеет вид $B \leftthreetimes K$, где K конечна, а $B \simeq \mathbb{Z}_{p_{k+1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_l}$ монотетична, причем ввиду теоремы 2 все простые числа p_i, $1 \le i \le l$, различны. Согласно ([2], с. 75) найдется такая подгруппа $A \simeq B$, что полный прообраз B равен $A \times G_0$. Рассуждая как в ([1], с. 132), найдем конечную нормальную в G подгруппу F, для которой $G = AG_0F$.

Обратно, для групп G типов 1) и 2) в [1] проверена счетность $L(G)$. Теорема доказана.

Литература

1. Полецьких В.М. *Топологічні групи із зличенним числом підгруп* // Вісник Київ. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1979. – Вып. 21. – С. 127–134.
2. Мухин Ю.Н. *Локально-компактные группы.* – Свердловск: Изд-во Уральск. ун-та, 1981. – 92 с.
3. Мухин Ю.Н. *Локально-компактные группы с дистрибутивной структурой замкнутых подгрупп* // Сиб. матем. журн. – 1967. – Т. 8. – № 2. – С. 366–375.
4. Мухин Ю.Н. *О числе порождающих элементов локально-компактной абелевой группы* // Алгебр. исслед. – Свердловск, 1976. – С. 23–32.
5. Каргаполов М.И. *О проблеме Шмидта* // Сиб. матем. журн. – 1962. – Т. 4. – № 1. – С. 232–235.
6. Холл М. *Теория групп.* – М.: Ин. лит., 1962. – 268 с.
7. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. *Основы теории групп.* – М.: Наука, 1962. – 288 с.
8. Ушаков В.И. *Топологические локально нильпотентные группы* // Сиб. матем. журн. – 1965. – Т. 6. – № 3. – С. 581–595.

Уральский государственный
педагогический университет

Поступила
01.12.1995