ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 8 (447)

УДК 517.925.5

М.Т. ТЕРЁХИН, Т.Л. ПАНФИЛОВА

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ РЁССЛЕРА

Система Рёсслера

$$\dot{x}_1 = -x_2 - x_3, \quad \dot{x}_2 = x_1 + ax_2, \quad \dot{x}_3 = c + x_3(x_1 - b), \tag{1}$$

где a, b, c — положительные числа, изучалась в [1], [2]. В частности, в [2] определено множество, в котором содержатся циклы системы (1) при условии, что они существуют.

В данной статье ставится задача — определить условие существования периодических решений системы (1). Далее всюду полагаем, что числа a, b, c удовлетворяют неравенству $b^2 - 4ac \geq 0$. Тогда состояниями равновесия системы (1) будут точки (x_1^+, x_2^+, x_3^+), (x_1^-, x_2^-, x_3^-), где $x_1^\pm = \frac{1}{2}(b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})$, $x_3^\pm = \frac{1}{2a}(b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})$, $x_2^\pm = -x_3^\pm$. Определим условия существования периодических решений системы (1) в окрестности точки (x_1^+, x_2^+, x_3^+). Проблема нахождения условий существования периодических решений в окрестности точки (x_1^-, x_2^-, x_3^-) исследуется аналогично.

Заменой переменных $x_i = y_i + x_i^+$, $i = 1, 2, 3$, система (1) сводится к системе

$$\dot{y}_1 = -y_2 - y_3, \quad \dot{y}_2 = y_1 + ay_2, \quad \dot{y}_3 = x_3^+ y_1 + (x_1^+ - b)y_3 + y_1 y_3. \tag{2}$$

Положим $a = a_1 + \varepsilon_1$, $x_1^+ - b = \alpha_2 + \varepsilon_2$, $x_3^+ = \alpha_3 + \varepsilon_3$, где ε_1, ε_2, ε_3 — параметры. Тогда система (2) примет вид

$$\dot{y} = Ay + B(\varepsilon)y + F(y)y, \tag{3}$$

в которой $A = [\mathrm{col}(0, 1, \alpha_3),\ \mathrm{col}(-1, \alpha_1, 0),\ \mathrm{col}(-1, 0, \alpha_2)]$, $B(\varepsilon) = [\mathrm{col}(0, 0, \varepsilon_3),\ \mathrm{col}(0, \varepsilon_1, 0),\ \mathrm{col}(0, 0, \varepsilon_2)]$, $F(y) = [\mathrm{col}(0, 0, 0),\ \mathrm{col}(0, 0, 0),\ \mathrm{col}(0, 0, y_1)]$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

Пусть $|y| = \max\limits_i |y_i|$, $W(\delta_0) = \{\beta : \beta \in E_3,\ |\beta| \leq \delta_0\}$, $\Lambda(\delta_0) = \{\varepsilon : \varepsilon \in E_3,\ |\varepsilon| \leq \delta_0\}$, $\delta_0 > 0$ — некоторое число, E_3 — трехмерное векторное пространство, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. Символом $y(\cdot, \beta, \varepsilon)$ обозначим решение системы (3), удовлетворяющее условию $y(0, \beta, \varepsilon) = \beta$. Так как $y \equiv 0$ — решение системы (3), то для любого числа $T_0 > 0$ существует такое число $\delta_0 > 0$, что для любых векторов $\beta \in W(\delta_0)$, $\varepsilon \in \Lambda(\delta_0)$ решение $y(\cdot, \beta, \varepsilon)$ определено на сегменте $[0, T_0]$.

Легко убедиться, что если все собственные значения матрицы A имеют отличные от нуля действительные части, то существует число $\delta > 0$, удовлетворяющее условию: при любом $\varepsilon \in \Lambda(\delta_0)$ и любом $\beta \in W(\delta_0)$, $\beta \neq 0$, решение $y(\cdot, \beta, \varepsilon)$ системы (3) не является периодическим. Поэтому далее предполагаем, что хотя бы одно из собственных значений матрицы A имеет нулевую действительную часть.

Так как система (3) является автономной, то интерес представляет тот случай, когда матрица A имеет чисто мнимые собственные значения.

Линейным неособенным преобразованием систему (3) сведем к системе

$$\dot{y} = A_m y + B_m(\varepsilon)y + F_m(y)y, \tag{4}$$

в которой матрица A_m имеет жорданову форму. Пусть $Y_m(t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{y} = A_m y$, $Y_m(0) = E$, E — единичная матрица. Решение $y(\cdot, \beta, \varepsilon)$ системы (4) можно представить в виде

$$y(\cdot,\beta,\varepsilon) = (Y_m(\cdot) + \Phi_m(\cdot,\beta,\varepsilon))\beta,$$

где $\Phi_m(\cdot,\beta,\varepsilon)$ — решение матричного уравнения

$$\dot{\Phi} = [A_m + B_m(\varepsilon) + F_m(y(t,\beta,\varepsilon))]\Phi + [B_m(\varepsilon) + F_m(y(t,\beta,\varepsilon))]Y_m(t),$$

удовлетворяющее условиям $\Phi(0,\beta,\varepsilon), \Phi_m(t,\beta,\varepsilon) \to 0$, равномерно относительно $t \in [0,T_0]$, если $\lambda = \max\{|\beta|, |\varepsilon|\} \to 0$. Решение $y(\cdot,\beta,\varepsilon)$ системы (4) тогда и только тогда является T_m-периодическим, $0 < T_m < T_0$, когда векторы β и ε удовлетворяют равенству

$$(Y_m(T_m) - E)\beta + Y_m(T_m)\int_0^{T_m} Y_m^{-1}(B_m(\varepsilon) + F_m(y))y\,dt = 0, \tag{5}$$

в котором $y = (Y_m(t) + \Phi_m(t,\beta,\varepsilon))\beta$.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} Q_m(\varepsilon) &= \int_0^{T_m} Y_m^{-1}(t)B_m(\varepsilon)Y_m(t)L_m dt, \\ R_m(\varepsilon,\gamma) &= \int_0^{T_m} Y_m^{-1}(t)B_m(\varepsilon)\Phi(t,L_m,\gamma,\varepsilon)L_m dt, \end{aligned} \tag{6}$$

где L_m — некоторая известная матрица.

1. Пусть матрица A имеет одно ненулевое и два чисто мнимых собственных значений. Тогда неособенным линейным преобразованием систему (3) можно свести к системе (4) (положив в ней $m = 1$), в которой матрица $A_1 = [\mathrm{col}(0,-\omega,0),\ \mathrm{col}(\omega,0,0),\ \mathrm{col}(0,0,a)]$, $a \neq 0$, $\omega > 0$. Фундаментальная матрица $Y_1(t)$ системы $\dot{y} = A_1 y$ определяется равенством $Y_1(t) = [\mathrm{col}(\cos\omega t, -\sin\omega t, 0),\ \mathrm{col}(\sin\omega t, \cos\omega t, 0),\ \mathrm{col}(0,0,\exp at)]$.

Выберем число T_0, удовлетворяющим неравенству $T_1 = \frac{2\pi}{\omega} < T_0$. Так как элементы матрицы $B(\varepsilon)$ линейно зависят от координат вектора ε, то, положив в равенствах (6) $m = 1$, $L_1 = [\mathrm{col}(1,0,0),\ \mathrm{col}(0,1,0]$, получим $Q_1(\varepsilon) = [\mathrm{col}(a_{11}^1\varepsilon_1 + b_{11}^1\varepsilon_2 + c_{11}^1\varepsilon_3,\ a_{21}^1\varepsilon_1 + b_{21}^1\varepsilon_2 + c_{21}^1\varepsilon_3,\ a_{31}^1\varepsilon_1 + b_{31}^1\varepsilon_2 + c_{31}^1\varepsilon_3),\ \mathrm{col}(a_{12}^1\varepsilon_1 + b_{12}^1\varepsilon_2 + c_{12}^1\varepsilon_3,\ a_{22}^1\varepsilon_1 + b_{22}^1\varepsilon_2 + c_{22}^1\varepsilon_3,\ a_{32}^1\varepsilon_1 + b_{32}^1\varepsilon_2 + c_{32}^1\varepsilon_3)]$, где a_{ij}^1, b_{ij}^1, c_{ij}^1 — известные числа.

Теорема 1. *Пусть* 1) *в равенствах* (6) $m = 1$,

2) *существует вектор* $e = (e_1, e_2)$ *такой, что* $|e| = 1$, *матрица*

$$\begin{aligned} D_1(e) = [\,&\mathrm{col}(a_{11}^1 e_1 + a_{12}^1 e_2,\ a_{21}^1 e_1 + a_{22}^1 e_2,\ a_{31}^1 e_1 + a_{32}^1 e_2), \\ &\mathrm{col}(b_{11}^1 e_1 + b_{12}^1 e_2, b_{21}^1 e_1 + b_{22}^1 e_2,\ b_{31}^1 e_1 + b_{32}^1 e_2), \\ &\mathrm{col}(c_{11}^1 e_1 + c_{12}^1 e_2,\ c_{21}^1 e_1 + c_{22}^1 e_2,\ c_{31}^1 e_1 + c_{32}^1 e_2)] \end{aligned} \tag{7}$$

неособенная.

Тогда система (4) *имеет ненулевое* $T_1 = \frac{2\pi}{\omega}$*-периодическое решение.*

Доказательство. Заменой переменных $\beta = L_1\gamma$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ равенство (5) преобразуется в равенство

$$Q_1(\varepsilon)\gamma + R_1(\varepsilon,\gamma)\gamma + o(|\gamma|) = 0, \tag{8}$$

в котором $\lim\limits_{\gamma\to 0} o(|\gamma|)/|\gamma| = 0$, $Q_1(\varepsilon)$ — (3×2)-матрица. Непосредственным вычислением устанавливаем $Q_1(\varepsilon)\gamma = D_1(\gamma)\varepsilon$, матрица $D_1(\gamma)$ определяется равенством (7), если в нем вектор $e = (e_1, e_2)$ заменить вектором γ.

Пусть $\rho = |y|$. Тогда, положив при любом $i \in \{1,2\}$ $e_i = \frac{\gamma_i}{\rho}$, $e = (e_1, e_2)$, получим $|e| = 1$. Выберем вектор e^* таким образом, чтобы $\det D_1(e^*) \neq 0$. Равенство (8) запишем в виде

$$D_1(e^*)\varepsilon + R_1(\varepsilon, \rho e^*)e^* + O(\rho) = 0.$$

Оператор Γ_1 определим равенством $\Gamma_1\varepsilon = -D_1^{-1}(e^*)[R_1(\varepsilon,\rho e^*)e^* + O(\rho)]$. Из определения $R_1(\varepsilon,\rho e^*)e^*$ следует $R_1(\varepsilon,\rho e^*)e^* = o(\lambda)$. Поэтому число $\delta_1 > 0$ можно выбрать таким образом, что при любом $\lambda \le \delta_1$ $|R_1(\varepsilon,\rho e^*)e^*| < \frac{\delta_1}{2\|D^{-1}(e^*)\|}$. Кроме того, существует число $\delta_2 \in]0,\delta_1]$ такое, что $|O(\rho)| < \frac{\delta_1}{2\|D^{-1}(e^*)\|}$, как только $\rho < \delta_2$.

Следовательно, $|\Gamma_1(\varepsilon)| < \delta_1$ для любого фиксированного $\rho < \delta_2$ и любого ε, удовлетворяющего неравенству $|\varepsilon| \le \delta_1$. Поэтому оператор Γ_1 на множестве $\{\varepsilon : |\varepsilon| \le \delta_1\}$ имеет неподвижную точку ε^*. Тогда, полагая $\gamma^* = \rho e^*$ и учитывая, что $\beta^* = L_1\gamma^*$, приходим к заключению, что $\beta^* \ne 0$ и пара (β^*,ε^*) удовлетворяет равенству (5). Значит, $y(t,\beta^*,\varepsilon^*)$ — ненулевое $\frac{2\pi}{\omega}$-периодическое решение системы (4). $\square$

2. Пусть матрица A имеет одно ненулевое и два чисто мнимых собственных значения. Тогда неособенным линейным преобразованием систему (3) можно свести к системе (4) (положив в ней $m = 2$), в которой матрица $A_2 = [\mathrm{col}(0,-\omega,0),\ \mathrm{col}(\omega,0,0),\ \mathrm{col}(0,0,0)]$, $\omega > 0$. Фундаментальная матрица $Y_2(t)$ системы $\dot y = A_2 y$ определяется равенством $Y_2(t) = [\mathrm{col}(\cos\omega t, -\sin\omega t, 0)$, $\mathrm{col}(\sin\omega t,\cos\omega t,0),\ \mathrm{col}(0,0,1)]$. Как и в п. 1, выберем число T_0, удовлетворяющее неравенству $T_2 = \frac{2\pi}{\omega} < T_0$. В силу линейной зависимости элементов матрицы $B(\varepsilon)$ от координат вектора ε из равенств (6) при $m = 2$, $L_2 = E$ следует

$$\begin{aligned}Q_2(\varepsilon) = [\,&\mathrm{col}(a_{11}^2\varepsilon_1 + b_{11}^2\varepsilon_2 + c_{11}^2\varepsilon_3,\ a_{21}^2\varepsilon_1 + b_{21}^2\varepsilon_1 + c_{21}^2\varepsilon_3,\ a_{31}^2\varepsilon_1 + b_{31}^2\varepsilon_2 + c_{31}^2\varepsilon_3),\\ &\mathrm{col}(a_{12}^2\varepsilon_1 + b_{12}^2\varepsilon_2 + c_{12}^2\varepsilon_3,\ a_{22}^2\varepsilon_1 + b_{22}^2\varepsilon_2 + c_{22}^2\varepsilon_3,\ a_{32}^2\varepsilon_1 + b_{32}^2\varepsilon_2 + c_{32}^2\varepsilon_3),\\ &\mathrm{col}(a_{13}^2\varepsilon_1 + b_{13}^2\varepsilon_2 + c_{13}^2\varepsilon_3,\ a_{23}^2\varepsilon_1 + b_{23}^2\varepsilon_2 + c_{23}^2\varepsilon_3,\ a_{33}^2\varepsilon_1 + b_{33}^2\varepsilon_2 + c_{33}^2\varepsilon_3)],\end{aligned}$$

где a_{ij}^2, b_{ij}^2, c_{ij}^2 — известные числа. Тогда $Q_2(\varepsilon)\beta = D_2(\beta)\varepsilon$,

$$\begin{aligned}D_2(\beta) = [\,&\mathrm{col}(a_{11}^2\beta_1 + a_{12}^2\beta_2 + a_{13}^2\beta_3,\ a_{21}^2\beta_1 + a_{22}^2\beta_2 + a_{23}^2\beta_3,\ a_{31}^2\beta_1 + a_{32}^2\beta_2 + a_{33}^2\beta_3),\\ &\mathrm{col}(b_{11}^2\beta_1 + b_{12}^2\beta_2 + b_{13}^2\beta_3,\ b_{21}^2\beta_1 + b_{22}^2\beta_2 + b_{23}^2\beta_3,\ b_{31}^2\beta_1 + b_{32}^2\beta_2 + b_{33}^2\beta_3),\\ &\mathrm{col}(c_{11}^2\beta_1 + c_{12}^2\beta_2 + c_{13}^2\beta_3,\ c_{21}^2\beta_1 + c_{22}^2\beta_2 + c_{23}^2\beta_3,\ c_{31}^2\beta_1 + c_{32}^2\beta_2 + c_{33}^2\beta_3)].\end{aligned}$$

Теорема 2. *Пусть* 1) *в равенствах* (6) $m = 2$, $L_2 = E$,
2) *существует вектор* $e = \mathrm{col}(e_1,e_2,e_3)$ *такой, что* $|e| = 1$, *матрица* $D_2(e)$ *неособенная.*
Тогда система (4) *имеет ненулевое* $\frac{2\pi}{\omega}$-*периодическое решение.*

Доказательство. Пусть $\rho = |\beta|$, $e_i = \frac{\beta_i}{\rho}$, $e = \mathrm{col}(e_1,e_2,e_3)$. Вектор e^* выберем таким образом, чтобы $|e^*| = 1$ и $\det D_2(e^*) \ne 0$. Так как $L_2 = E$, то, полагая $\gamma = \beta$, равенство (5) при $m = 2$ запишем в виде

$$D_2(e^*)\varepsilon + R_2(\varepsilon,\rho e^*)e^* + O(\rho) = 0.$$

Оператор Γ_2 определим равенством $\Gamma_2\varepsilon = -D_2^{-1}(e^*)[R_2(\varepsilon,\rho e^*)e^* + O(\rho)]$. Далее, рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 1, устанавливаем, что существуют числа $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 \in]0,\delta_1]$ такие, что при любом фиксированном $\rho^* \in]0,\delta_2]$ оператор Γ_2 на множестве $\{\varepsilon : |\varepsilon| \le \delta_1\}$ имеет неподвижную точку ε^*. Следовательно, $\beta^* = \rho^* e^* \ne 0$, пара (β^*,ε^*) удовлетворяет равенству (5), а $y(t,\beta^*,\varepsilon^*)$ — ненулевое $\frac{2\pi}{\omega}$-периодическое решение системы (4). $\square$

Пример. Пусть в системе (3) матрица A определяется равенством $A = [\mathrm{col}(0,1,3/2)$, $\mathrm{col}(-1,1,0),\ \mathrm{col}(-1,0,-1/2)]$. Собственными значениями матрицы A являются числа $1/2$, $\pm i\sqrt{2}$. Неособенным преобразованием $Z = Sy$, $S = [\mathrm{col}(-\sqrt{2}/2,2,-1),\ \mathrm{col}(\sqrt{2}/2,1,-2),\ \mathrm{col}(\sqrt{2},0,1)]$, $S^{-1} = [\mathrm{col}(-\sqrt{2}/9, 2\sqrt{2}/9, 3\sqrt{2}/9),\ \mathrm{col}(5/9,-1/9,3/9),\ \mathrm{col}(2/9,-4/9,3/9)]$ система (3) сводится к системе (4) при $m = 1$ с матрицей $A_1 = SAS^{-1} = [\mathrm{col}(0,-\sqrt{2},0),\ \mathrm{col}(\sqrt{2},0,0),\ \mathrm{col}(0,0,1/2)]$. Фундаментальная матрица $Y_1(t)$ системы $\dot y = A_1 y$ определяется равенством $Y_1(t) = [\mathrm{col}(\cos\sqrt{2}t$, $-\sin\sqrt{2}t, 0),\ \mathrm{col}(\sin\sqrt{2}t,\cos\sqrt{2}t,0),\ \mathrm{col}(0,0,\exp(t/2))]$. Непосредственным вычислением устанавливаем, что при $e^* = (1,0)$ матрица $D_1(e^*)$ неособенная.

Таким образом, выполнены все условия теоремы 1. Поэтому существует $2\pi/\sqrt{2}$-периодическое решение $y(t,\beta^*,\varepsilon^*)$ системы (4).

Из равенств $a = \alpha_1+\varepsilon_1$, $x_1^+-b = \alpha_2+\varepsilon_2$, $x_3^+ = \alpha_3+\varepsilon_3$ следует, что $b = (\alpha_1+\varepsilon_1)(\alpha_3+\varepsilon_3)-\alpha_2-\varepsilon_2$, $c = -x_3^+(x_1^+ - b) = -(\alpha_3 + \varepsilon_3)(\alpha_2 + \varepsilon_2)$. Поэтому при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ и $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1/2$, $\alpha_3 = 3/2$ выполнены равенства $a = 1$, $b = 2$, $c = 3/4$. Следовательно, числа $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 \in]0,\delta_1]$ можно выбрать так, что при $\rho^* \in]0,\delta_2]$, $|\varepsilon^*| < \delta_1$ числа a, b, c будут положительными, а $y(t,\beta^*,\varepsilon^*)$ — ненулевым $2\pi/\sqrt{2}$-периодическим решением системы (4) ($\beta^* = \rho^*(1,0,0)$). Но тогда при этих значениях чисел a, b, c система (1) имеет периодическое решение, не совпадающее с ее состоянием равновесия.

Литература

1. Rössler O.E. // Phys. Letters. – 1976. – № 57. – P. 397–402.
2. Крищенко А.П. *Локализация предельных циклов* // Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31. – № 11. – С. 1858–1865.

Рязанский государственный
педагогический университет

Поступили
первый вариант 22.09.1997
окончательный вариант 02.02.1998