ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 4 (431)

УДК 517.544

Р.Б. САЛИМОВ, Е.В. НАСЫРОВА, П.Л. ШАБАЛИН

ОДНОЛИСТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Речь идет о смешанной обратной краевой задаче по параметру x из работы [1], в которой требуется найти конечную односвязную область D_z, $z = x + iy$, и аналитическую в этой области функцию $w(z)$, конформно отображающую область D_z на заданную конечную односвязную область D_w, $w = \varphi + i\psi$, если известно, что граница L_z области D_z состоит из двух жордановых линий: ломаной L_z^1, содержащей $n-1$ прямолинейных звеньев, и гладкой кривой L_z^2, соединяющей концы полигона L_z^1. При этом заданы

1) внутренние по отношению к области D_z углы при вершинах A_j ломаной L_z^1, равные $\alpha_j\pi$, $0 < \alpha_j < 2$, $j = \overline{2, n-1}$, $\eta_1\pi$ — угол, образованный звеном A_1A_2 ломаной L_z^1 с действительной осью, $-1/2 \le \eta_1 < 3/2$;

2) абсциссы x_1 и x_n концов ломаной L_z^1, $x_1 < x_n$;

3) две жордановы линии L_w^1 и L_w^2, составляющие замкнутую жорданову кривую L_w, ограничивающую конечную область D_w;

4) образы вершин ломаной L_z^1 на кривой L_w^1.

Кривые L_w^1, L_w^2 отвечают при отображении $w(z)$, соответственно, кривым L_z^1, L_z^2, причем положительному направлению обхода на L_z отвечает положительное направление обхода на L_w, участок L_w^2 определен уравнением

$$w = \varphi(x) + i\psi(x), \tag{1}$$

в котором x — абсцисса точки L_z^2, $x \in [\tilde{x}_n, \tilde{x}_1]$, $\tilde{x}_n \le x_n$, $\tilde{x}_1 \ge x_1$.

В работе [1] получены условия разрешимости и формулы, дающие все решения данной задачи. Здесь мы рассмотрим вопрос об ограничениях на граничные условия, гарантирующие однолистность решений.

Будем говорить, что область G является (A, B)-однородной областью в смысле определения Мартио и Сарваса (см., напр., [2], с.58), если любые две точки w_1, w_2, лежащие в G вблизи границы ∂G, можно соединить дугой $\gamma \subset G$ с длиной $l_\gamma(w_1, w_2)$, удовлетворяющей неравенству $l_\gamma(w_1, w_2) < A|w_1 - w_2|$ и такой,что для любого $w \in \gamma$ выполнено $\min\{l_\gamma(w_1, w), l_\gamma(w, w_2)\} < B \operatorname{dist}(w, \partial G)$.

Для искомого контура легко вычислить угол наклона звена полигона к вещественной оси, который для участка A_jA_{j+1}, $j = \overline{2, n-1}$, равен $\Phi_j\pi$, $\Phi_j = \eta_1 + \sum\limits_{k=2}^{j}(1 - \alpha_k)$, $j \ge 2$, и $\Phi_1 = \eta_1$. Обозначим $\eta_n = \eta_{n-1} - N = \Phi_{n-1} - N$, $-1/2 < \eta_n \le 1/2$, N — целое число, $\nu_1\pi$, $\nu_n\pi$ — внутренние по отношению к области G_w углы между касательными к линиям L_w^1, L_w^2 в точках A_1, A_2. Ниже понадобятся следующие величины. Через m обозначим минимум направляющих

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-01-00110) и программы финансирования научно-исследовательской работы, проводимой по единым заказ-нарядам 1.2.94.

косинусов касательной к дуге L_w^2, $0 < m < 1$, K — корень уравнения

$$(1-K)e^K = K\int_0^1 e^{Kt^{1/(1-K)}}dt,$$

$K \approx 0,6$.

Справедлива

Теорема 1. *Если заданная в плоскости w кривая L_w ограничивает (A,B)-однородную область G_w; участок границы L_{wj}^1 между точками A_j, A_{j+1}, $j=\overline{1,n}$, есть гладкая кривая, для которой угол наклона касательной $\Gamma(w)$ удовлетворяет неравенству*

$$|\Gamma(w) - \Phi_j| < \delta; \tag{2}$$

для однозначной функции (1) $(x_1 = \tilde{x}_1,\ x_n = \tilde{x}_n)$ *справедливо соотношение*

$$e^{2q} > \varphi'(x)^2 + \psi'(x)^2 > m^{-2}e^{-2q}, \tag{3}$$

при этом $4\sqrt{\delta^2+q^2} \le B^{-1}\max\{K/A, 1/(A+1)\}$; *выполнены неравенства* $1-\nu_1 \ge \eta_1 \pm 1/2$, $1-\nu_n \ge 1/2 - \eta_n$, *то всякое локально однолистное решение задачи будет однолистным.*

Верхний знак берется, если $-1/2 \le \eta_1 < 1/2$, *нижний — если* $1/2 \le \eta_1 < 3/2$.

Доказательство существенно опирается на результат Ф.Г. Авхадиева ([2], теорема 2.1.3). Действительно, анализ начальных данных задачи и ее решения [1] показывает, что $|\arg z'(w)|$ функции, конформно отображающей заданную область G_w на искомую, ограничен в G_w. Неравенство (2) и условия задачи гарантируют, что в каждой точке дуги L_w^1 искомая функция $z(w)$ будет удовлетворять соотношению $|\arg z'(w)| < \delta$. На участке L_w^2 в силу (3) будет выполнено $|\ln|z'(w)|| < q$. Из вышесказанного ясно включение $\ln z'(w) \in \Omega$, $\Omega = \{\omega : |\operatorname{Re}\omega| < q\} \bigcup \{\omega : |\operatorname{Im}\omega| < \delta\}$ для всех $w \in G_w$. Применяя теорему 2.1.3 ([2], с. 59), получаем утверждение теоремы.

Ниже понадобится полученная в [1] формула аналитического отображения круга E вспомогательной комплексной плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ на искомую область G_z. Точки $\zeta_j = e^{i\gamma_j}$, $j=\overline{1,n}$, дуги L_ζ^1 единичной окружности являются прообразами угловых точек A_j полигона L_z^1 при отображении функцией $z(\zeta)$, решающей поставленную выше задачу. Как показано в [1], индекс задачи равен

$$\kappa = \frac{1}{2} - \eta_n + \eta_1 \pm \frac{1}{2} + \sum_{j=2}^{n-1}(1-\alpha_j).$$

Как и в [1], введем функции

$$H_0(\zeta) = (\zeta - t_1)^{\eta_1 \pm 1/2}\prod_{j=2}^{n-1}(\zeta - t_j)^{1-\alpha_j}(\zeta - t_n)^{1/2-\eta_n},$$

$$\Phi(\gamma) = \mp\frac{\pi}{2}, \quad \gamma \in [0,\gamma_1), \quad \Phi(\gamma) = N\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \gamma \in (\gamma_n, 2\pi);$$

$$\Phi(\gamma) = \Phi_j\pi, \quad \gamma \in (\gamma_j, \gamma_{j+1}), \quad j = \overline{1, n-1}.$$

Пусть $\kappa \ge 2$ и четное, тогда согласно [1] решение рассматриваемой задачи в виде отображения $z(\zeta)$ круга E на D_z определится из формулы

$$\frac{e^{-i(\Psi+\pi/2)}H_0(\zeta)iz'(\zeta)}{\zeta^{k/2-1}} = S(\zeta) + ib_0 + \sum_{k=1}^{\kappa/2-1}[(a_k+ib_k)\zeta^k - (a_k - ib_k)\zeta^{-k}], \tag{4}$$

где $S(\zeta)$ — интеграл Шварца с плотностью $c(e^{i\gamma})$, b_0, a_k, b_k, $k = \overline{1, \kappa/2 - 1}$, — произвольные постоянные,

$$\Psi = \Phi(\gamma) + \arg H_0(t) - \frac{\kappa\gamma}{2} = \text{const}, \quad t = e^{i\gamma},$$

$$\mathbf{c}(\gamma) = \begin{cases} \pm x'(\gamma)|H_0(t)|, & \gamma \in [0, \gamma_1), \\ 0, & \gamma \in (\gamma_1, \gamma_n), \\ (-1)^{N+1} x'(\gamma)|H_0(t)|, & \gamma \in (\gamma_n, 2\pi). \end{cases}$$

Теперь покажем, как в одном частном случае смешанной обратной краевой задачи можно добиться однолистности решения (4) выбором произвольных постоянных, входящих в формулу решения (ср. [3]). Именно, положим $\kappa = 4$ и потребуем выполнения условий

$$1/2 \le \eta_1 < 3/2; \quad \eta_{n-1} = 4 + \eta_n; \quad \alpha_j < 1, \quad j = \overline{2, n-1}. \tag{5}$$

Будем считать, что $x_1 = x_n$, функция (1) задана в интервале $[x_1, \tilde{x}_1]$ в виде совокупности двух однозначных функций $w = \varphi_1(x) + i\psi_1(x)$ для участка A_0A_1 кривой L_z^2, $w = \varphi_2(x) + i\psi_2(x)$ для участка A_nA_0 кривой L_z^2; здесь в качестве A_0 взята точка с абсциссой $\tilde{x}_1$; $1-\nu_1 < \eta_1 - 1/2$, $1 - \nu_n < 1/2 - \eta_n$. В этом случае решение определяется из формулы (4), в которой все произвольные постоянные кроме b_0, a_1, b_1, удовлетворяющих условию [1]

$$U(\gamma) - b_0 - 2(a_1 \sin(\gamma) + b_1 \cos(\gamma)) > 0, \quad \gamma_1 < \gamma < \gamma_n, \tag{6}$$

где $U(\gamma)$ — интеграл Гильберта с плотностью $c(e^{i\gamma})$, равны нулю.

Ясно, что область D_z будет однолистной, если искомый контур L_z окажется простым. Последнее нужно обеспечить лишь для L_z^2.

Из равенств $\varphi_1(x) + i\psi_1(x) = w(e^{i\gamma})$, $0 \le \gamma \le \gamma_1$, $\varphi_2(x) + i\psi_2(x) = w(e^{i\gamma})$, $\gamma_n \le \gamma \le 2\pi$, находим $x = x_1(\gamma)$, $0 \le \gamma \le \gamma_1$, $x = x_2(\gamma)$, $\gamma_n \le \gamma \le 2\pi$. Соотношение $x_1(\gamma) = x_2(\tilde{\gamma})$, $0 \le \gamma \le \gamma_1$, $\gamma_n \le \tilde{\gamma} \le 2\pi$ определяет функцию $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(\gamma)$, непрерывную в интервале $0 \le \gamma \le \gamma_1$, причем $\tilde{\gamma}(\gamma_1) = \gamma_n$, $\tilde{\gamma}(0) = 2\pi$. Очевидно, искомый контур L_z^2 будет простым, если $y(\tilde{\gamma}) - y(\gamma) \le 0$, $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(\gamma)$, $0 \le \gamma \le \gamma_1$. Поскольку $y(\tilde{\gamma}) = y(\tilde{\gamma} - 2\pi)$, то $y(0) = y(2\pi)$. Последнее неравенство с использованием (5) перепишем в виде

$$-E_0(\gamma) + b_0 + 2a_1 E_1(\gamma) + 2b_1 E_2(\gamma) \ge 0, \tag{7}$$

где функции $E_i(\gamma)$, $i = \overline{0, 2}$, определятся из равенств

$$E(\gamma) = \int_{\tilde{\gamma}-2\pi}^{\gamma} \frac{d\gamma}{|H_0(e^{i\gamma})|}, \qquad E_0(\gamma) = \frac{1}{E(\gamma)} \int_{\tilde{\gamma}-2\pi}^{\gamma} \frac{U(\gamma)}{|H_0(e^{i\gamma})|} d\gamma,$$

$$E_1(\gamma) = \frac{1}{E(\gamma)} \int_{\tilde{\gamma}-2\pi}^{\gamma} \frac{\sin(\gamma)}{|H_0(e^{i\gamma})|} d\gamma, \quad E_2(\gamma) = \frac{1}{E(\gamma)} \int_{\tilde{\gamma}-2\pi}^{\gamma} \frac{\cos(\gamma)}{|H_0(e^{i\gamma})|} d\gamma.$$

Теперь для γ, $\gamma_1 \le \gamma \le \gamma_n$, рассмотрим семейство полуплоскостей $P(\gamma) = \{(\xi, \eta) : \xi \cos(\gamma/2) + \eta \sin(\gamma/2) > -[U(\gamma) - U(0)]/4 \sin(\gamma/2)\}$ и обозначим $D = \bigcap P(\gamma)$. Поскольку $0 < \gamma_1/2 < \gamma_n/2 < \pi$, то множество D не пусто и является областью, границей ∂D которой служит огибающая однопараметрического семейства прямых.

Отметим, что в точке $\gamma = 0$ выполнены равенства $E_0(0) = U(0)$, $E_1(0) = 0$, $E_2(0) = 1$. Отсюда получим, что если постоянные a_1, b_1 выбраны так, чтобы точка $(-a_1, b_1)$ принадлежала области D, то неравенство (6) будет выполнено. Теперь очевидно, что неравенство (7) можно удовлетворить, если

$$b_0 > \max_{\gamma} \{E_0(\gamma) - 2a_1 E_1(\gamma) - 2b_1 E_2(\gamma)\}. \tag{8}$$

В результате приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Пусть функция $z(\zeta)$ является решением смешанной обратной краевой задачи, для которой $\kappa = 4$ (т. е. определяется из формулы (6)), выполнены условия (5), $x_1 = x_n$, функция (1) задана в интервале $[x_1, \tilde{x}_1]$ в виде совокупности двух однозначных функций, $1 - \nu_1 < \eta_1 - 1/2$, $1 - \nu_n < 1/2 - \eta_n$. Тогда если точка $(-a_1, b_1) \in D$, а постоянная b_0 удовлетворяет неравенству (8), то искомая область D_z будет однолистной.*

При тех же условиях, что и выше, на начальные данные задачи дополнительно предположим, что известны $y_n \geq 0$, $y_1 = 0$. Тогда с учетом равенства $\tilde{\gamma}(\gamma_1) = \gamma_n$, имеем $y(\tilde{\gamma}) - y(\gamma) = y_n$, $\gamma = \gamma_1$. Можно показать, что неравенство (7) будет выполнено, если точка $(-a_1, b_1)$ будет принадлежать общей части семейства полуплоскостей

$$P_1(\gamma) = \left\{(\xi, \eta) : \xi \frac{E_1(\gamma_1) - E_1(\gamma)}{E_2(\gamma) - E_2(\gamma_1)} + \eta \geq \frac{E_0(\gamma) - E_0(\gamma_1)}{2[E_2(\gamma) - E_2(\gamma_1)]} - \frac{y_n}{2E(\gamma)[E_2(\gamma) - E_2(\gamma_1)]}\right\}, \qquad (9)$$

$0 \leq \gamma < \gamma_1$. Анализ коэффициентов, входящих в уравнение границы $P_1(\gamma)$, показывает, что семейство полуплоскостей (9) имеет непустое пересечение D_1.

Теорема 3. *Пусть справедливо одно из следующих условий:*

1. $E_1(\gamma_1) = 0$;
2. $E_1(\gamma_1) < 0$, $\nu_1/(2\nu_n) - 3/2 + \eta_1 + \eta_n\nu_1/\nu_n > 0$;
3. $E_1(\gamma_1) > 0$, $\nu_1/(2\nu_n) - 3/2 + \eta_1 + \eta_n\nu_1/\nu_n > 0$.

Тогда функция $z(\zeta)$, определяемая из формулы (6), будет однолистной при произвольной постоянной b_0, если постоянные a_1, b_1 выбраны так, чтобы точка $(-a_1, b_1)$ принадлежала пересечению областей D и D_1.

Ниже понадобится одно достаточное условие однолистности аналитических в единичном круге функций, для доказательства которого проведем следующие выкладки. Пусть $0 \leq \gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_n < \gamma_1 + 2\pi$ — произвольный набор чисел, $0 < \alpha_j < 1$, $j = \overline{1, n}$, и $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j = n - 2$, тогда согласно [4] интеграл Кристофеля-Шварца $\varphi(\zeta)$ отображает E на внутренность многоугольника D_n, для которого обозначим $\beta = \inf \beta(w^*, w^{**})$, $w^*, w^{**} \in \partial D_n$, $\beta(w^*, w^{**})$ — угол при вершинах w^*, w^{**} круговой луночки, целиком лежащей в D_n.

Функция $f(w)$, регулярная в D_n, будет однолистной [5], если выполнено неравенство $|f''(w)/f'(w)| < \beta \rho_{D_n}(w)$ ($\rho_{D_n}(w)$ — коэффициент гиперболической метрики области D_n в точке w), пересадив которое в круг, получим достаточное условие однолистности

$$\left|\frac{F''(\zeta)}{F'(\zeta)} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1 - \alpha_j}{\zeta - t_j}\right| < \frac{\beta}{1 - |\zeta|^2}, \quad |\zeta| < 1, \qquad (10)$$

функции $F(\zeta)$, регулярной в E.

Пусть теперь $\kappa = 2$, $0 < \alpha_j < 1$, $j = \overline{2, n-1}$, в этом случае решение внутренней смешанной обратной краевой задачи будет зависеть от одной произвольной постоянной b_0, удовлетворяющей условию

$$U(\gamma) - b_0 > 0, \quad \gamma_1 < \gamma < \gamma_n, \qquad (11)$$

и определится из формулы (4), в которой все произвольные постоянные кроме b_0 равны нулю. Дополнительно предположив, что выполнено условие

$$\sum_{j=2}^{n-1} \alpha_j + \frac{3}{2} \mp \frac{1}{2} - \eta_1 - \eta_n = n - 2, \qquad (12)$$

имеем

$$\frac{z''(\zeta)}{z'(\zeta)} + \frac{\eta_1 \pm 1/2}{\zeta - t_1} + \frac{1/2 - \eta_n}{\zeta - t_n} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{1 - \alpha_j}{\zeta - t_j} = \frac{S''(\zeta)}{S'(\zeta)}$$

и, следовательно, условие однолистности (10) для функции $z(\zeta)$ будет выполнено, если $|g''(\zeta)/g'(\zeta)| < \beta/(1-|\zeta|^2)$. Справедливость последнего неравенства следует из ([2], с. 200), если функция $C(\gamma) = \int c(e^{i\gamma})d\gamma$ удовлетворяет условию

$$|C(\gamma+h) - 2C(\gamma) + C(\gamma-h)| < kh, \quad \gamma \in [0, 2\pi], \quad h > 0, \quad k \le \pi^2\beta/20. \tag{13}$$

Итак, доказана

Теорема 4. *Если* $\kappa = 2$, *произвольная постоянная* b_0 *удовлетворяет условию* (11), α_j, $0 < \alpha_j < 1$, $j = \overline{2, n-1}$, *удовлетворяют равенству* (12), *выполнено условие* (13), *то решение внутренней смешанной обратной краевой задачи будет однолистным.*

Литература

1. Салимов Р.Б., Стрежнева Е.В. *К решению обратной смешанной краевой задачи* // Тр. семин. по краев. задачам. – Казань, 1992. – Вып. 27. – С. 95–117.
2. Авхадиев Ф.Г. *Конформные отображения и краевые задачи.* – Казанский фонд "Математика", 1996. – 216 с.
3. Салимов Р.Б. *Внешние обратные краевые задачи для случая, когда граничные значения заданы в функции декартовой координаты x* // Учен. зап. Казанск. ун-та. – Казань. – 1957. – Т. 117. – Кн. 9. – Вып. II. – С. 60–64.
4. Аксентьев Л.А. *Однолистное изменение многоугольных областей* // Тр. семин. по краев. задачам. – Казань, 1976. – Вып. 13. – С. 30–39.
5. Аксентьев Л.А., Шабалин П.Л. *Условия однолистности в звездных и выпуклых областях* // Тр. семин. по краев. задачам. – Казань, 1983. – Вып. 20. – С.35–42.

Казанская архитектурно-строительная академия

Поступила
24.02.1998