ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 10 (485)

УДК 517.546

А.А. КУЗНЕЦОВ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ В ВИДЕ БЕСКОНЕЧНЫХ КОМПОЗИЦИЙ

Введение

Задача представления голоморфных однолистных функций в виде бесконечной композиции стала привлекать внимание сравнительно недавно. Так, например, работы [1] и [2] посвящены представлениям функций, отображающих единичный круг $\mathbb{U} = \{z : |z| < 1\}$ на гиперболически выпуклые треугольники с внутренними углами, равными $\pi/2^n$ и 0, и функций класса Шоттки в виде $f = \cdots \circ k_{\alpha_n}^{\gamma_n} \circ \cdots \circ k_{\alpha_1}^{\gamma_1}$, где $k_\alpha^\gamma(z) = e^{i\gamma} k_\alpha(e^{-i\gamma} z)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $\gamma \in \mathbb{R}$ и

$$k_\alpha(z) = \frac{2\alpha z}{1 - z + \sqrt{(1-z)^2 + 4\alpha^2 z}}, \quad z \in \mathbb{U}.$$

Функция $k_\alpha(z)$ отображает $\mathbb{U}$ на гиперболический двуугольник. В [3] было дано подобное представление для логарифма и некоторых эллиптических интегралов первого рода, а также для функций, отображающих $\mathbb{U}$ на гиперболически выпуклые многоугольники с внутренними углами, равными $\pi/2^n$ или 0.

В данной работе используется новый подход для представления однолистных функций в виде бесконечных композиций. Введем некоторые обозначения. Пусть $\mathcal{M}$ — класс голоморфных функций, однолистно отображающих $\mathbb{U}$ в себя с нормировкой $f(0) = 0$ и $f'(0) > 0$, и $\mathcal{P}$ — класс функций p, голоморфных в $\mathbb{U}$, $\operatorname{Re} p(z) > 0$, $z \in \mathbb{U}$, $p(0) = 1$. Обозначим через S класс голоморфных однолистных функций в $\mathbb{U}$ с нормировкой $f(0) = f'(0) - 1 = 0$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение Лёвнера

$$\frac{dw}{dt} = -w \frac{1 - \xi(t) w}{1 + \xi(t) w}, \quad t \geqslant 0, \quad w|_{t=0} = z, \quad z \in \mathbb{U}, \tag{1}$$

где $\xi(t)$ — кусочно-непрерывная функция, $|\xi(t)| = 1$, которую будем в дальнейшем называть управлением. Интегралы уравнения Лёвнера (1) образуют всюду плотный подкласс класса $\mathcal{M}$. В частности, если $\xi(t) = \mathrm{const}$, то при каждом $t > 0$ интеграл $w(z,t)$ дифференциального уравнения (1) является функцией p_α^γ, $e^{-t} = \alpha$, $e^{i\gamma} = \xi$, отображающей $\mathbb{U}$ на единичный круг с радиальным разрезом с концевой точкой $e^{i\gamma}$. Решение уравнения Лёвнера (1) с кусочно-постоянным управлением является композицией функций p_α^γ.

Рассмотрим последовательность кусочно-постоянных функций $\xi_n(t)$, которая равномерно сходится к $\xi(t)$. Так как $\frac{1-\xi w}{1+\xi w}$ непрерывно зависит от ξ, то последовательность функций $\frac{1-\xi_n(t)w}{1+\xi_n(t)w}$ слабо сходится по t к функции $\frac{1-\xi(t)w}{1+\xi(t)w}$, и, следовательно, интегралы $w_n(z,t)$ уравнения Лёвнера (1) с управлениями ξ_n при каждом $t > 0$ равномерно сходятся к интегралу $w(z,t)$ с управлением ξ [4]. Из того, что класс кусочно-постоянных управлений ξ является плотным подклассом кусочно-непрерывных функций, вытекает, что функции, представимые в виде

$$f = p_{\alpha_1}^{\gamma_1} \circ \cdots \circ p_{\alpha_n}^{\gamma_n}, \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов INTAS 99-00089 и Российского фонда фундаментальных исследований № 01-01-00123.

плотны в классе $\mathcal{M}$.

Покажем, что плотность представления (2) в классе $\mathcal{M}$ сохранится при замене функций p_α^γ на k_α^γ. Семейство функций k_α^γ совпадает с множеством интегралов $w(z,t)$ уравнения Лёвнера (1), где $\alpha = e^{-t}$ и $\xi_\gamma(t) = e^{i\gamma}(e^{it} + i\sqrt{1-e^{-2t}})^3$ [5]. На отрезке $[0,\varepsilon]$ управление $\xi_\gamma(t)$ отличается от постоянного не более чем на $\delta(\varepsilon)$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\delta(\varepsilon) = 0$. Следовательно, управления вида

$$\xi(t) = \begin{cases} \xi_{\gamma_1}(t), & \text{если } 0 < t < t_1; \\ \xi_{\gamma_2}(t - t_1), & \text{если } t_1 < t < t_2; \\ \dots \\ \xi_{\gamma_n}(t - t_n), & \text{если } t_n < t < t_{n+1}; \\ \dots \end{cases}$$

плотны в классе кусочно-непрерывных функций, и поэтому функции, представимые в виде $f = k_{\alpha_1}^{\gamma_1} \circ \dots \circ k_{\alpha_n}^{\gamma_n}$, плотны в $\mathcal{M}$.

Пусть дано некоторое семейство функций $\{r_\beta : r_\beta \in \mathcal{M}\}_{\beta\in[0,1]}$. Обозначим $r_\beta^\gamma(z) = e^{i\gamma}r_\beta(e^{-i\gamma}z)$. Приведем необходимое и достаточное условие для того, чтобы функции вида $r_{\beta_1}^{\gamma_1} \circ \dots \circ r_{\beta_n}^{\gamma_n}$ были плотны в классе $\mathcal{M}$. Сопоставим каждой функции r_β некоторую функцию $s_\beta \in \mathcal{P}$ следующим образом. Каждая функция r_β совпадает с интегралом $w(z, t_\beta)$ уравнения Лёвнера–Куфарева

$$\frac{dw}{dt} = -wP_\beta(w,t), \tag{3}$$

в котором ядро $P_\beta(w,t)$ измеримо по t и при каждом фиксированном $t \geqslant 0$ принадлежит классу $\mathcal{P}$ [6]. Положим $s_\beta(w) = \frac{1}{t_\beta}\int\limits_0^{t_\beta} P_\beta(w,t)dt$. Тогда справедлива

Теорема 1. *Для того чтобы функции вида $r_{\beta_1}^{\gamma_1} \circ \dots \circ r_{\beta_n}^{\gamma_n}$ были плотны в $\mathcal{M}$, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность r_{β_n}, $\lim\limits_{n\to\infty} r_{\beta_n}(z) = z$, такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} s_{\beta_n} = \frac{1 - e^{i\gamma}w}{1 + e^{i\gamma}z} \quad \textit{для некоторого} \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Пусть семейство $\{r_\beta : r_\beta \in \mathcal{M}\}_{\beta\in[0,1]}$ удовлетворяет условиям

(i) $r_0 = \mathrm{id}$, $r'_{\beta_1}(0) > r'_{\beta_2}(0)$ при $\beta_1 < \beta_2$;

(ii) для любого $\alpha \in [0;1]$ существует β такое, что $k_\alpha \prec r_\beta \neq \mathrm{id}$.

В данной статье доказана

Теорема 2. *Если семейство функций $\{r_\beta : r_\beta \in \mathcal{M}\}_{\beta\in[0,1]}$ удовлетворяет условиям* (i) *и* (ii), *то функции $f = r_{\beta_1}^{\gamma_1} \circ \dots \circ r_{\beta_n}^{\gamma_n} \circ \cdots$ плотны в классе $\mathcal{M}$.*

Следствие 1. Функции, которые можно представить по следующей рекуррентной формуле

$$f_n(z) = \frac{f_{n-1}(r_{\beta_n}^{\gamma_n}(z))}{r_{\beta_n}^{\gamma_n}{}'(0)}, \quad f_0 = \mathrm{id},$$

плотны в классе $\mathcal{S}$.

Первая часть статьи содержит доказательство теоремы 2. Во второй части приведено свойство двух семейств функций, обеспечивающее совпадение замыкания множеств их всевозможных композиций. В третьей части доказана теорема 1. В последней части приведено обобщение результата работы [1] о представлении отображений на гиперболически выпуклые треугольники.

1. Доказательство теоремы 2

Для доказательства теоремы потребуется

Лемма 1. *Пусть дана последовательность голоморфных в* $\mathbb{U}$ *функций* $f_n(z)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(z) = f(z)$, $|f_n(z)| < L$. *Предположим, что существует последовательность жордановых дуг* λ_n *с концевыми точками* z_{1n} *и* z_{2n}, $\lim\limits_{n\to+\infty} z_{1n} = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} z_{2n} = b$, $a \neq b$, $|a| \leqslant 1$, $|b| \leqslant 1$, *непересекающихся с некоторой окрестностью нуля, и такая, что для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* n_0 *такое, что для всех* $n > n_0$ *и* $z \in \lambda_n$ *справедливо неравенство* $|f_n(z)| < \varepsilon$. *Тогда* $f(z) \equiv 0$.

Доказательство. Лемма 1 является небольшим видоизменением леммы Кёбе (см., напр., [7], с. 35). Ее доказательство совпадает с доказательством леммы Кёбе в [7], за исключением того, что необходимо оценивать f_n вместо f в некоторой окрестности нуля и, получив оценку $|f_n(z)| < \varepsilon_n L^{2m-1/2m}$, перейти к пределу при $n \to +\infty$. $\square$

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим последовательность функций k_{α_n} такую, что $\alpha_{n+1} > \alpha_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 1$. По этой последовательности образуем последовательность функций r_{β_n}. Выберем r_{β_0} так, что $k_{\alpha_0} \prec r_{\beta_0} \neq \mathrm{id}$. Остальные члены последовательности определим по индукции. Выберем α такое, что $k_{\alpha_{n+1}} \prec k_\alpha \not\prec r_\beta$. Положим β_{n+1} таким, что $k_\alpha \prec r_{\beta_{n+1}} \neq \mathrm{id}$. Такое β_{n+1} существует по условию (ii). Тогда по условию (i) должно выполняться неравенство $\beta_{n+1} < \beta_n$ и, кроме того, $r_{\alpha_{n+1}} \prec r_{\beta_{n+1}}$. Обозначим данную последовательность через $\mathcal{Q}$.

Определим класс G замкнутых спрямляемых жордановых кривых λ, обладающих тем свойством, что для любой точки $z \in \lambda$ найдется такая ее окрестность, что любая окружность с центром в этой точке и лежащая в этой окрестности пересекает λ ровно в двух точках. Например, этому условию удовлетворяют ломаные с конечным числом звеньев.

Для доказательства теоремы достаточно показать, что любая функция $f \in \mathcal{M}, \partial f(\mathbb{U}) \in G$, представима в виде бесконечной композиции функций r_β^γ.

Для f приведем следующий алгоритм выбора β_n и γ_n. Положим $r_{\beta_1}^{\gamma_1}$ равной некоторой функции r_β^γ, $r_\beta \in \mathcal{Q}$, с максимальным β, для которой выполняется $f \prec r_\beta^\gamma$. Такая функция существует в силу конечности множества функций $\{r_\beta : r_\beta \in \mathcal{Q},\ \beta > k > 0\}$. Положим $f = r_{\beta_1}^{\gamma_1} \circ f_1$. Аналогично подбираем функцию $r_{\beta_2}^{\gamma_2}$ для функции f_1. Продолжая эту операцию по индукции, получим последовательность $\{r_{\beta_n}^{\gamma_n}\}_{n=0}^{+\infty}$. Обозначим $g_n = r_{\beta_1}^{\gamma_1} \circ \cdots \circ r_{\beta_n}^{\gamma_n}$. Для g_n справедливо подчинение $f \prec \cdots \prec g_n \prec \cdots \prec g_1$. Так как последовательность областей $g_n(\mathbb{U})$ монотонна по включению, то по теореме Каратеодори (напр., [7], с. 56) $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(z) = g_\infty(z)$.

Предположим, что $g_\infty \neq f$. Следовательно, существует r_β^γ такое, что $g_\infty^{-1} \circ f \prec r_\beta^\gamma$. Интуитивно понятно, что β, γ можно выбрать так, что подчинение сохранится для $g_n^{-1} \circ f \prec r_\beta^\gamma$ и при достаточно большом n, что в свою очередь будет противоречить выбору на каждом шаге максимального β. Покажем это строго.

Так как $g_\infty \neq f$, то на $\partial f(\mathbb{U})$ существует точка z_0 такая, что ее окрестность не содержит точек множеств $\partial g_n(\mathbb{U})$. Пусть $V_n = g_n(\mathbb{U}) \cap (\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{U}))$, $n = 0, 1, \ldots, \infty$. Тогда $V_1 \supset \cdots \supset V_n \supset \cdots \supset V_\infty$.

Для каждого $n = 0, 1, \cdots, \infty$ определим кривую l_n. Разобьем границу области $f(\mathbb{U})$ на две части так, чтобы одна из них была пересечением границ областей $f(\mathbb{U})$ и $g_n(\mathbb{U})$, а другая состояла из жордановых дуг s_{ni}, лежащих внутри области $g_n(\mathbb{U})$ за исключением своих концов, которые принадлежат границе этой области. Положим $l_n = s_{ni}$, если $z_0 \in s_{ni}$. По построению $l_1 \supset l_2 \supset l_3 \supset \cdots \supset l_\infty$. Определим V_n^* как компоненту связности множества V_n, граница которой содержит кривую l_n.

Рассмотрим следующие три возможных варианта:

1) кривая l_∞ полностью лежит внутри области $g_\infty(\mathbb{U})$;

2) кривая l_∞ имеет только одну точку z_1, общую с $\partial g_\infty(\mathbb{U})$;

3) кривая l_∞ имеет только две точки z_2 и z_1, общие с $\partial g_\infty(\mathbb{U})$.

Если выполняются первые два варианта, то $l_1 = l_2 = \cdots = l_\infty$.

1) Так как $l_\infty \subset g_\infty(\mathbb{U})$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует n такое, что кривая $g_n^{-1}(l_\infty)$ полностью лежит в ε-окрестности кривой $g_\infty^{-1}(l_\infty)$. Следовательно, на единичной окружности существует точка z^* и найдется $\varepsilon > 0$, для которых $\mathbb{U} \cap \{|z - z_*| < \varepsilon\} \subset g_n^{-1}(V_n)$. Следовательно, существуют $\beta > 0$ и $\gamma \in \mathbb{R}$ такие, что $g_n \prec r_\beta^\gamma$. С другой стороны, т. к. $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g_\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$. Это противоречит тому, что $g_n \prec r_\beta^\gamma$, и выбору на каждом шаге максимального β_n. Тем самым мы показали, что первый вариант невозможен.

2) Покажем, что, начиная с некоторого n, кривые $l'_n = g_n^{-1}(l_\infty)$ лежат в ε-окрестности $\mathcal{U}$ кривой $g_\infty^{-1}(l_\infty)$. Предположим противное. Обозначим $\varepsilon/2$-окрестность кривой $g_\infty^{-1}(l_\infty)$ через $\mathcal{U}'$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} g_n^{-1}(z) = g_\infty^{-1}$, то, начиная с некоторого n, часть кривой l'_n, образ которой не попадает в $\mathcal{U}'$, лежит полностью в ε-окрестности точки z_1. По предположению существует последовательность кривых $\lambda_n \subset l'_n$ таких, что один конец λ_n лежит вне $\mathcal{U}$, а другой в $\mathcal{U}'$. Выбирая, если надо, подпоследовательность этой последовательности, можем утверждать, что эти дуги имеют своими концами точки z_{1n} и z_{2n}, сходящиеся к различным точкам, и $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{z\in\lambda_n} |g_n^{-1}(z) - z_1| = 0$. Заменяя в лемме 1 функцию f и последовательность функций f_n на функцию $g_\infty^{-1} - z_1$ и последовательность функций $g_n^{-1} - z_1$, получим, что $g_\infty^{-1}(z) \equiv z_1$. Это противоречит тому, что g_∞ является однолистной функцией.

По построению граница множества $g_n^{-1}(V_n^*)$ состоит из кривой l'_n и дуги единичной окружности. Покажем, что, начиная с некоторого n, граница области $g_n^{-1}(V_n^*)$ содержит любую точку z единичной окружности, принадлежащую множеству $\partial g_\infty^{-1}(V_\infty^*) \setminus l'_0$. Выберем точку $z^* \in V_n^* \cap V_\infty$, которая принадлежит всем V_n^*, и рассмотрим ее окрестность $\mathcal{V} \subset V_n^* \cap V_\infty$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} g_n^{-1}(z) = g_\infty^{-1}(z)$, то, начиная с некоторого номера n, $g_\infty^{-1}(\mathcal{V}) \cap g_n^{-1}(\mathcal{V})$ содержит замкнутый круг $\mathcal{B}$ положительного диаметра с центром в точке z^*. Рассмотрим кривую $s \subset V_\infty^*$, не содержащую точек l_∞ и соединяющую точки z и z^*. Выберем окрестность $\mathcal{U}$ кривой l'_n, не содержащую точек кривой s. По построению, начиная с некоторого n, данная кривая не пересекает кривые l'_n. Так как точка z^* принадлежит области $g_n^{-1}(V_n)$, то точка z лежит на границе этой области.

Следовательно, существует ε-окрестность точки $z \in \partial g_\infty^{-1}(V_n^*) \setminus l'_0$ такая, что ее пересечение $\mathcal{W}$ с единичным кругом не содержит точек кривой $g_n^{-1}(l_\infty)$. Поэтому существуют $\beta > 0$ и γ такие, что $g_n \prec r_\beta^\gamma$. Но, с другой стороны, т. к. последовательность g_n сходится, то $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = 0$, что противоречит выбору максимального β_n на каждом шаге. Тем самым мы показали, что второй вариант невозможен.

3) Пусть $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^\infty$ — последовательность положительных чисел, $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Рассмотрим ε_n-окрестности W_{1n} и W_{2n} точек z_1 и z_2. Не уменьшая общности, можно считать, что $\partial g_n(\mathbb{U})$ пересекает W_{1n} и W_{2n}. Выберем k достаточно большим, чтобы $\partial f(\mathbb{U})$ имела ровно две точки пересечения с каждым W_{1n} и W_{2n}, $n = k, k+1, \ldots$

Пусть компонента связности ϱ_{1n} множества $l_n \setminus l_\infty$ содержит точку z_1. Возможны два случая:

(A) один из концов кривой ϱ_{1n} лежит вне W_{1n};

(B) кривая $\varrho_{1n} \subset W_{1n}$.

Случай (A). Кривая ϱ_{1n} имеет одну общую точку b_n с окружностью $|z - z_1| = \varepsilon_n$. Пусть π_n — дуга окружности $|z_1 - z| = \varepsilon_n$, целиком лежащая в V_n за исключением концов, один из которых b_n, а другой $a_n \in \partial g_n(\mathbb{U})$. Обозначим через ϱ'_{1n} кривую, составленную из части кривой ϱ_{1n}, заключенной между точками z_1, b_n и π_n.

В случае (B) кривую ϱ'_{1n} отождествим с кривой ϱ_{1n}. Для точки z_2 аналогично определим кривую ϱ'_{2n}. Пусть кривая l_n^* составлена из кривых l_∞, ϱ'_{1n} и ϱ'_{2n}. Таким образом, кривая l_∞ содержит кривые l_n^*, за исключением некоторой их части, которая, начиная с некоторого n, лежит в наперед заданной окрестности концов кривой l_∞.

Теперь покажем, что для любого ε, начиная с некоторого номера n, кривые $l'_n = g_n^{-1}(l_n^*)$, $n = 1, 2, \ldots$, лежат в ε-окрестности $\mathcal{U}$ кривой $l^* = g_\infty^{-1}(l_\infty)$. Предположим противное.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} g_n^{-1}(z) = g_\infty^{-1}(z)$, то, начиная с некоторого n, часть l_n^*, образ которой не попадает в $\mathcal{U}'$, полностью лежит в окрестности точек z_1 и z_2. По предположению в $\mathcal{U}$ найдется последовательность кривых $\lambda_n \subset l'_n$ таких, что один из концов λ_n лежит вне $\mathcal{U}$, а другой в $\mathcal{U}'$.

Выбирая, если надо, подпоследовательность последовательности кривых λ_n, можем утверждать, что эти дуги имеют своими концами точки z_{1n} и z_{2n}, сходящиеся к различным точкам, и либо $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{z\in\lambda_n}|g_n^{-1}(z)-z_1|=0$, либо $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{z\in\lambda_n}|g_n^{-1}(z)-z_2|=0$. Пусть для определенности выполняется первое предельное соотношение. Заменяя в лемме 1 функцию f и последовательность функций f_n на функцию $g_\infty^{-1}-z_1$ и последовательность функций $g_n^{-1}-z_1$, получим, что $g_\infty^{-1}(z)\equiv z_1$. Это противоречит однолистности функции g_∞.

Рассмотрим область $V_n' \not\ni 0$, ограниченную кривой l_n^* и множеством $\partial g_n(\mathbb{U})$. По построению $V_n'\subset V_n^*$, граница множества $g_n^{-1}(V_n')$ состоит из кривой l_n' и дуги единичной окружности. Пусть $z\in V_\infty^*$ и z принадлежит всем V_n'. Таким образом, применяя аргументы, приведенные в разборе второго варианта, получим, что граница области $g_n^{-1}(V_n')$, начиная с некоторого n, содержит любую точку z единичной окружности, принадлежащую множеству $\partial g_\infty^{-1}(V_\infty^*)\setminus l_\infty'$.

Следовательно, существует ε-окрестность точки $z\in\partial g_\infty^{-1}(V_\infty^*)\setminus l_\infty'$ такая, что, начиная с некоторого n, ее пересечение $\mathcal{W}$ с единичным кругом не содержит точек кривой $g_n^{-1}(l_\infty)$. Поэтому существуют $\beta>0$ и $\gamma\in\mathbb{R}$ такие, что $g_n\prec r_\beta^\gamma$. С другой стороны, т. к. последовательность g_n сходится, то $\lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n=0$, что противоречит выбору максимального β_n на каждом шаге. Тем самым показана невозможность всех трех вариантов, и, таким образом, $g_\infty(z)=f(z)$. $\square$

Доказательство следствия 1. Вместо $f=r_{\beta_1}^{\gamma_1}\circ\dots\circ r_{\beta_n}^{\gamma_n}\circ\cdots$ рассмотрим функцию $\frac{f(z)}{f'(0)}$. Множество таких функций плотно в классе S. Положим $f_n(z)=\frac{1}{r_{\beta_1}^{\gamma_1}{}'(0)\dots r_{\beta_n}^{\gamma_n}{}'(0)}r_{\beta_1}^{\gamma_1}\circ\dots\circ r_{\beta_n}^{\gamma_n}(z)$, тогда справедливо рекуррентное соотношение

$$f_n(z)=\frac{f_{n-1}(p_{\alpha_n}^{\gamma_n}(z))}{p_{\alpha_n}^{\gamma_n}{}'(0)},\quad f_0=\mathrm{id}\,. \tag{4}$$

Так как последовательность f_n сходится к $\frac{f(z)}{f'(0)}$, то функции, представимые рекуррентным соотношением (4), плотны в классе $\mathcal{S}$. $\square$

2. Эквивалентности представлений

Рассмотрим вопрос о возможности использования семейства, близкого к семейству функций из теоремы 2, для представления плотного подкласса класса $\mathcal{M}$.

Пусть даны два семейства функций $r_{\gamma,t}$ и $h_{\gamma,t}$, $t\in[0,+\infty)$, $\gamma\in\mathbb{R}$, такие, что $r_{\gamma,t}'(0)=e^{-t}$ и $h_{\gamma,t}'(0)=e^{-t}$. Обозначим через $\mathcal{R}$ и $\mathcal{H}$ замыкание множеств всевозможных композиций функций $r_{\gamma,t}$ и $h_{\gamma,t}$ соответственно. В этой части нас будет интересовать следующий вопрос: при каких условиях $\mathcal{R}$ является подмножеством $\mathcal{H}$? Наложим на семейство функций r_γ следующее условие. Пусть для любого $\varepsilon>0$ композиции функций $\{r_{\gamma,t}:t\in[0,\varepsilon]\}$ также образуют плотное подмножество $\mathcal{R}$. Справедлива

Теорема 3. *Пусть существует $\delta>0$ такое, что для всех $t\in[0,\delta]$ найдутся $\beta_1,t_1,\dots,\beta_n,t_n$ такие, что справедлива оценка*

$$\max_{|z|<3-\sqrt{8}}|r_{\beta,t}(z)-h_{\beta_1,t_1}\circ\dots\circ h_{\beta_n,t_n}(z)|<f(t)t, \tag{5}$$

где $f(t)>0$, $\lim\limits_{t\to0}f(t)=0$. Тогда $\mathcal{H}$ содержит $\mathcal{R}$.

Доказательство. Так как все рассматриваемые функции принадлежат классу $\mathcal{M}$, то по теореме Витали достаточно указать последовательность композиций функций $h_{\beta,t}$, которая равномерно сходится в круге $|z|<3-\sqrt{8}$ к функции $f\in\mathcal{R}$. Так как множество $\mathcal{H}$ инвариантно относительно композиции, то, не уменьшая общности, можем считать, что справедливо неравенство $\max\limits_{|z|<3-\sqrt{8}}|r_{\beta,t}(z)-h_{\beta,t}(z)|<f(t)t$. Иначе вместо $h_{\gamma,t}$ рассматривались бы их композиции. По условию для $g\in\mathcal{R}$ существует такая композиция функций $\{r_{\beta_n,t_n}\}_{n=1}^m$, что $f(t_n)<\varepsilon$, $\max\limits_{|z|\leqslant3-\sqrt{8}}|r_{\beta_1,t_1}\circ\dots\circ r_{\beta_n,t_n}-g|<\varepsilon$ и $\Big|\sum\limits_{k=0}^{n}t_k-\log g'(0)\Big|<\varepsilon$.

Оценим разность

$$|r_{\gamma_1,t_1} \circ \dots \circ r_{\gamma_n,t_n} - h_{\gamma_1,t_1} \circ \dots \circ h_{\gamma_n,t_n}| \tag{6}$$

в круге $|z| \leqslant 3 - \sqrt{8}$. Так как по лемме Щварца любой функцией $f \in \mathcal{M}$ круг $|z| \leqslant 3 - \sqrt{8}$ отображается в себя, то можем получить оценку

$$|r_{\gamma_1,t_1} \circ r_{\gamma_2,t_2} - h_{\gamma_1,t_1} \circ r_{\gamma_2,t_2}| < f(t_1)t_1. \tag{7}$$

Опять применяя то, что круг $|z| \leqslant 3 - \sqrt{8}$ отображается в себя, и то, что для всех $|z| \leqslant 3 - \sqrt{8}$ имеет место $|h'(z)| < 1$ (напр., [7], с. 364), получаем оценку

$$|h_{\gamma_1,t_1} \circ r_{\gamma_2,t_2} - h_{\gamma_1,t_1} \circ h_{\gamma_2,t_2}| < f(t_2)t_2. \tag{8}$$

Преобразуя (6) и применяя оценки (7) и (8), получаем

$$|r_{\gamma_1,t_1} \circ r_{\gamma_2,t_2} - h_{\gamma_1,t_1} \circ h_{\gamma_2,t_2}| = |r_{\gamma_1,t_1} \circ r_{\gamma_2,t_2} - h_{\gamma_1,t_1} \circ r_{\gamma_2,t_2} + h_{\gamma_1,t_1} \circ r_{\gamma_2,t_2} - h_{\gamma_1,t_1} \circ h_{\gamma_2,t_2}| \leqslant$$
$$\leqslant |r_{\gamma_1,t_1} \circ r_{\gamma_2,t_2} - h_{\gamma_1,t_1} \circ r_{\gamma_2,t_2}| + |h_{\gamma_1,t_1} \circ r_{\gamma_2,t_2} - h_{\gamma_1,t_1} \circ h_{\gamma_2,t_2}| < f(t_1)t_1 + f(t_2)t_2.$$

Продолжая эту операцию по индукции, получаем, что $|r_{\gamma_1,t_1} \circ \dots \circ r^{\gamma_n}_{\beta_n} - h_{\gamma_1,t_1} \circ \dots \circ h^{\gamma_n}_{\beta_n}| \leqslant \max\limits_k f(t_k) \sum\limits_{k=0}^{n} t_k$. Так как $\sum\limits_{k=0}^{n} t_k$ не превосходит $g'(0)+\varepsilon$ и $f(t_k) < \varepsilon$, то $\max\limits_k f(t_k) \sum\limits_{k=0}^{n} t_k < \varepsilon(g'(0)+\varepsilon)$. Заключение теоремы 3 следует из произвольности $\varepsilon > 0$. $\square$

Следствие 2. Пусть справедливо неравенство

$$\max_{|z|<3-\sqrt{8}} |r_\beta(z) - h_\beta(z)| < \log^2 r'_\beta(0),$$

где семейство функций удовлетворяет условию теоремы 2. Тогда всевозможные композиции функций $h_{\beta,\gamma}$ плотны в классе $\mathcal{M}$.

Для доказательства достаточно взять новую параметризацию семейств r_β и h_β и применить теорему 3. $\square$

3. Доказательство теоремы 1

Воспользуемся интегральным представлением класса $\mathcal{P}$. Функция f принадлежит $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда существует положительная мера $\mu(t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $\int\limits_0^{2\pi} d\mu = 1$, такая, что

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1 - e^{it}w}{1 + e^{it}w} d\mu$$

(напр., [8], с. 22). $\mathcal{P}$ является выпуклым компактным подмножеством всех голоморфных в $\mathbb{U}$ функций. Так как крайними точками множества положительных мер μ являются меры с носителем в единственной точке, то функции $\frac{1-e^{it}w}{1+e^{it}w}$ являются крайними точками $\mathcal{P}$.

Предварительно докажем лемму.

Лемма 2. *Для любого решения уравнения Лёвнера-Куфарева* (3) *в круге* $|z| < 3 - \sqrt{8}$ *справедливо неравенство* $|w(z,t) - z| < Kt$, *где константа* K *не зависит от* $P(w,t)$.

Доказательство. Перепишем уравнение в интегральном виде

$$w(z,t) = z + \int_0^t w(z,t')P(w,t')dt'.$$

Применяя интегральное представление для функции из класса $\mathcal{P}$, получаем, что в круге $|z| < 3 - \sqrt{8}$ справедлива оценка $|P(z,t)| < K$. По лемме Шварца имеем $|w(z,t)| < z$, поэтому подинтегральное выражение не превосходит K. Таким образом, $|w(z,t) - z| < Kt$. $\square$

Доказательство теоремы 1. Необходимость. По условию существует функция $g_\alpha = r_{\beta_{1\alpha}}^{\gamma_{1\alpha}} \circ \dots \circ r_{\beta_{k\alpha}}^{\gamma_{k\alpha}}$ такая, что на окружности $|z| = \frac{1}{2}$ выполняется неравенство

$$|g_n(z) - p_\alpha| < t^2. \tag{9}$$

Не уменьшая общности, можно утверждать, что $g'_\alpha(0) = p'_\alpha(0)$. Справедливо равенство $g_n(z) = w(z, g'_n(0))$, где $w(z,t)$ удовлетворяет уравнению Лёвнера–Куфарева (3) с ядром, которое задается по формуле

$$P(w,t) = \begin{cases} P_{\beta_{k\alpha}}(e^{i\gamma}w, z), & 0 < t < t_{\beta_{k\alpha}}; \\ P_{\beta_{(k-1)\alpha}}(e^{i\gamma}w, z), & t_{\beta_{k\alpha}} < t < t_{\beta_{k\alpha}} + t_{\beta_{(k-1)\alpha}}; \\ \dots \\ P_{\beta_{1\alpha}}(e^{i\gamma}w, z), & t_{\beta_{k\alpha}} + \dots + t_{\beta_{2\alpha}} < t < t_{\beta_{k\alpha}} + \dots + t_{\beta_{2\alpha}} + t_{\beta_{1\alpha}}. \end{cases}$$

Рассмотрим последовательность функций p_{α_n}, $\lim\limits_{n\to\infty} p_{\alpha_n}(z) = z$, и каждой такой функции сопоставим функцию g_{α_n}. Так как справедливо неравенство (9),то можно утверждать, что на окружности $|z| = \frac{1}{2}$ справедлива оценка $|\log g_{\alpha_n}/s_{\alpha_n}| < Kt^2$. Следовательно, справедлива оценка

$$\left|\int_0^t \left(p(w,t) - \frac{1-w}{1+w}\right)dt\right| < Kt^2.$$

Используя лемму 2 и то, что для любого $\phi \in \mathcal{P}$ справедливо неравенство $|\phi(z) - \phi(w(z,t))| \leqslant \frac{|z-w(z,t)|}{(1-r)^2}$, где $r = \max\{|z|,|w|\}$ (напр., [8], с. 88), находим

$$\left|\frac{s_{\beta_{1\alpha_n}}(e^{i\gamma_{1\alpha_n}}z)t_{\beta_{1\alpha_n}} + \dots + s_{\beta_{k_n\alpha_n}}(e^{i\gamma_{k_n\alpha_n}}z)t_{\beta_{k_n\alpha_n}}}{t} - \frac{1-z}{1+z}\right| < Kt. \tag{10}$$

Так как $\sum\limits_{j=0}^{k_n} t_{\beta_{j_n\alpha_n}} = t$, то получаем, что на окружности $|z| < \frac{1}{2}$ выполняется неравенство $\left|\sum\limits_{j=0}^{k_n} \lambda_j s_{\beta_{j\alpha_n}}(e^{i\gamma_{j\alpha_n}}z) - \frac{1-z}{1+z}\right| < t$, где $\lambda_j = \frac{t_{\beta_{j\alpha_n}}}{t}$, $\sum\limits_{j=0}^{k_n} \lambda_j = 1$. Применяя принцип максимума, получаем, что неравенство (10) справедливо и в круге $|z| < \frac{1}{2}$. Учитывая, что $\frac{1-z}{1+z}$ — крайняя точка множества $\mathcal{P}$, получаем, что должна существовать последовательность $s_{\beta_{j\alpha_n}}(e^{i\gamma_{j\alpha_n}}z)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} s_{\beta_{j\alpha_n}}(e^{i\gamma_{j\alpha_n}}z) = \frac{1-z}{1+z}$. Переходя, если надо, к подпоследовательности, можем утверждать, что $\lim\limits_{n\to+\infty} s_{\beta_{j\alpha_n}}(z) = \frac{1-e^{i\gamma}z}{1+e^{i\gamma}z}$ для некоторого $\gamma \in \mathbb{R}$. Так как p_{α_n} стремится к тождественному отображению, то соответствующая последовательность r_β^γ сходится к тождественному отображению. Необходимость доказана.

Достаточность. Рассмотрим последовательность функций r_{β_n}, удовлетворяющую условию теоремы, и пусть p_{α_n} удовлетворяет условию $p'_{\alpha_n}(0) = r'_{\beta_n}(0)$. Оценим модуль разности $|r_{\beta_n}(z) - p_{\alpha_n}(z)|$ в круге $|z| < 3 - \sqrt{8}$. Для этого оценим $|\log r_{\beta_n}(z)/p_{\alpha_n}(z)|$ в круге $|z| < 3 - \sqrt{8}$. Имеем

$$\left|\log \frac{r_{\beta_n}(z)}{p_{\alpha_n}(z)}\right| = \int_0^{t_\beta} \left(P_\beta(w(z,t),t) - \frac{1-e^{i\gamma}p_t(z)}{1+e^{i\gamma}p_t(z)}\right)dt.$$

Так как по лемме 2 справедлива оценка $|z - w(z,t)| < Kt$, то интеграл можно переписать в виде

$$\int_0^{t_\beta} \left(P_\beta(z,t) - \frac{1-e^{i\gamma}z}{1+e^{i\gamma}z} + o(1)\right)dt = \int_0^{t_\beta} P_\beta(z,t)dt - t\frac{1-e^{i\gamma}z}{1+e^{i\gamma}z} + o(t_\beta) =$$
$$= t_\beta\left(\frac{1}{t_\beta}\int_0^{t_\beta} P_\beta(z,t)dt - \frac{1-e^{i\gamma}z}{1+e^{i\gamma}z}\right) + o(t_\beta).$$

Согласно условию теоремы это означает, что $\left|\log \frac{f_n(z)}{p_{\alpha_n}(z)}\right| = o(t_\beta)$ или же $|f_n(z) - p_{\alpha_n}(z)| = o(t)$. Из теоремы 3 следует требуемый результат. □

4. Представление отображения на гиперболически выпуклый треугольник

Результат работы [1] о представлении функций, отображающих $\mathbb{U}$ на гиперболически выпуклые треугольники, обобщает

Теорема 4. *Отображение f единичного круга на гиперболически выпуклый треугольник представимо в виде $f = T_1 \circ \exp \circ T_2 \circ \cdots \circ k_{\alpha_n}^{\gamma_n} \circ \cdots \circ k_{\alpha_1}^{\gamma_1}$, где T_1 и T_2 — дробно-линейные отображения.*

Доказательство. Пусть вершина треугольника находится в точке $z_1 \in \mathbb{U}$ и угол при этой вершине равен α. Рассмотрим бесконечнолистную риманову поверхность $\mathcal{Q}$ с точкой ветвления в z_1 и накрывающую $\mathbb{U}$. Это риманова поверхность функции $T_1 \circ \exp \circ T_2$, где T_2 — дробно-линейное отображение $\mathbb{U}$ на полуплоскость $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$, а T_1 — автоморфизм $\mathbb{U}$ такой, что $T_1(0) = z_1$.

Продолжим f через одну из сторон треугольника, ортогональную единичной окружности, получим функцию f_1, отображающую $\mathbb{U}$ на треугольник, лежащий на $\mathcal{Q}$, с углом 2α при вершине в точке z_1. Тогда $f = f_1 \circ g$, где функция g отображает $\overline{\mathbb{C}}$ с разрезом по дуге единичной окружности на $\mathbb{U}$. Подсчет показывает, что такой функцией является $k_{\alpha_1}^{\gamma_1}$ при определенном выборе α_1 и γ_1.

Совершая по очередности продолжения через стороны, получаем последовательность отображений f_n. По теореме Каратеодори, она сходится к функции, отображающей $\mathbb{U}$ на Q. Но, с другой стороны, $f_{n-1} = f_n \circ k_{\alpha_n}^{\gamma_n}$ и, следовательно, $f = T_1 \circ \exp \circ T_2 \circ \cdots \circ k_{\alpha_n}^{\gamma_n} \circ \cdots \circ k_{\alpha_1}^{\gamma_1}$. $\square$

Литература

1. Michalska M., Prokhorov D.V., Szynal J. *The compositions of hyperbolic triangle mappings* // Compl. Var. Theory Appl. – 2000. – V. 43. – P. 179–186.
2. Mejia D., Pommerenke Ch. *Hyperbolically convex function, dimension and capacity* // Preprint of Technische Universität. – Berlin, 2000.
3. Кузнецов А.А. Гуменюк П.А. *Представление аналитических функций в виде бесконечных композиций* // Материалы XXXVIII международной научной студенческой конференции “Студент и научно-технический прогресс”. Математика. Часть 1. Новосибирск, 2000. – С. 38.
4. Горяйнов В.В. *О сходимости однопараметрических семейств аналитических функций* // Вопросы метрической теории отображений и ее применение. Киев: Наукова думка, 1978. – С. 13–24.
5. Куфарев П.П. *Одно замечание об интегралах уравнения Лёвнера* // ДАН СССР. – 1947. – Т. 57. – № 7. – С. 655–656.
6. Гутлянский В. Я. *Параметрическое представление однолистных функций* // ДАН СССР. – 1970. – Т. 194. – № 4. – С. 750–753.
7. Голузин Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* – М.: Наука, 1966. – 628 с.
8. Duren P.L. *Univalent functions.* – Springer-Verlag, 1983. – 382 p.

Саратовский государственный университет
имени Н.Г. Чернышевского

Поступила
25.03.2002