ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 11 (498)

УДК 514.763:517.93

В.А. ИГОШИН, Е.К. КИТАЕВА, Н.В. КОТКОВА

ОБ АФФИННЫХ СИММЕТРИЯХ КВАЗИГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОТОКОВ

Методом геометрического (геодезического, пульверизационного) моделирования изучается аффинная подвижность квадратичных квазигеодезических потоков (КП). Э. Картан [1] ввел понятие пространства проективной связности и показал, что его геодезические линии локально совпадают с интегральными кривыми специального КП, полиномиального третьей степени по скорости. Там же ставится задача так обобщить теорию, чтобы интегральные кривые любого КП можно было рассматривать как геодезические. Эта задача решена там же для наиболее — по мнению Э.Картана — простого двумерного случая, т. е. для одномерного КП. Упомянутые результаты Э. Картана по геодезическому моделированию были распространены на случай субмерсий с многомерными слоями [2]. Полное решение проблемы геодезического моделирования Э. Картана дано в [3]–[6].

I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Пусть M — $(n-1)$-мерное многообразие, $f=(M,f)$ — КП на M (или обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка на M), имеющий в произвольной карте следующее координатное выражение:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}=f^i\Big(x^j,t,\frac{dx^j}{dt}\Big),$$

где $i,j=1,\dots,n-1$. Все объекты, встречающиеся в данной работе, предполагаются достаточное число раз дифференцируемыми.

§1. Точечные инфинитезимальные симметрии квазигеодезического потока

Как показано в [3]–[6], для произвольного КП (M,f) можно построить геодезическую (пульверизационную) модель так, что в его пространстве событий $\overline{M}=M\times R$ стандартная обобщенная связность $\overline{\Gamma}$ КП f обладает свойством: ее геодезические линии совпадают с интегральными кривыми КП f.

С. Ли ([7]–[9]) принадлежит определение инфинитезимальных точечных преобразований дифференциальных уравнений. Для обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка или, что одно и то же, для КП, оно может быть сформулировано следующим образом.

Определение 1. Векторное поле X в пространстве событий $\overline{M}=M\times R$ КП (M,f) называется инфинитезимальной точечной симметрией (или точечным преобразованием) КП (M,f), если определяемая полем X локальная однопараметрическая группа локальных диффеоморфизмов состоит из локальных точечных отображений соответствующих сужений потока (M,f), сохраняющих их интегральные кривые.

В связи с наличием в $\overline{M}$ моделирующей КП (M,f) связности $\overline{\Gamma}$ и выделенного распределения $dx^n=dt=0$, в [4]–[6] введено четыре вида точечных симметрий КП:

1) проективные квазисимметрии КП (ПКС);
2) аффинные квазисимметрии КП (АКС);
3) проективные симметрии КП (ПС);

4) аффинные симметрии КП (АС).

Всюду далее под симметриями будут пониматься точечные инфинитезимальные симметрии.

Определение 2. Квазисимметрия (или проективная квазисимметрия) X КП (M, f) — это векторное поле X на $\overline{M} = M \times R$, являющееся инфинитезимальным проективным преобразованием стандартной связности $\overline{\Gamma}$ КП (M, f). Если, кроме того, X сохраняет аффинный параметр на геодезических, то X называют аффинной квазисимметрией.

Точечные преобразования С. Ли являются эквивалентом ПКС (для КП).

Определение 3. Симметрией КП (M, f) называется любая квазисимметрия X КП (M, f), сохраняющая распределение $dt = 0$.

§2. Квадратичные квазигеодезические потоки

Поток $f \equiv (M, f)$ называется [10], [11] квадратичным, или потоком второй степени (по скорости — первым производным dx^i/dt), если правые части f^i его координатного уравнения являются полиномами второй степени по dx^i/dt:

$$f^i = -\Gamma^i_{jk}(x^s, t)\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} - 2B^i_j(x^s, t)\frac{dx^j}{dt} - A^i(x^s, t),$$

где Γ^i_{jk} — коэффициенты некоторой зависящей от t симметричной аффинной связности на M, а B^i_j, A^i — компоненты тензорных полей на M, также зависящих от t, тип которых обозначен индексами i, j, k, l, m, s, пробегающими значения от 1 до $n-1 = \dim M$.

Теорема 1. *Квазигеодезический поток (M, f) является квадратичным тогда и только тогда, когда его стандартная связность является аффинной.*

Доказательство. Пусть КП f квадратичный. Тогда в его пространстве событий $\overline{M} = M \times R$ определена стандартная аффинная связность $\overline{\Gamma} = \overline{\Gamma}(\overline{x}^\delta, \dot{\overline{x}}^\delta)$, $\delta = 1, \ldots, n = \dim \overline{M}$ потока f формулами [5]:

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}, \quad \overline{\Gamma}^i_{jn} = B^i_j, \quad \overline{\Gamma}^i_{nn} = A^i, \quad \overline{\Gamma}^n_{ij} = \overline{\Gamma}^n_{nj} = \overline{\Gamma}^n_{nn} = 0. \tag{1}$$

Наоборот, пусть стандартная связность $\overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$, $1 \le \alpha, \beta, \gamma \le n$, КП f является аффинной, т. е. $\overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} = \overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}(x^\delta)$. Согласно известным формулам ([5], с. 27, (5)) получаем

$$f^i = -\Gamma^i_{nn} + f^i_j\lambda^j - \frac{1}{2}f^i_{jk}\lambda^j\lambda^k = -\Gamma^i_{nn} + 2(-\Gamma^i_{nj} - \Gamma^i_{jk}\lambda^k)\lambda^j + \Gamma^i_{jk}\lambda^j\lambda^k =$$
$$= -\Gamma^i_{nn} - 2\Gamma^i_{nj}\lambda^j - \Gamma^i_{jk}\lambda^j\lambda^k, \quad \text{где} \quad \lambda = dx/dt. \quad \square$$

§3. Аффинная подвижность пространств аффинной связности

Пусть A_n — пространство аффинной связности размерности n, а $X = X^\alpha(x^\beta) \cdot \partial_\alpha$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$ — векторное поле, определяющее бесконечно малое (инфинитезимальное) преобразование в A_n. Необходимые и достаточные условия, которым удовлетворяют составляющие $X^\alpha(x^\beta)$ бесконечно малого аффинного движения X пространства A_n, имеют вид

$$\underset{X}{L}\,\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = X^\alpha_{,\beta\gamma} - R^\alpha_{\beta\gamma\sigma}X^\sigma = 0, \tag{2}$$

где $\underset{X}{L}$ — знак лиевого дифференцирования в направлении поля X, запятая обозначает ковариантное дифференцирование в связности $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ на A_n, а $R^\alpha_{\beta\gamma\sigma}$ — составляющие тензора кривизны пространства A_n.

Условия первой серии интегрируемости уравнений (2) имеют вид

$$1.\ \underset{X}{L}\,R^\alpha_{\beta\gamma\varepsilon} = 0, \tag{3}$$

или подробнее

$$X^\sigma R^\alpha_{\beta\gamma\varepsilon,\sigma} + X^\tau_{,\sigma}\left[\delta^\sigma_\beta R^\alpha_{\tau\gamma\varepsilon} + \delta^\sigma_\gamma R^\alpha_{\beta\tau\varepsilon} + \delta^\sigma_\varepsilon R^\alpha_{\beta\gamma\tau} - \delta^\alpha_\tau R^\sigma_{\beta\gamma\varepsilon}\right] = 0.$$

В силу коммутативности операций ковариантного и лиевого дифференцирований вдоль траекторий движения все другие серии условий интегрируемости получаются путем последовательного ковариантного дифференцирования составляющих тензора кривизны под знаком лиевого дифференцирования

$$\begin{aligned} 2.\ & \underset{X}{L} R^\alpha_{\beta\gamma\varepsilon,\mu_1} = 0,\\ 3.\ & \underset{X}{L} R^\alpha_{\beta\gamma\varepsilon,\mu_1\mu_2} = 0,\\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ N.\ & \underset{X}{L} R^\alpha_{\beta\gamma\varepsilon,\mu_1\mu_2\dots\mu_{N-1}} = 0,\\ N+1.\ & \underset{X}{L} R^\alpha_{\beta\gamma\varepsilon,}\mu_1\mu_2\dots\mu_{N-1}\mu_N = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Известно (см., напр., [12]), что всевозможные инфинитезимальные движения X пространства A_n образуют полную (т.е. максимальной размерности для данного A_n) алгебру Ли.

Справедлив классический результат (см. [12], с. 15; [13], с. 10) о размерности этой полной алгебры, который сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2. *Размерность полной алгебры Ли инфинитезимальных аффинных движений пространства аффинной связности A_n равна целому неотрицательному числу r, если существует такое натуральное число N, что первые N и первые $N+1$ серий условий интегрируемости* (4) *имеют общий ранговый минор порядка n^2+n-r.*

В частности, требуя полную интегрируемость условий (2), приходим к тому, чтобы соотношения первой серии условий интегрируемости имели ранг, равный нулю относительно функций X^α и $X^\alpha_{,\beta}$. Это дает соотношения вида

$$T^\sigma_\tau\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\gamma\varepsilon\end{pmatrix} = 0,$$

где положено

$$T^\sigma_\tau\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\gamma\varepsilon\end{pmatrix} = \delta^\sigma_\beta R^\alpha_{\tau\gamma\varepsilon} + \delta^\sigma_\gamma R^\alpha_{\beta\tau\varepsilon} + \delta^\sigma_\varepsilon R^\alpha_{\beta\gamma\tau} - \delta^\alpha_\tau R^\sigma_{\beta\gamma\varepsilon}. \tag{5}$$

Свертка (5) по индексам β и σ приводит к обычному аффинному пространству E_n. В этом случае размерность r алгебры Ли равна n^2+n.

Будем называть пространства заданной совокупности пространств аффинной связности максимально подвижными, если среди пространств этой совокупности они допускают алгебру Ли инфинитезимальных движений наибольшей размерности (из всех возможных).

Отметим, что формулировки и доказательства теорем И.П. Егорова в [12], необходимых нам для дальнейшего исследования, содержат неточности и опечатки. В связи с этим мы посчитали необходимым дать подробные доказательства таких результатов из [12] и устранить имеющиеся в них неточности.

Для примера дадим полное доказательство теоремы 1 ([12], гл. 1, §2, с. 19) или — в наших обозначениях — теоремы 3 (см. ниже).

Будем рассматривать матрицу

$$\begin{pmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ T^1_1\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\gamma\varepsilon\end{pmatrix}\dots T^1_n\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\gamma\varepsilon\end{pmatrix} T^2_1\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\gamma\varepsilon\end{pmatrix}\dots T^2_n\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\gamma\varepsilon\end{pmatrix}\dots T^n_1\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\gamma\varepsilon\end{pmatrix}\dots T^n_n\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\gamma\varepsilon\end{pmatrix}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{pmatrix}, \tag{6}$$

элементы которой $T^{\sigma}_{\tau}\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\gamma\varepsilon\end{smallmatrix}\right)$ определяются формулами (5). Матрица (6) является укороченной матрицей системы первой серии условий интегрируемости (3) относительно n^2 функций $X^{\alpha}_{,\beta}$.

Теорема 3. *Пусть $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ — тензор кривизны пространства аффинной связности A_n. Если $n \geq 4$, то для любой составляющей тензора кривизны вида $R^{\alpha_1}_{\alpha_2\alpha_2\alpha_3}$ (α_1, α_2, α_3 попарно различные) можно найти такой минор порядка $(3n-5)$ матрицы (6), величина которого с точностью до знака равна $(3n-5)$-й степени данной составляющей.*

Доказательство. Условимся далее считать, что индексы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ принимают различные значения от 1 до n. Определим номера строк и столбцов матрицы (6), из которых будет составлен искомый минор. Найдем их из условия теоремы, т. е. так, чтобы вдоль главной диагонали имели место равенства

$$T^{\sigma}_{\tau}\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\gamma\varepsilon\end{smallmatrix}\right) = \pm R^{\alpha_1}_{\alpha_2\alpha_3\alpha_4}. \tag{7}$$

Анализируя (7), приходим к выводу, что искомый минор может стоять в матрице (6) на пересечении столбцов с номерами

$$\begin{pmatrix}\alpha_i\\ \alpha_1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\alpha_3\\ \alpha_k\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_l\end{pmatrix}$$

и строк с номерами

$$\begin{pmatrix}\alpha_j\\ \alpha_2\alpha_2\alpha_3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\alpha_2\alpha_m\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_3\alpha_2\alpha_3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\alpha_3\alpha_m\end{pmatrix},$$

где $1 \leq i,j \leq n$; $4 \leq k,m \leq n$; $3 \leq l \leq n$.

Этот минор порядка $(3n-5)$ имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix}
T^{\alpha_1}_{\alpha_i}\begin{pmatrix}\alpha_j\\ \alpha_2\alpha_2\alpha_3\end{pmatrix} & T^{\alpha_k}_{\alpha_3}\begin{pmatrix}\alpha_j\\ \alpha_2\alpha_2\alpha_3\end{pmatrix} & T^{\alpha_l}_{\alpha_2}\begin{pmatrix}\alpha_j\\ \alpha_2\alpha_2\alpha_3\end{pmatrix}\\
T^{\alpha_1}_{\alpha_i}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\alpha_2\alpha_m\end{pmatrix} & T^{\alpha_k}_{\alpha_3}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\alpha_2\alpha_m\end{pmatrix} & T^{\alpha_l}_{\alpha_2}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\alpha_2\alpha_m\end{pmatrix}\\
T^{\alpha_1}_{\alpha_i}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_3\alpha_2\alpha_3\end{pmatrix} & T^{\alpha_k}_{\alpha_3}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_3\alpha_2\alpha_3\end{pmatrix} & T^{\alpha_l}_{\alpha_2}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_3\alpha_2\alpha_3\end{pmatrix}\\
T^{\alpha_1}_{\alpha_i}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\alpha_3\alpha_m\end{pmatrix} & T^{\alpha_k}_{\alpha_3}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\alpha_3\alpha_m\end{pmatrix} & T^{\alpha_l}_{\alpha_2}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\alpha_3\alpha_m\end{pmatrix}
\end{vmatrix}.$$

Вычисления показывают, что элементы главной диагонали этого минора действительно с точностью до знака равны $R^{\alpha_1}_{\alpha_2\alpha_2\alpha_3}$. В [12] ошибочно утверждается, что все элементы, расположенные выше главной диагонали, равны нулю. В действительности, данный минор имеет более сложное строение: выше главной диагонали во втором и третьем горизонтальных блоках $T^{\alpha_k}_{\alpha_3}\left(\begin{smallmatrix}\alpha_j\\ \alpha_2\alpha_2\alpha_3\end{smallmatrix}\right)$ и $T^{\alpha_l}_{\alpha_2}\left(\begin{smallmatrix}\alpha_j\\ \alpha_2\alpha_2\alpha_3\end{smallmatrix}\right)$ в третьей и соответственно во второй строках могут быть ненулевые элементы $T^{\alpha_k}_{\alpha_3}\left(\begin{smallmatrix}\alpha_3\\ \alpha_2\alpha_2\alpha_3\end{smallmatrix}\right) = -R^{\alpha_k}_{\alpha_2\alpha_2\alpha_3}$ и $T^{\alpha_l}_{\alpha_2}\left(\begin{smallmatrix}\alpha_2\\ \alpha_2\alpha_2\alpha_3\end{smallmatrix}\right) = -R^{\alpha_l}_{\alpha_2\alpha_2\alpha_3}$. Тем не менее элементарными преобразованиями минор приводится к такому виду, что на главной диагонали стоят числа $\pm R^{\alpha_1}_{\alpha_2\alpha_2\alpha_3}$, а выше нее все элементы нулевые.

Таким образом, пробел в доказательстве этой теоремы, приведенном в [12], устранен. □

Отметим, что наша формулировка теоремы 3 отличается от формулировки в [12], где не указано ограничение на размерность пространства ($n \geq 4$).

II. СИММЕТРИИ КВАДРАТИЧНЫХ КВАЗИГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОТОКОВ

Под симметриями будут подразумеваться инфинитезимальные аффинные квазисимметрии — АКС (см. [4]–[6] и выше §1). Наряду с термином *симметрия* будет употребляться в качестве синонима термин *движение* КП.

Пусть, как и прежде, M — $(n-1)$-мерное многообразие, а (M,f) — квадратичный КП на M. В §§ 1–5 всюду предполагается, что $n \geq 4$, кроме теорем 11, 12, где $n \geq 2$.

Будем говорить, что КП (M, f) является максимально подвижным по отношению к потокам, образующим некоторый подкласс в классе всевозможных потоков, если он допускает алгебру Ли движений наибольшей возможной размерности среди КП данного подкласса. При этом также говорят, что полная алгебра Ли аффинных движений такого потока имеет максимальную размерность. Речь будет идти главным образом о транзитивных (см., напр., [13]) алгебрах Ли аффинных движений.

§1. Движения квазигеодезических потоков, не являющихся проективно-евклидовыми

Определение 4. Будем называть КП f

1) проективно-евклидовым, если тензор его проективной кривизны $W^{\alpha}_{\beta\gamma\sigma} \equiv 0$ [5];

2) эквиаффинным, если сокращенный тензор кривизны КП (M, f) является симметричным: $R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$, где $R_{\alpha\beta} = R^{\sigma}_{\beta\sigma\alpha}$;

3) эквипроективным, если f удовлетворяет первым двум условиям одновременно.

Теорема 4. *Если КП (M, f) не является проективно-евклидовым, то максимальная размерность его алгебры Ли аффинных движений равна $r = n^2 - 2n + 5$. Эту алгебру допускает, например, поток*

$$\ddot{x}^1 = -2x^2\dot{x}^2\dot{x}^3, \quad \ddot{x}^i = 0, \quad 2 \le i \le n-1,$$

а инфинитезимальные операторы этой алгебры имеют вид

$$\partial_1, \partial_2, \partial_3, \ldots, \partial_n,\ x^2\partial_1,\ x^3\partial_1,\ \partial_2 - x^2x^3\partial_1,\ x^2\partial_2 + 2x^1\partial_1,$$
$$x^2\partial_3 - (x^2)^3\partial_1/3,\ x^3\partial_3 + x^1\partial_1, x^i\partial_i,\ x^2\partial_j,\ x^3\partial_j,\ x^i\partial_j \quad (i, j = 4, 5, \ldots, n),$$

где $\partial_i = \partial/\partial x^i$, а $\dot{x} = dx/dt$, $\ddot{x} = d^2x/dt^2$.

Доказательство. Пусть КП (M, f) не является проективно-евклидовым, т. е. его стандартная связность $\overline{\Gamma}$ в пространстве событий является таковой. Тогда в соответствии с теоремой 3 максимальная размерность алгебры Ли аффинных движений пространства событий $\overline{M}$ потока f равна $r = n^2 - 2n + 5$ (см. также теорему 5 из [12], с. 24). Примером такого пространства служит [12] пространство с объектом связности

$$\overline{\Gamma}^1_{23} = x^2, \quad \overline{\Gamma}^i_{jk} = 0 \quad (i = 2, \ldots, n; \quad j = 1, 3, \ldots, n; \quad k = 1, 2, 4, \ldots, n).$$

Эта связность является стандартной связностью следующего КП (см. выше формулы (1)):

$$\ddot{x}^1 = -2x^2\dot{x}^2\dot{x}^3, \quad \ddot{x}^i = 0, \quad 2 \le i \le n-1.$$

Следовательно, он допускает алгебру Ли размерности $n^2 - 2n + 5$. Инфинитезимальные операторы этой алгебры получаются решением для него уравнений Ли $\underset{X}{L}\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$. $\square$

Теорема 5. *Если КП (M, f) не является проективно-евклидовым и составляющие $R^{\alpha}_{\beta\beta\gamma}$ (α, β, γ попарно различны) его тензора кривизны равны нулю, то максимальная размерность его алгебры Ли аффинных движений равна $r = n^2 - 3n + 8$. Эту алгебру допускает, например, поток*

$$\ddot{x}^1 = -2(x^4\dot{x}^2\dot{x}^3 + 2x^2\dot{x}^3\dot{x}^4), \quad \ddot{x}^i = 0, \quad 2 \le i \le n-1,$$

а инфинитезимальные операторы этой алгебры имеют вид

$$\partial_1,\ x^2\partial_1,\ x^3\partial_1,\ x^4\partial_1,\ \partial_2 - 2x^3x^4\partial_1,\ x^2\partial_2 + x^1\partial_1,$$
$$x^3\partial_3 - (x^3)^2\partial_1,\ \partial_3,\ x^3\partial_3 + x^1\partial_1,\ x^2\partial_3 - x^4(x^2)^2\partial_1,$$
$$\partial_4 - x^2x^3\partial_1,\ x^4\partial_4 + x^1\partial_1,\ \partial_s, x^k\partial_s\ (k = 1, 2, \ldots, n;\ s = 5, 6, \ldots, n).$$

Доказательство. Пусть КП (M, f) не является проективно-евклидовым (т. е. таковой является его стандартная связность $\overline{\Gamma}$), и все составляющие вида $R^{\alpha}_{\beta\beta\gamma}$ (α, β, γ попарно различны) его тензора кривизны, т. е. тензора кривизны моделирующей связности $\overline{\Gamma}$ потока (M, f), равны нулю. В соответствии с теоремой 4 ([12], гл. 1, §2, с. 22) максимальная размерность r алгебры Ли аффинных движений пространства $\overline{M}$ равна $n^2 - 3n + 8$. Примером такого пространства служит пространство со связностью $\overline{\Gamma}^1_{23} = x^4$, $\overline{\Gamma}^1_{34} = 2x^2$, остальные $\overline{\Gamma}^i_{jk} = 0$. Эта связность является стандартной связностью потока

$$\ddot{x}^1 = -2(x^4\dot{x}^2\dot{x}^3 + 2x^2\dot{x}^3\dot{x}^4), \quad x^i = 0, \quad 2 \leq i \leq n-1.$$

Вид инфинитезимальных операторов потока определяется решением для него уравнений Ли $\underset{X}{L}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$. $\square$

§2. Движения эквиаффинных квазигеодезических потоков

Теорема 6. *Если КП (M, f) эквиаффинный, то максимальная размерность алгебры Ли аффинных движений КП (M, f) равна $r = n^2 + n - kn + k(k-1)/2$, где $k = \operatorname{rang} R_{\alpha\beta}$.*

Доказательство. Пусть КП (M, f) эквиаффинный, т. е. таковым является пространство $\overline{M} = M \times R$ потока. Согласно теореме 7 ([12], гл. 1, §3, с. 26) максимальная размерность алгебры Ли движений данного пространства $\overline{M}$ равна $r = n^2 + n - kn + k(k-1)/2$, где $k = \operatorname{rang} R_{\alpha\beta}$. В силу определения АКС указанную максимальную размерность имеет алгебра Ли аффинных движений самого КП (M, f). $\square$

Теорема 7. *Если КП (M, f) не является эквиаффинным, то максимальная размерность r алгебры Ли аффинных симметрий КП (M, f) не превосходит числа $n^2 - n + 3$.*

Доказательство. Пусть КП (M, f) не является эквиаффинным, т. е. таковым является пространство событий $\overline{M} = M \times R$ потока (M, f). Согласно теореме 8 ([12], гл. 1, §3, с. 26) максимальная размерность алгебры Ли аффинных симметрий пространства $\overline{M}$ не превосходит $n^2 - n + 3$. В силу определения АКС максимальная размерность аффинных симметрий КП (M, f) также не превосходит числа $n^2 - n + 3$. $\square$

§3. Тензорные характеристики эквиаффинных, проективно-евклидовых и эквипроективных квазигеодезических потоков

Известна

Теорема 8 ([14]). *Необходимые и достаточные условия проективной евклидовости КП второй степени имеют вид*

$$\begin{cases} R^i_{jkl} = 0, \\ \partial_n \Gamma^i_{jl} - B^i_{l,j} + \frac{\delta^i_l}{n+1}(B^s_{s,j} - \partial_n \Gamma^s_{sj}) + \\ \qquad + \frac{\delta^i_j}{n^2-1}[(n+1)B^s_{l,s} - B^s_{s,l} - n\partial_n \Gamma^s_{sl}] = 0, \\ \partial_n B^i_j + B^i_s B^s_j - A^i_{,j} + \frac{\delta^i_j}{n-1}(A^s_{,s} - B^s_m B^m_s - \partial_n B^s_s) = 0, \\ (B^i_{j,k} + \frac{\delta^i_j}{n^2-1}\{(n+1)B^s_{k,s} - nB^s_{s,k} - \partial_n \Gamma^s_{sk}\})_{[j,k]} = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Лемма 1. *Для того чтобы квадратичный КП f был эквиаффинным, необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\partial_i \Gamma^s_{js} = \partial_j \Gamma^s_{is}, \quad \partial_n \Gamma^s_{is} = B^s_{s,i}. \tag{9}$$

Доказательство. Необходимость следует из подстановки $R_{\alpha\beta}$, выраженных через коэффициенты связности Γ на M [5], в условие эквиаффинности. Достаточность получается непосредственной проверкой условий эквиаффинности с учетом (9). $\square$

Лемма 2. *Для того чтобы квадратичный КП f был эквипроективным, необходимо и достаточно выполнение условий*

$$R^i_{jkl} = 0, \quad \partial_n \Gamma^i_{sj} = B^s_{s,j},$$
$$\partial_n B^i_j + B^i_m B^m_j - A^i_{,j} + \frac{\delta^i_j}{n-1}(A^s_{,s} - \partial_n B^s_s - B^s_m B^m_s) = 0. \tag{10}$$

Доказательство заключается в проверке эквивалентности условий (8) и (10) с учетом (9). □

Лемма 3. *Квадратичный КП f с координатным выражением*

$$f^i = -\varepsilon \delta^i_j x^j / t^2 \tag{11}$$

является эквипроективным.

Доказательство сводится к проверке условий (10) для данного потока (11). □

§4. Движения квазигеодезических потоков ненулевой кривизны

Лемма 4. *Квадратичный КП f с координатным выражением* (11) *допускает алгебру Ли симметрий размерности n^2 с базисными инфинитезимальными операторами*

$$x^i\partial_i, \quad t^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\partial_i, \quad t^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\partial_i, \quad t\partial_n, \quad \textit{где} \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \partial_n = \partial/\partial t.$$

Доказательство получается путем решения уравнений Ли $\underset{X}{L}\overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} = X^\sigma \partial_\sigma \overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} + \partial_{\beta\gamma} X^\alpha + \partial_\beta X^\sigma \overline{\Gamma}^\alpha_{\sigma\gamma} + \partial_\gamma X^\sigma \overline{\Gamma}^\sigma_{\beta\gamma} - \delta_\sigma X^\alpha \overline{\Gamma}^\sigma_{\beta\gamma} = 0$, в которых коэффициенты связности $\overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$ определены соотношениями (1). □

Теорема 9. *Размерность алгебры Ли симметрий максимально подвижного квадратичного потока (M, f) ненулевой кривизны равна n^2, где* $\dim M = n - 1$.

Доказательство. Пусть КП (M, f) — максимально подвижный КП ненулевой кривизны, т. е. таковым является пространство сообытий $\overline{M}$ данного потока. Согласно теореме 9 ([12], гл. 1, §4, с.27) размерность алгебры Ли аффинных симметрий этого пространства $\overline{M}$ не превосходит n^2. Из леммы 4 следует, что размерность алгебры Ли аффинных симметрий максимально подвижного КП ненулевой кривизны равна n^2. □

Лемма 5. *Максимально подвижный квадратичный КП f ненулевой кривизны является эквипроективным.*

Доказательство. Пусть (M, f) — максимально подвижный КП ненулевой кривизны. В силу теоремы 9 размерность полной алгебры Ли его аффинных движений равна n^2. Это влечет эквиаффинность (см. теорему 7) и проективно-евклидовость (см. теорему 4) данного потока, а следовательно, и его эквипроективность. □

Лемма 6. *Тензор Риччи максимально подвижного квадратичного КП f ненулевой кривизны может быть представлен в виде*

$$R_{\alpha\beta} = \varepsilon(n-1)\lambda_\alpha \lambda_\beta, \tag{12}$$

где $\lambda_\alpha = \frac{\partial \lambda}{\partial x^\alpha}$ — коградиент некоторой функции λ на $\overline{M}$, $\lambda_i = 0$, $\lambda_n \neq 0$. При этом $\lambda_{\alpha,\beta} = c\lambda_\alpha\lambda_\beta$, где c — постоянная, а запятая обозначает ковариантное дифференцирование в связности $\overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$ на $\overline{M}$.

Доказательство. Пусть (M, f) — максимально подвижный квадратичный КП ненулевой кривизны, т. е. таковым является его пространство событий $\overline{M}$. В силу теоремы 7 ([12], гл. 1, §3, с. 26) тензор Риччи $R_{\alpha\beta}$ этого пространства может быть представлен в виде (12). Так как тензор Риччи пространства событий является тензором Риччи самого потока (M, f), то теорема доказана. $\square$

Из лемм 2, 5, 6 следует

Теорема 10. *Для того чтобы квадратичный КП (M, f) ненулевой кривизны был максимально подвижным, т.е. допускал алгебру Ли движений размерности n^2, необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\begin{gathered} R^i_{jkl} = 0, \quad \partial_n \Gamma^i_{jl} = B^i_{l,j}, \\ \partial_n B^i_j + B^i_s B^s_j - A^i_{,j} + \varepsilon \delta^i_j \lambda^2_n = 0, \end{gathered} \tag{I}$$

$$R_{\alpha\beta} = \varepsilon(n-1)\lambda_\alpha \lambda_\beta, \tag{II}$$

$$\lambda_{\alpha,\beta} = c\lambda_\alpha \lambda_\beta, \tag{III}$$

где λ_α — коградиент некоторой функции λ на $\overline{M}$, $\lambda_i = 0$, $\lambda_n \neq 0$, c — постоянная; запятая в (I) *обозначает ковариантную производную в связности Γ^i_{jk} на M, а в* (II), (III) *— в связности $\overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$ на $\overline{M}$.*

§5. Об аффинной подвижности квазигеодезических потоков нулевой кривизны

Все полученные выше результаты относятся к движениям пространств аффинной связности ненулевой кривизны. В данном параграфе приведены формулировки и доказательства некоторых анонсированных в [15] результатов, относящихся к пространствам нулевой кривизны.

Теорема 11. *Максимальная размерность r алгебры Ли аффинных симметрий $(n-1)$-мерного КП (M, f) равна $n^2 + n$.*

Доказательство. Для любого $(n-1)$-мерного КП (M, f) его алгебра Ли аффинных симметрий — это алгебра Ли аффинных симметрий его пространства событий $\overline{M}$. Известно, что максимальная размерность алгебры Ли аффинных симметрий аффинной связности равна n^2+n. Следовательно, максимальная размерность r алгебры Ли аффинных движений КП f не превосходит $n^2 + n$, а равенство $r = n^2 + n$ достигается для КП, аффинно-изоморфных тривиальному КП, т. е. КП с координатным выражением $d^2x^i/dt^2 = 0$.

Теорема 12. *Для того чтобы КП (M, f) допускал полную алгебру Ли аффинных симметрий максимальной размерности n^2+n, необходимо и достаточно, чтобы КП f был аффинно-изоморфен тривиальному КП.*

Доказательство. Пусть КП (M, f) допускает полную алгебру Ли аффинных симметрий максимальной размерности $n^2 + n$. Следовательно, такую алгебру Ли имеет пространство событий $\overline{M}$ потока f. Тогда связность пространства $\overline{M}$ локально аффинно-изоморфна евклидовой связности, а КП (M, f) аффинно-изоморфен тривиальному КП.

Докажем обратное. Пусть КП (M, f) аффинно-изоморфен тривиальному КП. Тогда связность $\overline{\Gamma}$ пространства событий $\overline{M}$ потока f аффинно-изоморфна евклидовой связности. Известно, что полная алгебра Ли аффинных симметрий плоской евклидовой связности имеет максимальную размерность $n^2 + n$, и, следовательно, сам поток (M, f) допускает полную алгебру Ли аффинных симметрий максимальной размерности $r = n^2 + n$. $\square$

Теорема 13. *Если КП (M, f) допускает алгебру Ли аффинных симметрий размерности $r > n^2$, то f аффинно-изоморфен тривиальному КП* $(\dim M = n - 1)$.

Доказательство. Пусть $(n-1)$-мерный КП (M,f) допускает алгебру Ли аффинных симметрий размерности $r > n^2$, тогда согласно теореме 9 поток (M,f) имеет нулевую кривизну и, следовательно, будет локально аффинно-изоморфен тривиальному КП. $\square$

Теорема 14. *Если $(n-1)$-мерный КП (M,f) допускает алгебру Ли аффиных симметрий размерности $r > n^2$, то f является полиномиальным КП второй степени. Если КП (M,f) не является полиномиальным потоком второй степени, то максимальная размерность r алгебры Ли его аффинных симметрий не превосходит n^2.*

Доказательство. Пусть $(n-1)$-мерный КП (M,f) допускает алгебру Ли аффинных симметрий размерности $r > n^2$. Согласно теореме 13 f аффинно-изоморфен тривиальному КП. Следовательно, в силу критерия тривиальности КП [5] поток f — полиномиальный КП второй степени.

Если КП (M,f) не является полиномиальным потоком второй степени, то в силу того же критерия тривиальности f не является аффинно-изоморфным тривиальному потоку и, следовательно, имеет ненулевую кривизну. Из теоремы 9 следует, что максимальная размерность его алгебры Ли аффиных движений не превосходит n^2. $\square$

§6. О римановых одномерных квазигеодезических потоках

Пусть, как и прежде, $f \equiv (M,f)$ — КП, но в отличие от предыдущих параграфов 1–5 (где предполагалось, что $n = \dim M + 1 \geq 4$) будем считать, что $n = 2$, т. е. $\dim M = 1$.

Если $d^2x/dt^2 = f(x,t,dx/dt)$ — координатное выражение КП f, то в пространстве $\overline{M} = M \times R$ событий КП (M,f) определена (стандартная) связность $\overline{\Gamma}$ КП f формулами ([5], с. 27)

$$\begin{cases} \overline{\Gamma}^1_{11} = -\frac{1}{2}f_{11}, \quad \overline{\Gamma}^1_{12} = \overline{\Gamma}^1_{21} = -\frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_{11}\lambda, \\ \overline{\Gamma}^1_{22} = -f + f_1\lambda^1 - \frac{1}{2}f_{11}(\lambda)^2, \quad \overline{\Gamma}^2_{11} = \overline{\Gamma}^2_{21} \equiv 0, \end{cases}$$

в которых $\lambda = dx/dt$, $f_1 = \partial f/\partial\lambda$, $f_{11} = \partial^2 f/\partial\lambda^2$.

Заметим, что связность $\overline{\Gamma}$ КП f является в общем случае обобщенной аффинной связностью, коэффициенты которой $\overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$ — однородные функции нулевой степени по векторному аргументу (dx, dt): $\overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} = \overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}(x^\varepsilon, \lambda^\varepsilon)$, где $x^1 = x$, $x^2 = t$, $\lambda^1 = dx$, $\lambda^2 = dt$, $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon = 1, 2$.

Определение 5. Назовем КП (M,f) римановым, если его связность $\overline{\Gamma}$ является римановой связностью, или, что одно и то же, связностью Леви–Чивита некоторой римановой метрики $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^\gamma)$.

Как известно ([16], с. 445), риманова связность $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x^\varepsilon)$ является симметричной и однозначно определяется римановым метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$ из системы уравнений

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} = g_{\alpha\sigma}\Gamma^\sigma_{\gamma\beta} + g_{\beta\sigma}\Gamma^\sigma_{\alpha\gamma}. \tag{13}$$

Предполагая связность Γ заданной, выясним, когда она будет римановой. Иначе говоря, выясним, когда система уравнений в частных производных (13) будет иметь в качестве решения набор функций $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^\varepsilon)$, удовлетворяющих условиям симметричности $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ и невырожденности $\det(g_{\alpha\beta}) \neq 0$, т. е. тем условиям, которые по определению должны выполняться для риманова тензора $g_{\alpha\beta}$.

Начнем с общего случая: $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ — произвольная симметричная аффинная связность на $\overline{M}$. В частности, она может совпасть (что не обязательно) со связностью КП (M,f). Необходимо отметить, что всякая риманова связность по определению является (собственно) аффинной.

Как известно (см. [12], §1; [13], §1), первая серия условий интегрируемости системы уравнений (13) получается из равенства вторых смешанных производных от искомых функций. Непосредственные вычисления показывают, что эта серия условий, называемая также условиями полной интегрируемости системы (13), имеет вид

$$g_{\alpha\sigma}R^{\sigma}_{\gamma\varepsilon\beta} + g_{\beta\sigma}R^{\sigma}_{\gamma\varepsilon\alpha} = 0. \tag{14}$$

Относительно неизвестных функций $g_{11} = g_{11}(x,t)$, $g_{12} = g_{21} = g_{12}(x,t)$, $g_{22} = g_{22}(x,t)$ равенства (14) представляют собой алгебраическую систему линейных однородных уравнений с расширенной матрицей

$$\left(\begin{array}{ccc|c} R^1_{121} & R^2_{121} & 0 & 0 \\ R^1_{122} & R^1_{121} + R^2_{122} & R^2_{121} & 0 \\ 0 & R^1_{122} & R^2_{122} & 0 \end{array}\right). \tag{15}$$

Для существования нетривиального решения ранг матрицы системы (15) должен быть меньше 3.

Предложение 1. *Возможны два случая*:
1) *ранг* r *матрицы системы уравнений* (15) *равен нулю*;
2) *ранг* r *матрицы системы уравнений* (15) *равен* 2.

Доказательство. Предположим, что ранг $r \le 1$. Тогда все миноры 2-го порядка этой матрицы равны нулю. Обозначая $R^{\alpha}_{\delta} = R^{\alpha}_{12\delta}$, получим

$$\begin{cases} R^1_2 \cdot R^1_2 = 0, \quad R^2_1 \cdot R^2_1 = 0, \quad R^1_1 \cdot R^2_2 = 0, \\ R^1_1(R^1_1 + R^2_2) - R^1_2 R^2_1 = 0, \quad R^2_2(R^1_1 + R^2_2) - R^1_2 R^2_1 = 0, \end{cases}$$

и, следовательно, $R^1_2 = R^2_1 = R^1_1 = R^2_2 = 0$.

Таким образом, равенство $r = 1$ невозможно. Предложение 1 доказано, если заметить, что случаи 1) и 2) действительно могут иметь место при $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = 0$ и соответственно при выполнении условий

$$\Delta = \begin{vmatrix} R^1_1 & 0 & R^1_2 \\ 0 & R^1_1 + R^2_2 & 0 \\ R^2_1 & 0 & R^2_2 \end{vmatrix} = 0, \tag{16}$$

$$R^{\alpha}_{\alpha\beta,\gamma} \ne 0.$$

Первое равенство из (16) можно записать в виде $(R^1_1 + R^2_2)(R^1_1 R^2_2 - R^1_2 R^2_1) = 0$.

Предложение 2. *Величины* $R = R_{12} = R^1_1 + R^2_2 = \operatorname{trace}(R^{\alpha}_{\delta})$ *и* $d = \det(R^{\alpha}_{\delta})$ *являются относительными скалярными инвариантами связности* $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ *веса* 1 *и* 2 *соответственно.*

Доказательство. Закон преобразования $R_{\alpha\beta}$ имеет вид $R_{\alpha'\beta'} = R^{\delta'}_{\alpha'\beta'\delta'} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} R^{\delta}_{\alpha\beta\delta}$. Поэтому $R_{1'2'} = \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}}\frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} R_{12} - \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}}\frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} R_{12}$, т. е. $R_{1'2'} = R_{12}\left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|$. Таким образом, $R = R_{12}$ — относительный инвариант веса 1.

Рассмотрим теперь величину $d' = R^{1'}_{1'}R^{2'}_{2'} - R^{1'}_{2'}R^{2'}_{1'}$. Используя закон преобразования компонентов тензора кривизны, получим $d' = \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|^2 d$. $\square$

Следствие. Определитель $\Delta = R \cdot d$ является относительным скалярным инвариантом веса 3.

В случае полной интегрируемости уравнений (13) условия (15) должны выполняться при любых $g_{\alpha\beta}$. Это имеет место тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы (15) равен нулю, что равносильно обращению в нуль тензора кривизны $R^{\sigma}_{\alpha\beta,\gamma}$.

Итак, справедлива

Теорема 15. *Система уравнений* (13) *вполне интегрируема тогда и только тогда, когда связность* $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ *имеет нулевую кривизну* $R^{\sigma}_{\alpha\beta\gamma} \equiv 0$.

Следствие. Для того чтобы связность Γ была риманова, достаточно, чтобы ее тензор кривизны был тождественно равен нулю.

Так как тензор кривизны равен нулю, то, как доказано, например, в ([16], с. 519), связность локально аффинно-евклидова и, следовательно, риманова. Таким образом, Γ — риманова связность.

В заключение рассмотрим частный случай, когда заданная связность $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ является связностью КП (M,f), т. е. $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}=\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}$.

В этом случае условия полной интегрируемости (15) принимают вид

$$\left(\begin{array}{ccc|c} R^1_{121} & 0 & 0 & 0\\ R^1_{122} & R^1_{121} & 0 & 0\\ 0 & R^1_{122} & 0 & 0\end{array}\right). \tag{17}$$

Заметим, что относительный инвариант d равен нулю для связности КП f.

Условия (17) показывают, что система уравнений (13) относительно искомых компонентов $g_{\alpha\beta}$ метрического тензора либо вполне интегрируема, либо вообще не интегрируема в классе симметричных и невырожденных тензоров $g_{\alpha\beta}$.

В итоге получаем следующий результат.

Теорема 16. *Пусть (M,f) — одномерный КП. Попарно эквивалентны следующие утверждения:*

1) *КП (M,f) является римановым;*
2) *тензор кривизны КП (M,f) равен нулю;*
3) *КП (M,f) локально аффинно-изоморфен тривиальному;*
4) *КП (M,f) допускает 6-мерную алгебру Ли аффинных движений, подобную алгебре с образующими $\partial/\partial x$, $\partial/\partial t$, $x(\partial/\partial x)$, $x(\partial/\partial t)$, $t(\partial/\partial x)$, $t(\partial/\partial t)$;*
5) *КП (M,f) является квадратичным, т. е. потоком вида $d^2x/dt^2=-C(x,t)(dx/dt)^2-2B(x,t)(dx/dt)-A(x,t)$, при этом должны выполняться условия*

$$\begin{cases}\partial B/\partial x-\partial C/\partial t=0,\\ \partial A/\partial x-\partial B/\partial t+(AC-B^2)=0.\end{cases}$$

Доказательство. Эквивалентность утверждений 1) и 2) следует из (17). Эквивалентность 2) и 3) следует из соответствующего результата в ([16], с. 519). Эквивалентность 3) и 4) непосредственно проверяется путем решения уравнений С. Ли $\underset{X}{L}\,\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}=0$, или, подробнее,

$$\partial_{\beta\gamma}X^{\alpha}+X^{\sigma}\partial_{\sigma}\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}+X^{\sigma}\partial_{\beta}\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\sigma\gamma}+X^{\sigma}\partial_{\gamma}\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\sigma}-X^{\alpha}\partial_{\sigma}\overline{\Gamma}^{\sigma}_{\beta\gamma}=0. \tag{18}$$

Действительно, если КП (M,f) тривиален, т. е. имеет координатное выражение $d^2x/dt^2=0$, то $\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}=0$ и (18) сводится к уравнениям $\partial_{\beta\gamma}X^{\alpha}=0$, в которых $X=(X^1,X^2)=X^1(\partial/\partial x)+X^2(\partial/\partial t)$ — неизвестные инфинитезимальные движения. Интегрируя, получим

$$X^1=ax+bt+c,$$
$$X^2=a_1x+b_1t+c_1,$$

где a, b, c, a_1, b_1, c_1 — постоянные. В качестве образующих можно взять векторные поля $X_1=(1,0)$; $X_2=(0,1)$; $X_3=(x,0)$; $X_4=(0,t)$; $X_5=(0,x)$; $X_6=(t,0)$. Наоборот, если задана 6-мерная алгебра Ли аффинных движений КП (M,f), подобная алгебре с образующими X_1–X_6, то (18) приводят к тривиальному КП (M,f): $d^2x/dt^2=0$.

Для завершения доказательства остается заметить, что эквивалентность 3) и 5) доказана в [5].

Литература

1. Cartan E. *Sur les varietes a connexion projective* // Bull. Soc. Math. France. – 1924. – V. 52. – P. 205–241.
2. Шапиро Я.Л. *Пространства, включающие проективные системы кривых* // Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу. – М.: Изд-во МГУ, 1948. – Вып. 6. – С. 494–505.
3. Игошин В.А. *Пульверизационное моделирование квазигеодезических потоков* // ДАН СССР. – 1991. – Т. 320. – № 3. – С. 531–535.
4. Игошин В.А. *Пульверизационное моделирование.* I // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 6. – С. 63–71.
5. Игошин В.А. *Пульверизационное моделирование.* II // Изв. вузов. Матемактика. – 1994. – № 10. – С. 26–32.
6. Игошин В.А. *Пульверизационное моделирование.* III // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 5. – С. 39–50.
7. Lie S., Engel F. *Theorie der Transformationsgruppen.* – New York, Leipzig: Teubner, 1893. – Bd. 3. – 830 S.
8. Lie S. *Gessamelte Abhandlungen.* Br. 5. – Leipzig–Kristiania, 1924.
9. Olver P.J. *Applications of Lie groups to differential equations.* – New York e.a.: Springer, 1986. – 497 p.
10. Шапиро Я.Л. *О квазигеодезическом отображении* // Изв. вузов. Математика. – 1980. – № 9. – С. 53–55.
11. Игошин В.А. *Гомоморфизмы квазигеодезических потоков 2-й степени* // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 9. – С. 14–21.
12. Егоров И.П. *Движения в пространствах аффинной связности* / В кн.: Движения в пространствах аффинной связности. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1965. – С. 5–179.
13. Эйзенхарт Л.П. *Непрерывные группы преобразований.* – М.: ГИИЛ, 1947. – 359 с.
14. Игошин В.А. *Квазигеодезические потоки и их морфизмы*: Дис. … докт. физ.-матем. наук. – Казань, 1996. – 360 с.
15. Игошин В.А. *О симметриях квазигеодезических потоков* // Дифференц. геометрия многообразий фигур. – Калининград, 1997. – С. 28–30.
16. Рашевский П.К. *Риманова геометрия и тензорный анализ.* – М.: Гостехиздат, 1967. – 664 с.

Нижегородский государственный университет

Поступила
18.12.2002