ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 6 (529)

УДК 517.55

*А.В. ШИШКИНА*

# ОБРАЩЕНИЕ ПРАВИЛА ЛОПИТАЛЯ ДЛЯ ГОЛОМОРФНЫХ В ШАРЕ ФУНКЦИЙ

Утверждение, обратное правилу Лопиталя, вообще говоря, неверно в том смысле, что из существования предела отношений функций нельзя сделать вывод о существовании предела отношения производных этих функций. Однако при некоторых дополнительных предположениях правило Лопиталя обратимо. В качестве примера приведем теорему Харди и Литтлвуда ([1], с. 215–216). Если функция $f(x)$ дифференцируема на $(0,1)$, $f'(x)$ возрастает на $(0,1)$, $c>0$, и $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)(1-x)^c = A > 0$, то существует $\lim\limits_{x\to 1-} f'(x)(1-x)^{c+1} = Ac$.

В [2] изучался вопрос о возможности обращения правила Лопиталя для аналитических функций. В частности, была доказана

**Теорема А.** *Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитические в $\Delta$, $\eta\in(0,\pi/2)$, $A\in C$, $W_\eta$ — угол Штольца из $\Delta$ величиной $2\eta$ с вершиной в точке $z=1$ и существует $\lim\limits_{W_\eta\ni z\to 1}\frac{f(z)}{g(z)}=A$. Если значения функции $\frac{g'(z)}{g(z)}(1-z)$ отделены от нуля в $W_\eta$ при $z\to 1$, то существует $\lim\limits_{W_{\eta-\varepsilon}\ni z\to 1}\frac{f'(z)}{g'(z)}=A$ для любого $\varepsilon\in(0,\eta)$. Если $\lim\limits_{W_\eta\ni z\to 1}\frac{g'(z)}{g(z)}(1-z)=0$, то для любого $\varepsilon\in(0,\eta)$ $\lim\limits_{W_{\eta-\varepsilon}\ni z\to 1}\frac{f'(z)}{g(z)}(1-z)=0$.*

В частном случае, когда функция $g(z)=(1-z)^{-c}$, $c\in C$, из теоремы А получается результат из [3].

Многомерные аналоги изучаемой проблемы приводились в [4] и [5].

Пусть $C^n$ — $n$-мерное комплексное пространство векторов $z=(z_1,z_2,\dots,z_n)$, где $z_1,z_2,\dots,z_n\in C$; $B^n=\{z:\|z\|<1\}$ — евклидов шар в пространстве $C^n$. Если $\varepsilon>0$, то обозначим $B^n_\varepsilon=\varepsilon B^n$.

При изучении многих вопросов граничного поведения функций в многомерном случае роль угла Штольца играет область Кораньи–Стейна.

Пусть $\alpha>1$, $e_1=(1,0,\dots,0)\in C^n$, тогда область Кораньи–Стейна $\Omega_\alpha=\Omega_\alpha^{e_1}$ с вершиной $e_1$ есть множество всех $z\in B^n$ таких, что $|1-z_1|<\frac{\alpha}{2}(1-\|z\|^2)$ (напр., [6]).

В данной работе продолжаются исследования, проведенные в [4] и [5], доказывается аналог теоремы А в многомерном случае. Обозначим $\phi_r(z)$, $r\in(0,1)$, — автоморфизм шара $B^n$ ([6]),

$$\phi_r(z)=\big(\phi_{r1}(z),\dots,\phi_{rn}(z)\big),$$

где

$$\phi_{r1}(z)=\frac{r-z_1}{1-rz_1},\quad \phi_{rk}(z)=-\frac{z_k\sqrt{1-r^2}}{1-rz_1},\quad 2\le k\le n,$$

и пусть для $\varepsilon>0$ $\Phi_\varepsilon=\bigcup\limits_{r\in(0,1)}\phi_r(B^n_\varepsilon)$.

Известна

Работа выполнена при финансовой поддержке Конкурсного центра фундаментального естествознания, грант № А04-2.8-719.

**Лемма** ([4]). *Пусть* $\alpha > 1$ *и* $0 < \varepsilon < 1$. 1) *Если* $\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^2 < \alpha$, *то* $\Phi_\varepsilon \subset \Omega_\alpha$ *в малой окрестности точки* $e_1$.

2) *Если*

$$\min\left\{1+\varepsilon^2, \sqrt{1+\frac{4\varepsilon^2}{(1+\varepsilon^2)^2}}\right\} > \alpha,$$

*то* $\Omega_\alpha \subset \Phi_\varepsilon$ *в малой окрестности точки* $e_1$.

**Теорема 1.** *Пусть* $f(z)$, $g(z)$ — *голоморфные в* $B^n$ *функции и существует*

$$\lim_{\Omega_\alpha \ni z \to e_1} \frac{f(z)}{g(z)} = A \neq \infty, \tag{1}$$

*тогда*

1) *если для некоторого натурального* $k_1$, $2 \leq k_1 \leq n$, *функция* $\frac{\partial g(z)}{\partial z_{k_1}} \frac{z_{k_1}}{g(z)}$ *отделена от нуля при* $z \to e_1$ *в* $\Omega_\alpha$, *то существует* $\alpha_1 < \alpha$ *такое, что*

$$\lim_{\Omega_{\alpha_1} \ni z \to e_1} \frac{\partial f(z)/\partial z_{k_1}}{\partial g(z)/\partial z_{k_1}} = A;$$

*если же* $\lim\limits_{\Omega_\alpha \ni z \to e_1} \frac{\partial g(z)}{\partial z_{k_1}} \frac{z_{k_1}}{g(z)} = 0$, *то существует* $\alpha_1 < \alpha$ *такое, что*

$$\lim_{\Omega_{\alpha_1} \ni z \to e_1} \frac{\partial f(z)}{\partial z_{k_1}} \frac{z_{k_1}}{g(z)} = 0;$$

2) *если функция* $\frac{\partial g(z)}{\partial z_1} \frac{1-z_1}{g(z)}$ *отделена от нуля при* $z \to e_1$ *в* $\Omega_\alpha$, *то существует* $\alpha_1 < \alpha$ *такое, что*

$$\lim_{\Omega_{\alpha_1} \ni z \to e_1} \frac{\partial f(z)/\partial z_1}{\partial g(z)/\partial z_1} = A;$$

*если же* $\lim\limits_{\Omega_\alpha \ni z \to e_1} \frac{\partial g(z)}{\partial z_1} \frac{1-z_1}{g(z)} = 0$, *то существует* $\alpha_1 < \alpha$ *такое, что*

$$\lim_{\Omega_{\alpha_1} \ni z \to e_1} \frac{\partial f(z)}{\partial z_1} \frac{1-z_1}{g(z)} = 0.$$

**Доказательство.** Докажем теорему, используя метод доказательства из [4].

Рассмотрим автоморфизм $\phi_r(z)$, $r \in (0,1)$. Если $\alpha$ и $\varepsilon$ такие, как в лемме, то $\Phi_\varepsilon \subset \Omega_\alpha$ в малой окрестности точки $e_1$. Очевидно, $\phi_r(z) \to e_1$ при $r \to 1-$ равномерно в $B^n_\varepsilon$. Отсюда и из (1) следует

$$\frac{f(\phi_r)}{g(\phi_r)} \to A \tag{2}$$

равномерно в $B^n_\varepsilon$ при $r \to 1-$.

Докажем утверждение п. 1) теоремы. Дифференцируя (2) по $z_{k_1}$, получаем, опустив зависимость $f$ и $g$ от $\phi_r$,

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \phi_{rk_1}} \frac{\partial \phi_{rk_1}}{\partial z_{k_1}} g - \frac{\partial g}{\partial \phi_{rk_1}} \frac{\partial \phi_{rk_1}}{\partial z_{k_1}} f\right] g^{-2} = -\frac{z_{k_1}\sqrt{1-r^2}}{1-rz_1} \frac{\partial g}{\partial \phi_{rk_1}} \frac{1}{g z_{k_1}} \left(\frac{\partial f/\partial \phi_{rk_1}}{\partial g/\partial \phi_{rk_1}} - \frac{f}{g}\right) \to 0 \tag{3}$$

равномерно в $B^n_\varepsilon$ при $r \to 1-$.

Из условий п. 1) теоремы функции

$$-\frac{z_{k_1}\sqrt{1-r^2}}{1-rz_1} \frac{\partial g}{\partial \phi_{rk_1}} \frac{1}{g} = \frac{\partial g}{\partial \phi_{rk_1}} \frac{\phi_{rk_1}}{g} \quad \text{и} \quad \frac{1}{z_{k_1}}$$

отделены от нуля в $B^n_\varepsilon$ при $r \to 1-$, поэтому из (3) вытекает

$$\frac{\partial f/\partial \phi_{rk_1}}{\partial g/\partial \phi_{rk_1}} - \frac{f}{g} \to 0$$

равномерно в $B^n_\varepsilon$ при $r \to 1-$. Из (2) следует

$$\frac{\partial f/\partial \phi_{rk_1}}{\partial g/\partial \phi_{rk_1}} \to A$$

равномерно в $B^n_\varepsilon$ при $r \to 1-$.

Отсюда получаем

$$\frac{\partial f(w)/\partial w_{k_1}}{\partial g(w)/\partial w_{k_1}} \to A$$

в $\Phi_\varepsilon$ при $w \to e_1$.

Из п. 2) леммы следует, что существует $\alpha_1 < \alpha$ такое, что $\frac{\partial f(w)/\partial w_{k_1}}{\partial g(w)/\partial w_{k_1}} \to A$ при $w \to e_1$ в $\Omega_{\alpha_1}$.

Рассмотрим случай, когда $\lim\limits_{\Omega_\alpha \ni z \to e_1} \frac{\partial g(z)}{\partial z_{k_1}} \frac{z_{k_1}}{g(z)} = 0$. Тогда из (3) вытекает

$$\frac{\partial f}{\partial \phi_{rk_1}} \frac{\phi_{rk_1}}{g} - \frac{f}{g} \frac{\partial g}{\partial \phi_{rk_1}} \frac{\phi_{rk_1}}{g} \to 0$$

равномерно в $B^n_\varepsilon$ при $r \to 1-$. Отсюда те же рассуждения, что и в случае отделенности от нуля, приводят к выводу, что существует $\alpha_1 < \alpha$, для которого

$$\lim_{\Omega_{\alpha_1} \ni w \to e_1} \frac{\partial f(w)}{\partial w_{k_1}} \frac{w_{k_1}}{g(w)} = 0.$$

Утверждение п. 1) теоремы доказано.

2) Продифференцируем (2) по $z_1$, тогда

$$\left[g \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \phi_{rk}} \frac{\partial \phi_{rk}}{\partial z_1} - f \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial \phi_{rk}} \frac{\partial \phi_{rk}}{\partial z_1}\right] g^{-2} \to 0 \tag{4}$$

равномерно в $B^n_\varepsilon$ при $r \to 1-$.

Заметив, что

$$\frac{\partial \phi_{r1}}{\partial z_1} = \frac{r^2 - 1}{(1 - r z_1)^2}, \quad \frac{\partial \phi_{rk}}{\partial z_1} = -\frac{r z_k \sqrt{1 - r^2}}{(1 - r z_1)^2}, \quad k = 2, \dots, n,$$

преобразуем (4):

$$\begin{gathered}\frac{1}{g^2} \frac{r^2 - 1}{(1 - r z_1)^2} \left( \frac{\partial f}{\partial \phi_{r1}} g - \frac{\partial g}{\partial \phi_{r1}} f \right) - \frac{1}{g^2} \sum_{k=2}^{n} \left[ \frac{r z_k \sqrt{1 - r^2}}{(1 - r z_1)^2} \left( \frac{\partial f}{\partial \phi_{rk}} g - \frac{\partial g}{\partial \phi_{rk}} f \right) \right] = \\ = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial \phi_{r1}} \frac{r^2 - 1}{(1 - r z_1)^2} \left( \frac{\partial f/\partial \phi_{r1}}{\partial g/\partial \phi_{r1}} - \frac{f}{g} \right) - \sum_{k=2}^{n} \left[ \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial \phi_{rk}} \frac{r z_k \sqrt{1 - r^2}}{(1 - r z_1)^2} \left( \frac{\partial f/\partial \phi_{rk}}{\partial g/\partial \phi_{rk}} - \frac{f}{g} \right) \right] \to 0 \end{gathered} \tag{5}$$

равномерно в $B^n_\varepsilon$ при $r \to 1-$.

Как и при доказательстве п. 1) (см. (3)), получаем

$$-\frac{z_k \sqrt{1 - r^2}}{1 - r z_1} \frac{\partial g}{\partial \phi_{rk}} \frac{1}{g} \left( \frac{\partial f/\partial \phi_{rk}}{\partial g/\partial \phi_{rk}} - \frac{f}{g} \right) \to 0$$

равномерно в $B_\varepsilon^n$ при $r \to 1-$ для каждого $k = 2, \dots, n$. Функция $\frac{r}{1-rz_1}$ ограничена на компакте $\overline{B}_\varepsilon^n$. Следовательно, последняя сумма в (5) стремится равномерно к нулю в $B_\varepsilon^n$ при $r \to 1-$. Отсюда и из (5) следует

$$\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial \phi_{r1}}\frac{r^2-1}{(1-rz_1)^2}\left(\frac{\partial f/\partial \phi_{r1}}{\partial g/\partial \phi_{r1}} - \frac{f}{g}\right) \to 0 \qquad (6)$$

равномерно в $B_\varepsilon^n$ при $r \to 1-$. Заметим, что $\frac{r^2-1}{(1-rz_1)^2} = \frac{(\phi_{r1}-1)(r+1)}{(1+z_1)(1-rz_1)}$. Из условия п. 2) теоремы функции $\frac{1-\phi_{r1}}{g}\frac{\partial g}{\partial \phi_{r1}}$ и $\frac{r+1}{(1+z_1)(1-rz_1)}$ отделены от нуля в $B_\varepsilon^n$ при $r \to 1-$, поэтому из (6) следует

$$\frac{\partial f/\partial \phi_{r1}}{\partial g/\partial \phi_{r1}} - \frac{f}{g} \to 0$$

равномерно в $B_\varepsilon^n$ при $r \to 1-$. Отсюда, как и при доказательстве п. 1), показывается, что существует $\alpha_1 < \alpha$ такое, что

$$\lim_{\Omega_{\alpha_1} \ni w \to e_1} \frac{\partial f(w)/\partial w_1}{\partial g(w)/\partial w_1} = A.$$

В случае, когда $\lim\limits_{\Omega_\alpha \ni z \to e_1} \frac{\partial g(z)}{\partial z_1}\frac{1-z_1}{g(z)} = 0$, учитывая отделенность от нуля функции $\frac{r+1}{(1+z_1)(1-rz_1)}$ в $B_\varepsilon^n$ при $r \to 1-$, из (6) получим

$$\frac{\partial f}{\partial \phi_{r1}}\frac{1-\phi_{r1}}{g} - \frac{f}{g}\frac{\partial g}{\partial \phi_{r1}}\frac{1-\phi_{r1}}{g} \to 0$$

равномерно в $B_\varepsilon^n$ при $r \to 1-$. Рассуждая, как и при доказательстве п. 1), делаем вывод, что существует $\alpha_1 < \alpha$, для которого $\lim\limits_{\Omega_{\alpha_1} \ni w \to e_1} \frac{\partial f(w)}{\partial w_1}\frac{1-w_1}{g(w)} = 0$. $\square$

**Замечание 1.** В п. 1) теоремы 1 вместо отделенности от нуля (или стремления к нулю) функции $\frac{\partial g(z)}{\partial z_{k_1}}\frac{z_{k_1}}{g(z)}$ при $z \to e_1$ в $\Omega_\alpha$ можно требовать отделенность от нуля $\frac{\partial g(z)}{\partial z_{k_1}}\frac{z_p}{g(z)}$ для некоторого натурального $p$, $2 \le p \le n$. Это следует из доказательства данного пункта (см. (3)).

**Замечание 2.** В частных случаях, когда функция $g(z) = (1 - z_1^2 - z_2^2 - \dots - z_n^2)^{-c}$ или $g(z) = (1 - z_1^2 - a_2 z_2^2 - \dots - a_n z_n^2)^{-c}$, $a_k \in C$, $a_k \neq 0$, $k = 2, \dots, n$, $c \in C$ (т. к. функция $\frac{\partial g(z)}{\partial z_1}\frac{1-z_1}{g(z)}$ отделена от нуля при $z \to e_1$ в $\Omega_\alpha$), из п. 2) теоремы 1 получаем результаты из [4] и [5] соответственно.

В [2] также была доказана

**Теорема B.** *Пусть функции $f(z)$ и $G(z)$ аналитические в $\Delta$, $A, B \in C$, $\eta \in (0, \pi/2)$, $W_\eta$ — угол Штольца из $\Delta$ величиной $2\eta$ с вершиной в точке $z = 1$. Если*

1) $\lim\limits_{W_\eta \ni z \to 1} f(z)G'(z) = A$,

2) $\lim\limits_{W_\eta \ni z \to 1} \frac{(\log G'(z))'}{(\log G(z))'} = B$,

3) *значения функции $\frac{G'(z)}{G(z)}(1-z)$ отделены от нуля в угле Штольца $W_\eta$ при $z \to 1$,*

*то для любого $\varepsilon \in (0, \eta)$ существует $\lim\limits_{W_{\eta-\varepsilon} \ni z \to 1} f'(z)G(z) = -AB$.*

*Если выполнены условия* (1) *и* (2) *и $\lim\limits_{W_\eta \ni z \to 1} \frac{G'(z)}{G(z)}(1-z) = 0$, то для любого $\varepsilon \in (0, \eta)$*

$$\lim_{W_{\eta-\varepsilon} \ni z \to 1} f'(z)G'(z)(1-z) = 0.$$

Многомерным аналогом этой теоремы является

**Теорема 2.** *Пусть $f(z)$, $G(z)$ — голоморфные в $B^n$ функции и для некоторых натуральных $k_0$, $k_1 \le n$ существуют*

$$\lim_{\Omega_\alpha \ni z \to e_1} f(z)\frac{\partial G(z)}{\partial z_{k_0}} = A_{k_0} \ne \infty, \tag{7}$$

$$\lim_{\Omega_\alpha \ni z \to e_1} \frac{\partial^2 G(z)}{\partial z_{k_0}\partial z_{k_1}} \frac{G(z)}{(\partial G(z)/\partial z_{k_0})^2} = B_{k_0k_1} \ne \infty, \tag{8}$$

*тогда*

1) *если $2 \le k_1 \le n$ и функция $\frac{\partial G(z)}{\partial z_{k_0}}\frac{z_{k_1}}{G(z)}$ отделена от нуля при $z \to e_1$ в $\Omega_\alpha$, то существует $\alpha_1 < \alpha$ такое, что*

$$\lim_{\Omega_{\alpha_1} \ni z \to e_1} \frac{\partial f(z)}{\partial z_{k_1}} G(z) = -A_{k_0}B_{k_0k_1};$$

*если же $\lim\limits_{\Omega_\alpha \ni z \to e_1} \frac{\partial G(z)}{\partial z_{k_0}}\frac{z_{k_1}}{G(z)} = 0$, то существует $\alpha_1 < \alpha$ такое, что*

$$\lim_{\Omega_{\alpha_1} \ni z \to e_1} \frac{\partial f(z)}{\partial z_{k_1}}\frac{\partial G(z)}{\partial z_{k_0}} z_{k_1} = 0;$$

2) *если $k_1 = 1$ и функция $\frac{\partial G(z)}{\partial z_{k_0}}\frac{1-z_1}{G(z)}$ отделена от нуля при $z \to e_1$ в $\Omega_\alpha$, то существует $\alpha_1 < \alpha$ такое, что*

$$\lim_{\Omega_{\alpha_1} \ni z \to e_1} \frac{\partial f(z)}{\partial z_1} G(z) = -A_{k_0}B_{k_01};$$

*если же $\lim\limits_{\Omega_\alpha \ni z \to e_1} \frac{\partial G(z)}{\partial z_{k_0}}\frac{1-z_1}{G(z)} = 0$, то существует $\alpha_1 < \alpha$ такое, что*

$$\lim_{\Omega_{\alpha_1} \ni z \to e_1} \frac{\partial f(z)}{\partial z_1}\frac{\partial G(z)}{\partial z_{k_0}}(1 - z_1) = 0.$$

**Доказательство.** Как и при доказательстве теоремы 1, из (7) и леммы получаем

$$f(\phi_r)\frac{\partial G(\phi_r)}{\partial \phi_{rk_0}} \to A_{k_0} \tag{9}$$

равномерно в $B^n_\varepsilon$ при $r \to 1-$.

Докажем утверждение п. 1) теоремы 2. Продифференцируем (9) по $z_{k_1}$, опустив зависимость $f$ и $G$ от $\phi_r$,

$$\frac{\partial f}{\partial \phi_{rk_1}}\frac{\partial \phi_{rk_1}}{\partial z_{k_1}}\frac{\partial G}{\partial \phi_{rk_0}} + f\frac{\partial^2 G}{\partial \phi_{rk_0}\partial \phi_{rk_1}}\frac{\partial \phi_{rk_1}}{\partial z_{k_1}} = -\frac{z_{k_1}\sqrt{1-r^2}}{1 - rz_1}\frac{\partial G}{\partial \phi_{rk_0}}\frac{1}{Gz_{k_1}}\left[\frac{\partial f}{\partial \phi_{rk_1}}G + \right.$$
$$\left. + f\frac{\partial G}{\partial \phi_{rk_0}}\frac{\partial^2 G}{\partial \phi_{rk_0}\partial \phi_{rk_1}}\frac{G}{(\partial G/\partial \phi_{rk_0})^2}\right]\Bigg|_{\phi_r} \to 0 \tag{10}$$

равномерно в $B^n_\varepsilon$ при $r \to 1-$.

Так как из условий п. 1) теоремы 2 и леммы следует, что функции $-\frac{z_{k_1}\sqrt{1-r^2}}{1-rz_1}\frac{\partial G}{\partial \phi_{rk_0}}\frac{1}{G}$ и $\frac{1}{z_{k_1}}$ отделены от нуля в $B^n_\varepsilon$ при $r \to 1-$, то из (10)

$$[\,\cdot\,]|_{\phi_r} \to 0 \tag{11}$$

равномерно в $B^n_\varepsilon$ при $r \to 1-$. Из (8) и леммы следует

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \phi_{rk_0}\partial \phi_{rk}}\frac{G}{(\partial G/\partial \phi_{rk_0})^2} \to B_{k_0k}$$

равномерно в $B^n_\varepsilon$ при $r \to 1-$. Отсюда и из (11) с учетом (9) вытекает

$$\frac{\partial f}{\partial \phi_{rk_1}} G \to -A_{k_0} B_{k_0 k_1}$$

равномерно в $B^n_\varepsilon$ при $r \to 1-$. Рассуждая, как и при доказательстве п. 1) теоремы 1, получаем, что существует $\alpha_1 < \alpha$ такое, что

$$\lim_{\Omega_{\alpha_1} \ni w \to e_1} \frac{\partial f(w)}{\partial w_{k_1}} G(w) = -A_{k_0} B_{k_0 k_1}.$$

В случае, когда $\lim\limits_{\Omega_\alpha \ni z \to e_1} \frac{\partial G(z)}{\partial z_{k_0}} \frac{z_{k_1}}{G(z)} = 0$, из (10) вытекает

$$\frac{\partial f}{\partial \phi_{rk_1}} \frac{\partial G}{\partial \phi_{rk_0}} \phi_{rk_1} + f \frac{\partial G}{\partial \phi_{rk_0}} \frac{\partial^2 G}{\partial \phi_{rk_0} \partial \phi_{rk_1}} \frac{G}{(\partial G / \partial \phi_{rk_0})^2} \frac{\partial G}{\partial \phi_{rk_0}} \frac{\phi_{rk_1}}{G} \to 0$$

равномерно в $B^n_\varepsilon$ при $r \to 1-$. Отсюда, рассуждая, как и в первой части доказательства этого пункта, когда функция $\frac{\partial G(z)}{\partial z_{k_0}} \frac{z_{k_1}}{G(z)}$ отделена от нуля, докажем существование такого $\alpha_1 < \alpha$, что

$$\lim_{\Omega_{\alpha_1} \ni w \to e_1} \frac{\partial f(w)}{\partial w_{k_1}} \frac{\partial G(w)}{\partial w_{k_0}} w_{k_1} = 0.$$

2) Продифференцируем (9) по $z_1$, получим

$$\frac{\partial \phi_{r1}}{\partial z_1} \left( \frac{\partial f}{\partial \phi_{r1}} \frac{\partial G}{\partial \phi_{rk_0}} + f \frac{\partial^2 G}{\partial \phi_{rk_0} \partial \phi_{r1}} \right) + \sum_{k=2}^{n} \frac{\partial \phi_{rk}}{\partial z_1} \left( \frac{\partial f}{\partial \phi_{rk}} \frac{\partial G}{\partial \phi_{rk_0}} + f \frac{\partial^2 G}{\partial \phi_{rk_0} \partial \phi_{rk}} \right) =$$
$$= \frac{r^2 - 1}{(1 - rz_1)^2} \frac{\partial G}{\partial \phi_{rk_0}} \frac{1}{G} A_1 - \sum_{k=2}^{n} \frac{rz_k}{(1 - rz_1)} \frac{\sqrt{1 - r^2}}{1 - rz_1} \frac{\partial G}{\partial \phi_{rk_0}} \frac{1}{G} A_k \to 0 \quad (12)$$

равномерно в $B^n_\varepsilon$ при $r \to 1-$, где

$$A_k = \frac{\partial f}{\partial \phi_{rk}} G + f \frac{\partial G}{\partial \phi_{rk_0}} \frac{\partial^2 G}{\partial \phi_{rk_0} \partial \phi_{rk}} \frac{G}{(\partial G / \partial \phi_{rk_0})^2}.$$

Как и при доказательстве п. 1) этой теоремы, дифференцируя (9) по $z_k$, $k = 2, \dots, n$, получаем (ср. с (10))

$$-\frac{z_k \sqrt{1 - r^2}}{1 - rz_1} \frac{\partial G}{\partial \phi_{rk_0}} \frac{1}{G} A_k \to 0$$

равномерно в $B^n_\varepsilon$ при $r \to 1-$. Функция $\frac{r}{1 - rz_1}$ ограничена на компакте $\overline{B}^n_\varepsilon$. Следовательно, последняя сумма в (12) стремится равномерно к нулю в $B^n_\varepsilon$ при $r \to 1-$. Таким образом,

$$\frac{r^2 - 1}{(1 - rz_1)^2} \frac{\partial G}{\partial \phi_{rk_0}} \frac{1}{G} A_1 \to 0 \quad (13)$$

равномерно в $B^n_\varepsilon$ при $r \to 1-$. Как и в доказательстве п. 2) теоремы 1, получаем, что выражение $\frac{r^2-1}{(1-rz_1)^2} \frac{\partial G}{\partial \phi_{rk_0}} \frac{1}{G}$ отделено от нуля в $B^n_\varepsilon$ при $r \to 1-$. Поэтому из (13) следует, что $A_1 \to 0$ равномерно в $B^n_\varepsilon$ при $r \to 1-$. Заметим, что

$$A_1 - \frac{\partial f}{\partial \phi_{r1}} G \to A_{k_0} B_{k_0 1},$$

поэтому

$$\frac{\partial f(\phi_r)}{\partial \phi_{r1}} G(\phi_r) \to -A_{k_0} B_{k_0 k_1}$$

равномерно в $B_\varepsilon^n$ при $r \to 1-$. Повторяя соответствующую часть доказательства п. 1) теоремы 1, получаем, что существует $\alpha_1 < \alpha$, для которого

$$\lim_{\Omega_{\alpha_1} \ni w \to e_1} \frac{\partial f(w)}{\partial w_1} G(w) = -A_{k_0} B_{k_0 1}.$$

Если же $\lim\limits_{\Omega_\alpha \ni z \to e_1} \frac{\partial G(z)}{\partial z_{k_0}} \frac{1-z_1}{G(z)} = 0$, то, рассуждая, как и раньше (см. доказательство п. 1) теоремы 2), получаем, что существует $\alpha_1 < \alpha$, для которого

$$\lim_{\Omega_{\alpha_1} \ni z \to e_1} \frac{\partial f(z)}{\partial z_1} \frac{\partial G(z)}{\partial z_{k_0}} (1 - z_1) = 0. \quad \square$$

**Замечание 3.** В п. 1) теоремы 2 вместо отделенности от нуля (или стремления к нулю) функции $\frac{\partial G(z)}{\partial z_{k_0}} \frac{z_{k_1}}{G(z)}$ при $z \to e_1$ в $\Omega_\alpha$ можно требовать отделенность от нуля $\frac{\partial G(z)}{\partial z_{k_0}} \frac{z_p}{G(z)}$ для некоторого натурального $p$, $2 \le p \le n$. Это вытекает из доказательства данного пункта (см. (10)).

## Литература


1. Харди Г. *Расходящиеся ряды.* – М.: Ин. лит., 1951. – 504 с.
2. Шишкина А.В. *Об обращении правила Лопиталя для аналитических функций* // Сиб. матем. журн. – 2005. – Вып. 5. – С. 1190–1196.
3. Годуля Я., Старков В.В. *О граничном поведении в угле Штольца аналитических в круге функций* // Матем. заметки. – 2002. – Т. 71. – Вып. 5. – С. 652–661.
4. Godula J., Starkov V.V. *On the boundary behaviour of functions of several complex variables* // Annales UMCS. – 2002. – V. 3. – P. 31–45.
5. Шишкина А.В. *О граничном поведении функций, голоморфных в шаре* // Тр. Петрозаводск. ун-та. Сер. математика. – Петрозаводск, 2002. – Вып. 9. – С. 43–53.
6. Рудин У. *Теория функций в единичном шаре из $C^n$.* – М.: Мир. – 1984. – 455 с.



*Петрозаводский государственный университет*



*Поступила*
18.07.2005