Известия вузов. Математика
2014, № 1, с. 31–40

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

В.Г. ИЛЬИЧЕВ, А.А. ЗЕЛЕНИН

ДВУХПАРТИЙНЫЕ ГРАФЫ И МОНОТОННОСТЬ ОТОБРАЖЕНИЯ ПУАНКАРЕ

Аннотация. Локальный дифференциал системы нелинейных дифференциальных уравнений с T-периодической правой частью может быть представлен в виде ориентированного, знакового графа взаимодействий. В рамках класса сбалансированных графов, в которых знаки всех путей между двумя фиксированными вершинами одинаковы, можно оценить знаковую структуру дифференциала глобального отображения Пуанкаре (сдвиг-отображения за время T). В этом случае все вершины сильно связного графа естественным образом разбиваются на два множества (две партии). Обнаружено, что влияние переменных в рамках одной партии является положительным, а для переменных из разных партий оказывается отрицательным. При упрощении структуры локального двухпартийного графа (за счет процесса выбрасывания ребер) также сохраняется возможность точного описания знаковой структуры дифференциала отображения Пуанкаре. Эти результаты используются в математической теории конкуренции.

Ключевые слова: граф, знаки путей, сбалансированность, двухпартийность, сильная связность, монотонность, сдвиг-отображение Пуанкаре.

УДК: 517.711 : 577.4

Введение

Решение проблем математической конкуренции в переменной среде связано с исследованием многомерных, нелинейных и неавтономных моделей. Один из эффективных подходов — принцип наследования предложен в работе [1] и опирается на идею точного перехода некоторых локальных свойств в глобальные.

В случае двух конкурентов это позволяет установить монотонные свойства глобального отображения Пуанкаре. При взаимодействии трех и более конкурентов монотонность данного отображения возникает только после трюка с обращением времени ([2], с. 91). Свойство монотонности (с точки зрения некоторого полупорядка) делает возможным применение геометрических методов нелинейного анализа ([3], с. 255).

Отметим, что данный принцип наследования ориентирован на грубые ситуации, когда влияние всех переменных друг на друга отлично от нуля. В негрубом случае локальное взаимодействие некоторых переменных может равняться нулю. Это серьезно затрудняет обоснование принципа наследования. Так, в работе [4] путем довольно сложного предельного перехода от последовательности грубых случаев к негрубому установлена наследуемость некоторых свойств.

Поступила 03.09.2012

Однако можно действовать проще, используя наглядные геометрические соображения из теории графов и правильного угадывания ключевых решений на малом начальном промежутке времени. Этот подход эффективен как в грубой, так и в негрубой ситуациях. Его изложение и составляет суть данной статьи.

Итак, пусть задана гладкая (т. е. бесконечно дифференцируемая) система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = f_1(X,t), \ldots, \dot{x}_n = f_n(X,t), \tag{1}$$

где $X = (x_1, \ldots, x_n)$. Считаем, что решения (1) гладко зависят от начальных условий $X^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ при $t = 0$, и далее продолжаются вперед неограниченно.

Построим локальный *дифференциал* системы (1), который задается матрицей (DF), составленной из элементов вида $d_{ij} = \frac{\partial f_i(X,t)}{\partial x_j}$. Разумеется, матрица DF зависит от переменных X и t. Ниже считаем, что каждый недиагональный элемент d_{ij} сохраняет свой знак $(+, -, 0)$ в расширенном фазовом пространстве (X,t).

Пусть задано некоторое $\tau > 0$. Тогда можно построить сдвиг-отображение (σ) за время τ по траекториям (1) $x_i^\tau = \sigma_i(x_1^0, \ldots, x_n^0, \tau)$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Для T-периодических систем (1) удобно выбрать $\tau = T$. Соответствующий сдвиг называется *отображением Пуанкаре* $P = (P_1, \ldots, P_n)$. Имеем $P_i(x_i^0, \ldots, x_n^0) = \sigma_i(x_i^0, \ldots, x_n^0, T)$ для каждого $i = 1, \ldots, n$. Далее, для краткости опускаем верхний индекс у фазового вектора.

Здесь возникает задача о знаковой структуре глобального дифференциала $DP(X) = \left(\frac{\partial P_i(X)}{\partial x_i}\right)$. Такая структура $DP(X)$ содержит важную информацию о том, по каким переменным каждая функция P_i возрастает, а по каким убывает.

1. Предварительные сведения из теории графов

Представим структуру матрицы $DF = (d_{ij})$ в виде ориентированного знакового графа, состоящего из n вершин. Вершине с номером k соответствует переменная x_k. Здесь величина d_{ij} интерпретируется как сила влияния j-й вершины на i-ю вершину. Если $d_{ij} \neq 0$, то в данном графе проводим ребро из j-й вершины в i-ю. Данное ребро обозначаем через $i \leftarrow j$, а его знак полагаем равным $\operatorname{sign}(d_{ij})$.

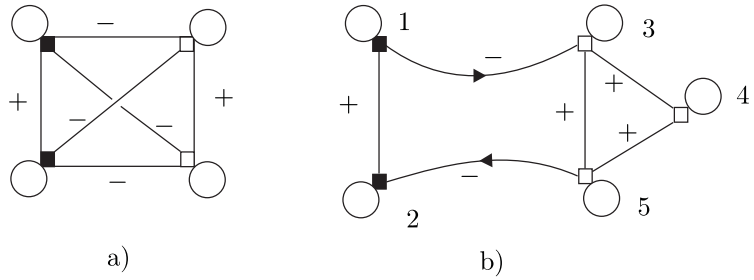


Рис. 1. Сильно связные знаковые графы: a) полный, b) неполный и ориентированный. В каждом графе представлены две партии: белая и черная

Если $d_{ij} = d_{ji}$, то в этом случае на ребре, соединяющем вершины i и j, можно и не указывать направление (см. рис. 1a)). При $d_{ii} \neq 0$ считаем, что вершина с номером i имеет петлю.

Назовем *путем* цепочку ориентированных ребер, в котором конец одного ребра упирается в начало другого. Цикл — это путь, у которого начальная вершина совпадает с конечной вершиной. Обозначим через $A \Rightarrow B$ некоторый путь из вершины A в вершину B. Ребро

с началом и концом в вершине A называется петлей A. Знак всякого пути определим как произведение знаков его ребер.

Граф, у которого все вершины попарно соединены ребрами, определяется как *полный*. Во многих случаях условие полноты графа можно заменить на более слабое требование *сильной связности*. Оно означает, что для любых двух вершин существуют соединяющие их (как в одну, так и в другую стороны) пути.

Ниже ключевую роль играет понятие о *сбалансированных* знаковых графах. В работах ([5]; [6], с. 58) дано определение: *граф называется сбалансированным, если знак любого цикла положителен.* В этом случае, если имеются два пути (S_1 и S_2) из вершины A в вершину B, то знаки этих путей должны быть одинаковыми. Действительно, в силу условия сильной связности графа, найдется обратный путь (Z) из B в A. Согласно условию сбалансированности знак каждого цикла $S_1 + Z$ и $S_2 + Z$ положителен, поэтому знаки путей S_1 и S_2 совпадают. Итак, выполняется основное свойство: *при фиксированных вершинах A и B знаки всех путей $A \Rightarrow B$ одинаковы.* Отсюда вытекает, что в сбалансированном графе знак петли всегда положителен.

Далее, в сбалансированном графе все вершины можно разбить на два класса (две партии) следующим образом (см. рис. 1). Выделим какую-либо вершину, например, 1, и отнесем ее к первой партии (Π_1). Далее, к Π_1 отнесем также вершины A, когда знак пути $1 \Rightarrow A$ положителен. Остальные вершины (B) отнесем ко второй партии. Здесь знак пути $1 \Rightarrow B$ отрицателен. В силу основного свойства данный способ отнесения вершин к той или иной партии не зависит от выбора пути.

Внутри каждой партии отношения между вершинами, если они соединены ребром, являются дружественными (т. е. ребра положительны). Напротив, между вершинами из разных партий отношения враждебные (т. е. ребра отрицательны).

Легко установить справедливость и обратного свойства: *сильно связанный и двухпартийный граф является сбалансированным.* Считаем, что у рассматриваемых ниже графов каждая вершина имеет положительную петлю (петлю со знаком плюс). Это соглашение никак не нарушает условий полноты, сбалансированности и двухпартийности графов. Дополнительные соображения в пользу этого соглашения приведены в следующем разделе.

2. Принцип наследования и сбалансированные графы

Напомним суть принципа наследования. На примере сохранения знаковой структуры локального дифференциала он формулируется совсем просто. Так, представим исходную систему (1) в векторной форме $\dot{X} = F(X, t)$, тогда ее эйлерова аппроксимация имеет вид $X^{t+h} = L(X^t, t, h) = X^t + hF(X^t, t)$ при достаточно малом $h > 0$. Соответствующий локальный дифференциал задается в матричной форме $DL(X, t, h) = E + hDF(X, t)$.

При малом h каждая вершина графа $DL(X, t, h)$ обладает положительной петлей. Граф матрицы $DL(X, t, h)$ получается из графа $DF(X, t)$ добавлением некоторого количества петель.

Отметим, что если граф $DF(X, t)$ является двухпартийным, то и граф $DL(X, t, h)$ оказывается двухпартийным.

Далее предположим, что при всех (X, t) знаковая структура (Σ) локального дифференциала одна и та же и не содержит нулей. Тогда из ([2], с. 91; [3], с. 255) следует: *пусть матрицы $\{DL\}$ типа Σ образуют полугруппу по умножению, тогда и DP имеет ту же знаковую структуру Σ.* Представляет интерес вопрос о структуре полного графа знаковых матриц, которые образуют полугруппу по умножению.

Теорема 1. *Всем матрицам из определенной мультипликативной полугруппы соответствует один и тот же двухпартийный граф.*

Доказательство. Для обоснования достаточно ограничиться возведением в квадрат специальных матриц. Обозначим матрицу $B = (b_{ij}) = A^2$ и рассмотрим какой-либо ее диагональный элемент, например, $b_{11} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}a_{k1}$. Всякое слагаемое $a_{1k}a_{k1}$ можно трактовать как вес цикла $1 \to k \to 1$. Поэтому написанное выше равенство геометрически означает, что вес b_{11} равен сумме весов всех таких циклов, проходящих через 1-вершину.

Для заданной знак-инвариантной структуры Σ выберем следующие содержательные варианты матриц A.

1. Пусть элемент a_{11} велик, а остальные элементы малы. Тогда $b_{11} \approx a_{11}^2$. Поэтому $b_{11} > 0$. Обобщая это рассуждение, получаем, что диагональ Σ состоит только из положительных элементов.

2. Пусть a_{12} и a_{21} велики, а остальные элементы малы. Тогда $b_{11} \approx a_{12}a_{21}$. Из $b_{11} > 0$ следует, что a_{12} и a_{21} имеют одинаковые знаки. Отсюда получаем, что знаковая структура Σ симметрична.

Рассмотрим теперь недиагональное представление $b_{12} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}a_{k2}$.

3. Предположим, что $b_{12} > 0$. Отсюда при больших a_{12} и a_{22} имеем $b_{12} \approx a_{12}a_{22}$. С учетом $a_{22} > 0$ устанавливаем, что a_{12} и b_{12} одного знака. Поэтому вершины 1 и 2 дружат.

Далее, при больших значениях a_{1k} и a_{k2} имеют одинаковый знак. В силу симметрии a_{k1} и a_{k2} тоже одного знака. Иными словами, если две вершины дружат, то у них общие друзья и общие враги.

4. Если $b_{12} < 0$ (вершины 1 и 2 — враги), то при больших значениях a_{1k} и a_{k2} имеют противоположные знаки. Поэтому вершины-враги имеют разных друзей и разных врагов. По сути, это повторение предыдущей закономерности.

Обозначим через M_1 набор вершин, которые дружат с вершиной 1, а через M_2 — набор врагов вершины 1. Поскольку граф полный, то каждая из его вершин попадает в одну из партий. Значит, M_1 и M_2 образуют двухпартийную структуру. □

В работе ([2], с. 91) такие структуры предложено называть знак-инвариантными. При $n = 2$ существуют только две такие структуры: $\left(\begin{smallmatrix} + & + \\ + & + \end{smallmatrix}\right)$ и $\left(\begin{smallmatrix} + & - \\ - & + \end{smallmatrix}\right)$. Разумеется, первая матрица соответствует двухпартийному графу, в котором одна из партий пуста. В этом случае она характеризует кооперативное взаимодействие субъектов. А вторая матрица играет важную роль в анализе процессов динамики двух конкурентов.

В общем случае при задании знак-инвариантной структуры $\Sigma = (\sigma_y)$ в качестве знаков удобно использовать символы $+1$ и -1. Пусть задан некоторый вектор $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, в котором $\gamma_i = \pm 1$ для всех i. Тогда имеем ([3], с. 255)

$$\sigma_{ij} = \gamma_i\gamma_j. \tag{2}$$

Рассмотрим обратную ситуацию. Предположим, что имеется семейство матриц, у каждой из которых граф является двухпартийным (Π_1 и Π_2). Тогда справедлива

Теорема 2. *Пусть набор партий Π_1 и Π_2 фиксирован, тогда данное семейство двухпартийных матриц образует мультипликативную полугруппу.*

Доказательство. Выберем какие-либо две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ из данного семейства. Согласно формуле (2) существует такой вектор знаков $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, что для всех i, j выполняются знаковые соотношения $\operatorname{sign}(a_{ij}) = \gamma_i\gamma_j$ и $\operatorname{sign}(b_{ij}) = \gamma_i\gamma_j$. Теперь положим

$C = (c_{ij}) = AB$. Рассмотрим выражение $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, в котором все слагаемые, оказываются, имеют одинаковый знак. Действительно, имеем $\operatorname{sign}(a_{ik}b_{kj}) = \gamma_i\gamma_k^2\gamma_j = \gamma_i\gamma_j$. Поэтому тот же знак имеет и c_{ij}. □

Естественным образом можно определить произведение ($\otimes$) знаковых матриц A и B, в котором знаки + и − заменены на числа 1 и −1. А именно, для элементов матрицы $C = A \otimes B$ в стандартной формуле $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$ операцию сложения следует заменить на операцию $z \oplus z = z \oplus 0 = 0 \oplus z = z$, где $z = -1, 0, 1$.

Разумеется, не каждые две знаковые матрицы можно перемножить подобным образом. Но для близких по структуре знаков матриц эта операция возможна. Так, всякую знак-инвариантную структуру Σ можно возводить в квадрат (знак-степень равна двум) $\Sigma \otimes \Sigma = \Sigma$.

3. Сильно связанные и сбалансированные графы

Рассмотрим основные типы знаковых графов DF.

1. В матрице DF нет нулей, например, $M_1 = \left(\begin{smallmatrix} + & - \\ - & + \end{smallmatrix}\right)$. Этот случай обсуждается в работах ([2], с. 91; [3], с. 255) в которых было показано следующее: *пусть все графы матриц DF являются полными и двухпартийными, тогда и граф матрицы DP оказывается полным и двухпартийным.* Отметим, что разбиение вершин на партии Π_1 и Π_2 согласно DF сохраняется и для DP. Если партия Π_1 содержит первые m элементов, тогда выполняются соотношения

$$\frac{\partial P_1(X)}{\partial x_i} > 0 \quad \text{для } i \leqslant m \text{ (т. е. влияние 1 на друзей позитивно)}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial P_1(X)}{\partial x_i} < 0 \quad \text{для } i > m \text{ (т. е. влияние 1 на врагов негативно)}. \tag{4}$$

2. В матрице DF могут быть нули (дыры), например,

$$\begin{pmatrix} + & + & 0 & 0 & 0 \\ + & + & 0 & 0 & - \\ - & 0 & + & + & + \\ 0 & 0 & + & + & + \\ 0 & 0 & + & + & + \end{pmatrix}.$$

Соответствующий граф данной дырявой матрицы представлен на рис. 1b). Если в предыдущем утверждении в посылке заменить термин полный граф на термин сильно связный, то его заключение по-прежнему сохраняет свою силу.

Теорема 3. *Пусть граф всех матриц DF является сильно связным и сбалансированным, тогда граф DP является полным и двухпартийным.*

Доказательство. Для заданного начального вектора X^0 покажем, что дифференциал $P(X^0)$ является матрицей без нулей, при этом выполняются соотношения (3) и (4). Для этого обсудим поведение решений системы (1) в зависимости, например, от x_1^0.

Продифференцируем все уравнения (1) по x_1^0. Обозначим $y_k = \frac{\partial x_k(t)}{\partial x_1^0}$ для каждого k и положим $a_{ij} = \frac{\partial f_i(X,t)}{\partial x_j}$ при всех i, j. Поскольку вектор X однозначно зависит от t, то

в коэффициенте a_{ij} можно оставить только переменную t. Теперь получаем следующую линейную систему неавтономных линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}\dot{y}_1 = y_1 a_{11}(t) + \cdots + y_n a_{1n}(t),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dot{y}_n = y_n a_{n1}(t) + \ldots + y_n a_{nn}(t)\end{gathered} \tag{5}$$

с естественным начальным условием $y_1^0 = 1$ и $y_2^0 = \cdots = y_n^0 = 0$.

Можно считать, что при $t = 0$ каждый из коэффициентов (5) или равен нулю или имеет порядок, равный единице. Разумеется, это положение справедливо и для всех t из малого отрезка $[0, h]$.

Далее, полезно избавиться от диагональных элементов без нарушения знаков остальных коэффициентов и значений начальных условий. Сделаем замену $y_1(t) \to y_1(t)K_1(t)$, где $K_1(t) = \exp\Big[\int\limits_0^t a_{11}(s)\,ds\Big]$. Тогда в правой части верхнего уравнения (5) исчезает первое слагаемое, а остальные слагаемые разделим на положительный параметр $K_1(t)$. Действуя подобным образом и с остальными переменными, избавляемся от всех диагональных элементов системы (5).

Заметим, что структура переменной матрицы $A = (a_{ij})$ состоит из двух диагональных блоков (состоящих из положительных или нулевых элементов) размера $m \times m$ и $(n-m) \times (n-m)$, а остальные элементы внедиагональных блоков данной матрицы отрицательны или равны нулю. Эти диагональные блоки характеризуют, в целом, положительное внутрипартийное взаимодействие, а два других блока задают отрицательные межпартийные взаимоотношения.

Ниже ключевую роль играет следующий конус (K):

$$y_1 \geqslant 0, \ldots, y_m \geqslant 0 \quad \text{и} \quad y_{m+1} \leqslant 0, \ldots, y_n \leqslant 0.$$

Разумеется, *начальная точка* $Y^0 = (1, 0, \ldots, 0)$ системы (5) лежит на границе K.

Каждой вершине графа (с номером k) можно присвоить свой ранг $r = \operatorname{rang}(k)$, который характеризует наименьшее количество ребер от вершины 1 до вершины k. Таким образом, все вершины графа можно "проранжировать" по степени удаленности от вершины 1.

Формально считаем, что вершина 1 имеет ранг 0. При $n > 1$ всегда существует хотя бы одна вершина, имеющая ранг 1. Для переменных "линейной" системы (5) на небольшом интервале времени можно правильно угадать вид локального решения.

Лемма 1. *При малых $h > 0$ выполняются соотношения*

$$y_1(h) = 1 + O(h), \quad y_k(h) = A_k h^r + O(h^{r+1}) \quad \textit{при} \quad k > 1 \quad \textit{и} \quad r = \operatorname{rang}(k). \tag{6}$$

Здесь $A_k > 0$, если k-я вершина принадлежит первой партии; $A_k < 0$, когда k-я вершина находится во второй партии.

Доказательство. Пусть сначала $k > 1$ и k-я вершина имеет ранг r. Перечислим основные варианты соединения ее с соседними вершинами:

а) p — вершина ранга $(r-1)$ из партии Π_1 и $p \to k$,

б) q — вершина ранга $(r-1)$ из партии Π_2 и $q \to k$,

в) u — вершина ранга $\geqslant r$ при условии $u \to k$. Такие вершины оказывают гораздо меньшее влияние на k-ю, чем предыдущие и ниже не учитываются.

Далее для примера рассмотрим случай, когда k-я вершина располагается в партии Π_1 (случай Π_2 разбирается аналогично). Поскольку вершины k и p являются однопартийцами,

то имеем $a_{kp}(t) > 0$. Напротив, вершины k и q принадлежат разным партиям, поэтому $a_{kq}(t) < 0$ для всех $t \geqslant 0$.

Используя лемму Адамара ([7], с. 116), положим $a_{kp}(h) = a_{kp}(0) + hb_{kp}(h)$ и $a_{kq}(h) = a_{kq}(0) + hb_{kq}(h)$, где $b_{kp}(h)$ и $b_{kq}(h)$ — гладкие функции, имеющие порядок 1.

Согласно формулам (6) имеем $y_p(h) = A_p h^{r-1} + O(h^r)$ и $y_q(h) = A_q h^{r-1} + O(h^r)$. Из этих формул с учетом $y_k(0) = 0$ окончательно получаем

$$y_k(h) = \int_0^h \left[y_p a_{kp}(t) + y_q a_{kq}(t)\right] dt + O(h^{r+1}) = A_k h^r + O(h^{r+1}),$$

где $A_k = [A_p a_{kp}(0) + A_q a_{kq}(0)]/r$ — требуемый положительный коэффициент.

Пусть теперь $k = 1$. Выделим набор вершин, из которых выходит ребро в первую вершину. Здесь наибольшее влияние на динамику y_1 оказывают вершины с наименьшим рангом. Если, например, номером такой вершины является 2, то $y_2(h) = A_2 h^r + O(h^{r+1})$ и r — ее ранг. Очевидно, $r \geqslant 1$. Аналогично предыдущему случаю устанавливаем

$$y_1(h) = y_1(0) + \int_0^h y_2 a_{12}(t)\, dt = 1 + h^{r+1}[A_2 a_{12}(0)]/(r+1) + O(h^{r+2}).$$

Отсюда вытекает справедливость верхней формулы (6). □

Здесь полезно отметить следующие два обстоятельства.

1. При исследовании влияния, скажем, x_n^0 на другие переменные системы (1) следует действовать аналогичным образом. Сначала положим $y_k(t) = \frac{\partial x_k(t)}{\partial x_n^0}$ для всех k и затем в рамках универсальной системы (5) проанализируем ее поведение при начальном условии $y_1^0 = \cdots = y_{n-1}^0$ и $y_n^0 = 1$. Теперь решение при малых h будет иметь вид

$$y_2(h) = 1 + O(h), \quad y_k(h) = B_k h^r + O(h^{r+1}) \ \text{ при } \ k \neq 2,$$

где r — длина наименьшего пути от вершины 2 до вершины k. Здесь $B_k > 0$, если вершины 2 и k являются однопартийцами; $B_k < 0$, когда вершины 2 и k находятся в разных партиях.

2. Локальное решение типа (6) может быть построено и в ряде систем с несильно связным графом. При этом полагаем $r = \infty$, если не существует пути от вершины 1 до вершины с номером k.

Через K^+ обозначим внутренность конуса K. А траекторию с началом в граничной точке $Y^0 = (1, 0, \ldots, 0)$ назовем *начальной*.

Лемма 2. *Начальная траектория через мгновение оказывается в* K^+.

Лемма 3. *Траектория с началом в* K^+ *остается там навечно.*

Доказательство. Пусть Y^* — произвольная начальная точка системы (5), принадлежащая K^+. Тогда из нее выходит некоторая траектория $Y(t) = \langle y_1(t), \ldots, y_m(t), y_{m+1}(t), \ldots, y_n(t)\rangle$. При фиксированном векторе Y^* построим следующую непрерывную функцию: $L(t) = \min\{y_1(t), \ldots, y_m(t), -y_{m+1}(t), \ldots, -y_n(t)\}$. Она является нижней огибающей нескольких гладких функций. Поэтому данная функция L является кусочно-дифференцируемой по переменной t. Очевидно, выполняется неравенство $L(0) > 0$.

Неприятная ситуация с недифференцируемостью (излом) L может возникать при реализации L сразу на нескольких аргументах в операции min. Здесь естественным образом можно определить производную снизу функции $L(t)$. В частности, при $L = y_1 = -y_n$ положим $\dot{L} = \min\{\dot{y}_1, -\dot{y}_n\}$.

Покажем, что при $Y^* > 0$ в каждый момент времени выполняются соотношения

$$\dot{y}_i > 0 \quad \text{при } i \leqslant m \quad \text{и} \quad \dot{y}_i < 0 \quad \text{при } i > m.$$

Так, например, в представлении $\dot{y}_1 = y_1 a_{11}(t) + \cdots + y_n a_{1n}(t)$ все слагаемые справа являются неотрицательными, поскольку для всех t имеют место неравенства $y_i > 0$ и $a_{1i}(t) \geqslant 0$ при $i \in \Pi_1$, а для $i \in \Pi_2$ имеем $y_i < 0$ и $a_{1i} \leqslant 0$. Кроме того, из условия связности вытекает, что хотя бы один из коэффициентов $\{a_{1i}(t)\}$ отличен от нуля. Значит, $\dot{y}_1 > 0$. Поэтому для каждой траектории $Y(t)$, выходящей из положительной точки $Y^* > 0$, справедливы оценки $L(t) > 0$ и $\dot{L}(t) > 0$ для всех $t > 0$. Значит, данная траектория все более и более углубляется во внутрь K^+. □

Теперь теорема 3 может быть сразу обоснована. Действительно, согласно лемме 2 решения (5) мгновенно оказываются в конусе K^+ и ввиду леммы 3 остаются в нем навечно. Поэтому выполняются следующие строгие оценки:

$$y_1 > 0, \ldots, y_m > 0 \quad \text{и} \quad y_{m+1} < 0, \ldots, y_n < 0.$$

Это означает справедливость и требуемых соотношений (3) и (4). Теорема 3 доказана. □

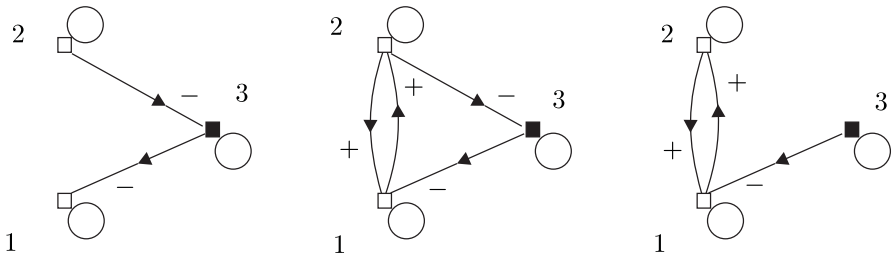
4. Заключение. Осколки двухпартийных структур

В общем случае уместно говорить не о наследуемости, а о возможности предсказать знаковую структуру DP при известной знаковой структуре всех DF.

Приведем один из способов получения структуры таких графов.

Пусть, например, этот граф состоит из двух партий $\{1, 2\}$ и $\{3\}$ (см. рис. 2a)), тогда соответствующие локальный (DL) и глобальный (DG) дифференциалы имеют вид

$$DL = \begin{pmatrix} + & + & - \\ + & + & - \\ 0 & - & + \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad DP = \begin{pmatrix} + & + & - \\ + & + & - \\ - & - & + \end{pmatrix}.$$



c) a) b)

Рис. 2. Исходный двухпартийный граф a) и его осколки: b) после удаления ребра $2 \to 3$, c) после удаления двух ребер $1 \to 2$ и $2 \to 1$

Теперь начнем выкидывать ребра из графа. Возникают различные конструкции обедненных графов-осколков (см. рис. 2b) и 2c)). Сравним сопутствующие им дифференциалы DL и DP.

Вариант 1. После удаления ребра $2 \to 3$ получаем граф, изображенный на рис. 2b). Дифференциалы 2b) имеют вид

$$DL = \begin{pmatrix} + & 0 & - \\ 0 & + & 0 \\ 0 & - & + \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad DP = \begin{pmatrix} + & + & - \\ 0 & + & 0 \\ 0 & - & + \end{pmatrix}.$$

Вариант 2. После удаления двух ребер $1 \to 2$ и $2 \to 1$ находим граф 2c). Дифференциалы 2c) выглядят следующим образом:

$$DL = \begin{pmatrix} + & + & 0 \\ + & + & - \\ 0 & 0 & + \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad DP = \begin{pmatrix} + & + & - \\ + & + & - \\ 0 & 0 & + \end{pmatrix}.$$

Отметим, что во всех случаях матрица DP представляет собой некоторую конечную знак-степень матрицы DL. Далее информация о знаковой структуре DP позволяет правильно угадать вид локального решения в системе (5). Дальнейшее обоснование глобальных свойств производится согласно схеме доказательства теоремы 3.

Вероятно, подобная возможность предсказания знаковой структуры DP имеет место и для графов DF, в которых выполняется ключевое свойство: при любых фиксированных вершинах A и B все пути, которые их соединяют, имеют одинаковый знак.

Литература

[1] Ильичев В.Г. *Наследуемые свойства неавтономных динамических систем и их приложение в моделях конкуренции*, Изв. вузов. Матем., № 6, 26–36 (2002).

[2] Ильичев В.Г. *Устойчивость, адаптация и управление в экологических системах* (Физматлит, М., 2009).

[3] Красносельский М.А., Забрейко П.П. *Геометрические методы нелинейного анализа* (Наука, М., 1975).

[4] Ильичев В.Г. *Принципы наследования в динамических системах и его приложение в моделях экологии*, Дифференц. уравнения, № 9, 1247–1257 (2011).

[5] Harary F. *On the notion of balance of signed graph*, Michigan Math. J. **2** (2), 143–146 (1953/1954).

[6] Робертс Ф.С. *Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам* (Наука, М., 1986).

[7] Арнольд В.И. *Обыкновенные дифференциальные уравнения* (Наука, М., 1984).

В.Г. Ильичев

главный научный сотрудник, отдел морских и экосистемных исследований,
Южный научный центр Российской Академии наук,
пр. Чехова, д. 41, г. Ростов-на-Дону, 344006, Россия,

e-mail: vitaly369@yandex.ru

А.А. Зеленин

доцент, кафедра авиационных электросистем и пилотажно-навигационных комплексов,
Московский государственный технический университет
гражданской авиации (Ростовский филиал),
пр. Шолохова, д. 268, г. Ростов-на-Дону, 344009, Россия

V.G. Il'ichev and A.A. Zelenin

Two-party graphs and monotonicity properties of the Poincaré mapping

Abstract. The local differential of a system of nonlinear differential equations with a T-periodic right-hand side is representable as a directed sign interaction graph. Within the class of balanced graphs, where all paths between two fixed vertices have the same signs, it is possible to estimate the sign structure of the differential of the global Poincaré mapping (a shift in time T). In this case all vertices of a strongly connected graph naturally break into two sets (two parties). As appeared, the influence of variables within one party is positive, while that of variables from different parties is negative. Even having simplified the structure of a local two-party graph (by eliminating its edges), one can still exactly describe the sign structure of the differential of the Poincare mapping. The obtained results are applicable in the mathematical competition theory.

Keywords: graph, signs of paths, equation, two-party property, strong connectivity, monotonicity, Poincaré mapping.

V.G. Il'ichev

Head Research Worker, Department of Sea and Ecosystem Research,
Southeren Scientific Center of Russian Academy of Sciences,
41 Chekhov Ave., Rostov-on-Don, 344006 Russia

`e-mail:` vitaly369@yandex.ru

A.A. Zelenin

Associate Professor, Chair of Aviation Electrosystems and Aviation Instruments,
Moscow Technical State University of Civil Aviation (*Rostov Branch*),
268 Sholokhov Ave., Rostov-on-Don, 344009 Russia