Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2010, №11, с. 22–30 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421000123\0100*

А.Ю. КУЛИКОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНОГО НЕАВТОНОМНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

Аннотация. Получены неулучшаемые достаточные признаки устойчивости для неавтономного разностного уравнения с несколькими переменными ограниченными запаздываниями. Эти признаки выражены через параметры исходного уравнения.

Ключевые слова: разностные уравнения с запаздываниями, условия устойчивости.

УДК: 517.929

Abstract. We obtain exact sufficient stability conditions for a linear nonautonomous difference equation with several bounded delays. These conditions are written in terms of parameters of the initial equation.

Keywords: difference equations with delays, stability conditions.

В работе [1] для уравнения

$$x(n+1) - x(n) = -a(n)x(n-h(n)) \tag{$*$}$$

получены следующие признаки устойчивости решений.

Теорема 1. *Пусть* $a(n) \geq 0$, $0 \leq h(n) \leq H$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a(n) = \infty$ *и* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sum\limits_{i=n-h(n)}^{n} a(i) < \frac{3}{2} + \frac{1}{2H+2}$. *Тогда уравнение* $(*)$ *асимптотически устойчиво.*

Теорема 2. *Пусть* $a(n) \geq 0$, $0 \leq h(n) \leq H$ *и* $\sup\limits_{n} \sum\limits_{i=n-h(n)}^{n} a(i) \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{2H+2}$. *Тогда уравнение* $(*)$ *равномерно устойчиво.*

Автором [1] не ставился вопрос о точности (неулучшаемости) признаков устойчивости, полученных в теоремах 1 и 2. Этот вопрос был исследован в [2], где показано следующее: в теореме 1 нельзя заменить строгое неравенство $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sum\limits_{i=n-h(n)}^{n} a(i) < \frac{3}{2} + \frac{1}{2H+2}$ нестрогим; в теореме 2 в неравенстве $\sup\limits_{n} \sum\limits_{i=n-h(n)}^{n} a(i) \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{2H+2}$ постоянную $\frac{3}{2} + \frac{1}{2H+2}$ нельзя увеличить, более того, нельзя заменить точную верхнюю грань верхним пределом.

В данной работе 1) результаты [1] обобщаются на уравнение с несколькими переменными запаздываниями с сохранением тех же неулучшаемых оценок варианты $\sum\limits_{i=n-h(n)}^{n} a(i)$;

Поступила 10.03.2009

2) получены оценки скорости сходимости решения к нулю в случае асимптотической устойчивости.

1. Фундаментальное решение

Рассмотрим разностное уравнение

$$x(n+1)-x(n)=-\sum_{k=0}^{K}a_k(n)x(n-h_k(n)),\quad n,m\in\mathbb{N}_0,\quad n\geq m,\tag{1}$$

где $\mathbb{N}_0=0,1,2,\dots$, $a_k:\mathbb{N}_0\to\mathbb{R}$, $h_k:\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0$. Мы считаем запаздывания $h_k(n)$ ограниченными, т. е. найдется $H\in\mathbb{N}_0$ такое, что $h_k(n)\leq H$ для любого $k=0,1,\dots,K$. Для удобства введем функции $a(n)=\sum\limits_{k=0}^{K}a_k(n)$, $h(n)=\max\limits_k h_k(n)$ и доопределим $a(n)\equiv 0$ при $n<0$. Условимся, что $\sum\limits_{i=n}^{m}=0$ при $m<n$.

Введем функцию двух переменных $X(n,m)$, которая при каждом фиксированном $m\in\mathbb{N}_0$ является решением разностного уравнения

$$X(n+1,m)-X(n,m)=-\sum_{k=0}^{K}a_k(n)X(n-h_k(n),m),\quad n\geq m,$$

с начальными условиями $X(m,m)=1$, $X(n,m)=0$, $n<m$. Как и в [3], будем называть $X(n,m)$ *фундаментальным решением* уравнения (1).

Как показано в [3], решение уравнения (1) с произвольными начальными условиями $x(i)=\varphi(i)$, $m-H\leq i\leq m$ представляется в виде

$$x(n)=X(n,m)\varphi(m)-\sum_{i=m}^{n-1}X(n,i+1)\sum_{k=0}^{K}a_k(i)\varphi^*(i-h_k(i)),\tag{2}$$

где $\varphi^*(j)=\varphi(j)$ при $j<m$ и $\varphi^*(j)=0$ при $j\geq m$.

Учитывая ограниченность запаздывания, в силу формулы (2) имеем

$$|x(n)|\leq\delta\,|X(n,m)|+\|a\|\delta\left|\sum_{i=m}^{m+H-1}X(n,i+1)\right|\leq M\delta\left|\sum_{i=m}^{m+H}X(n,i)\right|,$$

где $\|a\|=\sup\limits_n|a(n)|$, $M=\max(\|a\|,1)$, $\delta=\max\limits_{m-H\leq i\leq m}|\varphi(i)|$.

В силу этого неравенства и ограниченности $a_k(n)$ любой признак устойчивости уравнения (1) оказывается связанным с некоторым свойством фундаментального решения. Так, равномерная устойчивость следует из равномерной ограниченности

$$|X(n,m)|\leq N.\tag{3}$$

Из существования предела $\lim\limits_{n\to\infty}X(n,m)=0$ при каждом фиксированном m следует асимптотическая устойчивость, а если стремление к нулю происходит равномерно по m — равномерная асимптотическая устойчивость.

Таким образом, оказывается возможным получать достаточные признаки устойчивости на основе соответствующих оценок фундаментального решения.

Независимость от начальной функции и учет начальной точки как второго аргумента делает фундаментальное решение удобным объектом изучения. В данной работе через оценки фундаментального решения уравнения (1) устанавливается, каким образом параметры уравнения определяют асимптотическое поведение решений.

2. Основные результаты

В этом разделе мы получим две теоремы об оценках фундаментального решения уравнения (1), которые являются центральным результатом работы.

Теорема 3. *Пусть* $a(n) \geq 0$, $0 \leq h(n) \leq H$ *и* $\sup_n \sum_{i=n-h(n)}^{n} a(i) \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{2H+2}$. *Тогда для фундаментального решения* $X(n,m)$ *уравнения* (1) *справедлива оценка* (3).

Теорема 4. *Пусть* $a(n) \geq 0$, $0 \leq h(n) \leq H$ *и* $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i=n-h(n)}^{n} a(i) < \frac{3}{2} + \frac{1}{2H+2}$. *Тогда найдутся такие* $N, \gamma > 0$, *что для фундаментального решения* $X(n,m)$ *уравнения* (1) *справедлива оценка*

$$|X(n,m)| \leq N \exp\left(-\gamma \sum_{i=m}^{n-1} a(i)\right), \quad n \geq m \geq 0. \tag{4}$$

Определим несколько свойств функций дискретного аргумента.

Определение. Функция $y : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ *меняет знак в точке* n, если $y(n) \leq 0$, а $y(n+1) \geq 0$ или $y(n) \geq 0$, а $y(n+1) \leq 0$. Функция $y : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ *сохраняет знак в точке* n, если $y(n) < 0$ и $y(n+1) < 0$ или $y(n) > 0$ и $y(n+1) > 0$. Функция $y : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ *не возрастает в точке* n, если $y(n) \geq y(n+1)$.

Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$y(n+1) - y(n) = -\alpha(n) y(n - g(n)), \quad n \geq -1, \tag{5}$$

с начальным условием $y(-1) = 1$, где $\alpha : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_+$, $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $g(n) \leq H$ при $n \geq H$ и $g(n) = n+1$ при $n < H$.

Обозначим $P = \max\left\{1, \max_{0 \leq n \leq 2H} \sum_{i=n-g(n)}^{n} \alpha(i)\right\}$.

Лемма 1. *Пусть* $b_i \geq 0$ *при всех* $i = 1, \ldots, H$. *Тогда*

$$\sum_{i=1}^{H} b_i - \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{H} b_i\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{H} b_i^2\right) \leq \frac{H}{2(H+1)}. \tag{6}$$

Доказательство. При фиксированном $D = \sum_{i=1}^{H} b_i$ сумма $\sum_{i=1}^{H} b_i^2$ достигает минимума, если $b_i = \frac{D}{H}$ для всех i. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{H} b_i - \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{H} b_i\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{H} b_i^2\right) \leq D - \frac{D^2}{2} - \frac{D^2}{2H} \leq \frac{H}{2(H+1)}. \qquad \square$$

Лемма 2. *Пусть решение уравнения* (5) *не возрастает в точках* $-1 \leq n \leq 2H$ *и меняет знак в точке* H. *Тогда*

$$y(2H+1) \geq 1 - P - \frac{H}{2(H+1)}. \tag{7}$$

Доказательство. Для каждого $q \leq H$ ($q \in \mathbb{N}_0$) найдем точку $n_q = \max_{n-g(n) \leq q} n$. Легко видеть, что $H - 1 \leq n_q \leq 2H$.

Положим $c_j = \sum\limits_{n-g(n)=j} \alpha(n)$. Заметим, что $\sum\limits_{i=H}^{n_q} \alpha(i) \geq \sum\limits_{0\leq n-g(n)\leq q} \alpha(n) = \sum\limits_{j=0}^{q} c_j$. Учитывая равенство $\sum\limits_{i=q}^{H-1} \alpha(i) = y(q) - y(H)$, получаем

$$P \geq \sum_{i=n_q-g(n_q)}^{n_q} \alpha(i) \geq \sum_{i=q}^{n_q} \alpha(i) = \sum_{i=q}^{H-1} \alpha(i) + \sum_{i=H}^{n_q} \alpha(i) \geq y(q) - y(H) + \sum_{j=0}^{q} c_j.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=0}^{q} c_j \leq P + y(H) - y(q). \tag{8}$$

Оценим $y(2H+1)$

$$y(2H+1) = y(H) - \sum_{n=H}^{2H} \alpha(n) y(n-g(n)) = y(H) - \sum_{i=0}^{2H} c_i y(i) \geq$$

$$\geq y(H) - \sum_{i=0}^{H} c_i y(i) = y(H) - y(H)\sum_{i=0}^{H} c_i - \sum_{i=1}^{H}\left[(y(i-1)-y(i))\sum_{j=0}^{i-1} c_j\right].$$

Положим $b_i = y(i-1) - y(i)$. Заметим, что выполнены равенства $y(H) = 1 - b_0 - \sum\limits_{i=1}^{H} b_i$ и $y_{i-1} - y(H) = \sum\limits_{j=i}^{H} b_j$. Теперь, используя (8) и (6), получаем

$$y(2H+1) \geq y(H) - y(H)P - \sum_{i=1}^{H} b_i(P + y(H) - y(i-1)) =$$

$$= \left(1 - b_0 - \sum_{i=1}^{H} b_i\right) - P\left(y(H) + \sum_{i=1}^{H} b_i\right) + \sum_{i=1}^{H} b_i \sum_{j=i}^{H} b_j =$$

$$= 1 - b_0 - P + Pb_0 - \sum_{i=1}^{H} b_i + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{H} b_i\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{H} b_i^2 \geq 1 - P - \frac{H}{2(H+1)}. \qquad \square$$

Обозначим $Q_\nu = \sup\limits_{n\geq\nu-3H} \sum\limits_{i=n-h(n)}^{n} a(i)$, $L_\nu = \max\{Q_\nu, \frac{3}{2}\} + \frac{H}{2H+2} - 1$, $\nu \in \mathbb{N}_0$.

Лемма 3. *Пусть* $Q_\nu \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{2(H+2)}$ *и найдется точка* $n_* \geq \nu$ *такая, что решение* $x(n)$ *уравнения* (1) *удовлетворяет следующим требованиям*:

1) $|x(n)| \leq N$, $n_* - 3H \leq n \leq n_*$;

2) *выполнено одно из условий*: а) $|x(n_*)| \leq NL_\nu$; б) *решение меняет знак в точке* n_*.

Тогда $|x(n)| \leq NL_\nu$ *при* $n > n_*$.

Доказательство. В силу линейности уравнения (1) можно считать, что $N = 1$. Наши рассуждения не будут зависеть от значения ν, поэтому в доказательстве будем обозначать $Q = Q_\nu$, $L = L_\nu$. Заметим, что $L \leq 1$.

Допустим, что утверждение леммы неверно, тогда существует точка $\mu > n_*$ такая, что $|x(\mu)| > L$, причем $|x(n)| \leq L \leq 1$ при $n_* < n < \mu$. Дальнейшие рассуждения проведем, предполагая, что $x(\mu) < -L$ (случай $x(\mu) > L$ рассматривается аналогично).

Найдем такую точку $n_0 < \mu$, в которой решение меняет знак, что решение сохраняет знак во всех точках $n_0 < n < \mu$. Это значит, что $x(n_0) \geq 0$, а при $n_0 < n \leq \mu$ выполнено неравенство $x(n) \leq 0$.

Заметим, что $n_0 \geq \mu - H - 1$. Действительно, если мы предположим, что $\mu - 1 - H > n_0$, то при всех $k = 1, \ldots, K$ выполнено неравенство $\mu - 1 - h_k(\mu - 1) > n_0$. Тогда при всех $k = 1, \ldots, K$ имеем $x(\mu - 1 - h_k(\mu - 1)) \leq 0$. Отсюда следует оценка $x(\mu) = x(\mu - 1) - \sum\limits_{k=1}^{K} a_k(\mu - 1)x(\mu - 1 - h_k(\mu - 1)) \geq x(\mu - 1) \geq -L$, которая противоречит предположению $x(\mu) < -L$.

Обозначим $n_1 = n_0 - H$. Построим множества $\{\xi_{-1}, \xi_0, \ldots, \xi_{2H+1}\}$ и $\{\eta_{-1}, \eta_0, \ldots, \eta_{2H}\}$ по следующему правилу:

$\xi_{-1} = 1$,

$\xi_i = \max\limits_{n_1+i \leq n \leq \mu} x(n)$ при $0 \leq i < \mu - n_1$,

$\xi_i = x(\mu)$ при $\mu - n_1 \leq i \leq 2H + 1$,

$\eta_i = i + 1$ при $-1 \leq i < H$,

$\eta_i = h(n_1 + i)$ при $H \leq i \leq 2H$.

Построенные нами множества обладают свойствами.

Свойство 1. $\xi_{-1} \geq \xi_0 \geq \cdots \geq \xi_H \geq 0 \geq \xi_{H+1} \geq \cdots \geq \xi_{2H+1}$.

Свойство 2. При всех $0 \leq i \leq 2H$ из неравенства $0 < \xi_i - \xi_{i+1}$ следуют неравенства $\xi_i - \xi_{i+1} \leq x(n_1 + i) - x(n_1 + i + 1)$ и $i < \mu - n_1$.

Теперь рассмотрим уравнение (5) и зададим при $-1 \leq i \leq 2H$ коэффициенты и запаздывания в виде

$$g(i) = \eta_i, \quad \alpha(i) = \begin{cases} (\xi_i - \xi_{i+1})/\xi_{i-\eta_i} & \text{при } \xi_i - \xi_{i+1} > 0; \\ 0 & \text{при } \xi_i - \xi_{i+1} = 0. \end{cases}$$

Вычисляя последовательно $y(0), y(1), \ldots, y(2H+1)$, получаем $y(i) = \xi_i$ при всех $-1 \leq i \leq 2H + 1$. В силу свойства 1 построенное нами уравнение удовлетворяет условиям леммы 2 и, следовательно, выполнено неравенство (7).

Чтобы завершить доказательство, нам нужно оценить значение P. Покажем вначале, что при всех $0 \leq i \leq 2H$ выполнено неравенство

$$\alpha(i) \leq a(n_1 + i). \tag{9}$$

Если $\alpha(i) = 0$, то оно, очевидно, выполнено. Пусть $\alpha(i) > 0$. Заметим, что $n_1 - H \geq \mu - 3H - 1 \geq n_* - 3H$. Значит, $|x(n)| \leq 1$ при $n_1 - H \leq n < \mu$ и, следовательно, $|x(n_1 + i - h_k(n_1 + i))| \leq 1$ при всех $0 \leq i < \mu - n_1$.

Используя свойство 2, при $0 \leq i < H$ получаем

$$\alpha(i) = \frac{\xi_i - \xi_{i+1}}{\xi_{i-\eta_i}} \leq \frac{x(n_1 + i) - x(n_1 + i + 1)}{\xi_{-1}} = \\ = \sum_{k=1}^{K} a_k(n_1 + i)x(n_1 + i - h_k(n_1 + i)) \leq a(n_1 + i);$$

при $H \leq i \leq 2H$ —

$$\alpha(i) = \frac{\xi_i - \xi_{i+1}}{\xi_{i-\eta_i}} \leq \frac{x(n_1 + i) - x(n_1 + i + 1)}{\xi_{i-\eta_i}} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{K} a_k(n_1 + i)x(n_1 + i - h_k(n_1 + i))}{\xi_{i-\eta_i}} \leq$$

$$\le a(n_1+i)\frac{\max\limits_{n_1+i-h(n_1+i)\le n\le n_1+i} x(n)}{\xi_{i-\eta_i}} \le a(n_1+i)\frac{\max\limits_{n_1+i-\eta_i\le n\le \mu} x(n)}{\xi_{i-\eta_i}} = a(n_1+i).$$

Итак, неравенство (9) доказано. Теперь оценим значение P.

Если $-1 \le i < H$, то $\alpha_i = \frac{\xi_i-\xi_{i+1}}{\xi_{-1}} = \xi_i - \xi_{i+1}$. Получаем $\sum\limits_{j=i-g(i)}^{i} \alpha(j) \le \sum\limits_{j=-1}^{H-1} \alpha(j) = 1-\xi_H \le 1 < \frac{3}{2}$.

Если $H \le i \le 2H$, то, вспомнив, что $g(i) = \eta_i = h(n_1+i)$, и используя (9), получаем $\sum\limits_{j=i-g(i)}^{i} \alpha(j) \le \sum\limits_{l=n_1+i-h(n_1+i)}^{n_1+i} a(l) \le Q$.

Таким образом, $P \le \max\{Q, \frac{3}{2}\}$. Теперь из неравенства (7) следует $y(2H+1) \ge 1 - \max\{Q, \frac{3}{2}\} - \frac{H}{2(H+1)} = -L$. С другой стороны, $y(2H+1) = \xi_{2H+1} = x(\mu) < -L$. Полученное противоречие доказывает лемму. □

Доказательство теоремы 3. В условиях теоремы имеем $Q_0 \le \frac{3}{2} + \frac{1}{2(H+2)}$. Положим $N = \frac{1}{L_0}$. Тогда для фундаментального решения уравнения (1) справедливы оценки

1) $0 = X(n,m) \le N$, если $m - 3H \le n < m$;

2) $1 = X(m,m) \le NL_0$.

В силу леммы 3 отсюда $|X(n,m)| \le NL_0 = 1$ при всех $n \ge m$, а значит, и вообще при всех n и m, $n \ge m \ge 0$. □

Доказательство теоремы 4. По условию теоремы $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sum\limits_{i=n-h(n)}^{n} a(i) < \frac{3}{2} + \frac{1}{2H+2}$, поэтому существует $\nu \in \mathbb{N}_0$ такое, что $Q_\nu < \frac{3}{2} + \frac{1}{2H+2}$. Заметим, что $L_\nu < 1$. Кроме того, $L_\nu \ge \frac{1}{2}$, откуда следует оценка

$$L_\nu^q \le 2L_\nu^{q+1}. \tag{10}$$

Рассмотрим некоторую точку $m \ge \nu$. Положим $n_{-1} = m - 8(H+1)$, $n_0 = m$, далее зафиксируем точки n_q, $q = 1, 2, \ldots$, такие, что $\sum\limits_{i=m}^{n_q} a(i) \ge 8q(H+1)$, а $\sum\limits_{i=m}^{n_q-1} a(i) < 8q(H+1)$.

Каково бы ни было H, при $n \ge m - 3H$ имеем $a(n) \le Q_\nu < 2$. Учитывая это и правила построения точек n_q, получаем неравенства

$$\sum_{i=m}^{n_q} a(i) = \sum_{i=m}^{n_q-1} a(i) + a(n_q) < 8q(H+1) + 2,$$

$$\sum_{i=m}^{n_{q+1}} a(i) - \sum_{i=m}^{n_q} a(i) = \sum_{i=n_q+1}^{n_{q+1}} a(i) < 2(n_{q+1} - n_q),$$

$$\sum_{i=n_q+1}^{n_{q+1}} a(i) = \sum_{i=m}^{n_{q+1}} a(i) - \sum_{i=m}^{n_q} a(i) > 8(H+1)(q+1) - (8(H+1)q + 2) \ge 8H + 6.$$

Отсюда имеем

$$n_{q+1} > n_q + 4H + 3, \tag{11}$$

$$\sum_{i=n_q+4H}^{n_{q+1}-1} a(i) = \sum_{i=n_q+1}^{n_{q+1}} a(i) - a(n_{q+1}) - \sum_{i=n_q+1}^{n_q+4H-1} a(i) > 8H + 6 - 2 - 8H > 2. \tag{12}$$

Построим множество отрезков $r_q = \{n : n_{q-1} \le n \le n_q\}$, $q = 0, 1, 2, \dots$. Отметим, что множество $\{r_q\}$ является конечным, если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a(n)$ сходится, или бесконечным в противном случае, однако наши дальнейшие рассуждения от этого не зависят.

Пусть $x(n)$ — некоторое решение уравнения (1) и $S > 0$ таково, что $|x(n)| \le SL_\nu^q$ при $n \in r_q$. Покажем, что тогда при $n \in r_{q+1}$ выполнено неравенство

$$|x(n)| \le SL_\nu^{q+1}. \tag{13}$$

Для этого достаточно доказать, что найдется точка n_*, $n_q + 3H \le n_* \le n_{q+1}$, в которой выполнено неравенство (13). Тогда в силу леммы 3 неравенство (13) будет выполнено при всех $n \ge n_*$, а следовательно, и при $n \in r_{q+1}$.

Предположим противное, т. е. пусть $M = \min\limits_{n_q+3H \le n \le n_{q+1}} |x(n)| > SL_\nu^{q+1}$, тогда в силу леммы 3 решение не может менять знак ни в какой точке n такой, что $n_q + 3H \le n < n_{q+1}$. Пусть без ограничения общности $M > SL_\nu^{q+1} > 0$, тогда $x(n - h_k(n)) > SL_\nu^{q+1}$ для всех n таких, что $n_q + 4H \le n < n_{q+1}$. Отсюда при $n_q + 4H \le n < n_{q+1}$ имеем неравенство

$$x(n) - x(n+1) = \sum_{k=1}^{K} a_k(n) x(n - h_k(n)) > a(n) SL_\nu^{q+1}.$$

Учитывая (12) и (10), получаем

$$x(n_{q+1}) < x(n_q + 4H) - \sum_{i=n_q+4H}^{n_{q+1}-1} a(i) SL_\nu^{q+1} < SL_\nu^q - 2SL_\nu^{q+1} \le 0.$$

С другой стороны, $x(n_{q+1}) \ge M > 0$. Получено противоречие, и оценка (13) доказана.

Если $x(n) \le S$ при $n \in r_0$, то для любого $n \in r_q$ в силу (13) имеем

$$x(n) \le SL_\nu^q = S\exp(-\alpha q) < S\exp\left(-\alpha \frac{1}{8(H+1)} \sum_{i=m}^{n_q-1} a(i)\right) \le S\exp\left(-\gamma \sum_{i=m}^{n-1} a(i)\right),$$

где $\alpha = -\ln(L_\nu) > 0$, $\gamma = \frac{\alpha}{8(H+1)} > 0$.

Теперь оценим фундаментальное решение уравнения (1).

Если $m < \nu$, то возьмем $r_0 = \{n : \nu - 8(H+1) < n \le \nu\}$. Найдем $S = \max\limits_{m<\nu}(\max\limits_{m \le n < \nu} |X(n,m)|)$. Очевидно, $|X(n,m)| \le S$ при $n \in r_0$. Следовательно, $|X(n,m)| \le S$ при $n < \nu$ и $|X(n,m)| \le S\exp\left(-\gamma \sum\limits_{i=\nu}^{n-1} a(i)\right)$ при $n \ge \nu$.

Полагая $N = S\exp\left(\gamma \sum\limits_{i=0}^{\nu-1} a(i)\right)$, получаем, что для функции $X(n,m)$ справедлива оценка (4).

Если $m \ge \nu$, то положим $r_0 = \{n : m - 8(H+1) < n \le m\}$. Тогда $|X(n,m)| \le 1$ при $n \in r_0$, следовательно, и в этом случае для функции $X(n,m)$ имеет место (4). □

3. Асимптотическое поведение решения

Теорема 4 дает оценку (4) фундаментального решения уравнения (1). Ниже мы покажем, как конкретные свойства параметров уравнения (1) используются в сочетании с этой оценкой для описания асимптотики решения.

Если ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a(i)$ сходится, то уравнение (1) является равномерно устойчивым. Более того, как показано в [4], в этом случае любое решение уравнения (1) стремится к некоторому конечному (не обязательно нулевому) пределу.

Предположение о расходимости ряда приводит к результату.

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 4 и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a(n) = \infty$. Тогда уравнение (1) асимптотически устойчиво.

При $K = 1$ следствие 1 совпадает с теоремой 1.

Покажем на примерах, как ограничения на коэффициенты уравнения (1) позволяют указать скорость стремления к нулю его решений.

Следствие 2. Пусть выполнены условия теоремы 4 и $\varliminf\limits_{l\to\infty} \frac{1}{l} \sum\limits_{i=n}^{n+l} a(i) > 0$. Тогда при некоторых $N > 0$ и $q \in (0,1)$ для любого решения уравнения (1) справедлива оценка $|x(n)| \leq Nq^n$, т. е. уравнение (1) экспоненциально устойчиво.

Пример 1. Пусть $p \geq 2$ — некоторое фиксированное натуральное число. Определим параметры уравнения (1) следующим образом: при $n = p^s - 1$, $s = 0, 1, \ldots$, положим $a(n) = a$, при $n \neq p^s - 1$ положим $a(n) = 0$; $h(n) = H > 0$.

Если $0 < a < \frac{3}{2} + \frac{1}{2H+2}$, то условия теоремы 4 выполнены. Оценка (4) в этом случае показывает, что любое решение уравнения (1) стремится к нулю не медленнее, чем степенная функция: $|x(n)| \leq N(n+1)^{-\alpha}$ $(N, \alpha > 0)$.

4. Сравнение с известными признаками

Авторы приведенных ниже работ интересовались только признаками асимптотической устойчивости, поэтому сравнивать их результаты можно только со следствием 1. В работах [5] и [6] получены признаки устойчивости, константа в которых совпадает с константой из теоремы 1 и неулучшаема, однако авторы накладывали дополнительные ограничения на вид запаздывания, которые были сняты в [1]. Только в [7] рассматривалось уравнение с несколькими запаздываниями, во всех других работах рассматривалось уравнение (1) в предположении $K = 1$, т. е. уравнение $(*)$.

Признак 1 ([7])**.** Пусть при всех $k = 0, 1, \ldots, K$ $\;a_k(n) \geq 0, h_k(n) \geq 1$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} h_k(n) < \infty$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a(n) = \infty$ и $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=n-h(n)}^{n-1} a(i) < 1$. Тогда уравнение (1) асимптотически устойчиво.

Признак 2 ([8])**.** Пусть $h(n) \equiv H \geq 1$, $a(n) \geq 0$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a(n) = \infty$ и $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=n-2H}^{n-1} a(i) < \frac{7}{4}$. Тогда уравнение $(*)$ асимптотически устойчиво.

Признак 3 ([9])**.** Пусть $h(n) \equiv H \geq 1$, $a(n) \geq 0$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a(n) = \infty$ и $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=n-2H}^{n} a(i) < 2$. Тогда уравнение $(*)$ асимптотически устойчиво.

Признаки 1, 2, 3 и следствие 1 различаются выбором пределов суммирования в варианте $\sum a(i)$. Это приводит к тому, что они имеют разные области применения. Примеры, показывающие, что признак 1 имеет со следствием 1 разные области применения, приведен в работе [4]. Здесь мы приведем аналогичные примеры для признаков 2, 3 и следствия 1.

Пример 2. Пусть в уравнении $(*)$ $h(n) \equiv h \geq 2$, $a(0) = \frac{7}{4} - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, $a(n) = 0$ при $n = 1, \ldots, 2h$ и $a(n + 2h + 1) = a(n)$.

Так как $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sum\limits_{i=n-2h}^{n} a(i) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sum\limits_{i=n-2h}^{n-1} a(i) = \sum\limits_{i=0}^{2h} a(i) = \frac{7}{4} - \varepsilon$, то в силу любого из признаков 2 или 3 уравнение $(*)$ асимптотически устойчиво. С другой стороны, $\frac{3}{2} + \frac{1}{2H+2} \leq \frac{5}{3}$. Выбрав $\varepsilon < \frac{1}{12}$, получим $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sum\limits_{i=n-h}^{n} a(i) = \frac{7}{4} - \varepsilon > \frac{5}{3}$. Таким образом, следствие 1 не применимо.

Пример 3. Пусть в уравнении $(*)$ $h(n) \equiv h \geq 1$, $a(0) = \frac{3}{2}$, $a(n) = 0$ при $n = 1, \ldots, h$ и $a(n + h + 1) = a(n)$.

Условия следствия 1 выполнены, значит, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sum\limits_{i=n-h}^{n} a(i) = \frac{3}{2} < \frac{3}{2} + \frac{1}{2H+2}$. Таким образом, уравнение $(*)$ асимптотически устойчиво. С другой стороны, легко видеть, что
$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sum\limits_{i=n-2h}^{n} a(i) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sum\limits_{i=n-2h}^{n-1} a(i) = 3$, следовательно, признаки 2 и 3 не применимы.

Литература

[1] Yu J.-S. *Asymptotic stability for a linear difference equation with variable delay*, Comput. Math. Appl. **36** (10–12), 203–210 (1998).

[2] Malygina V.V., Kulikov A.Y. *On precision of constants in some theorems on stability of difference equations*, Funct. Differ. Equ. **15** (3–4), 239–248 (2008).

[3] Berezansky L., Braverman E. *On existence of positive solutions for linear difference equations with several delays*, Adv. Dyn. Syst. Appl. **1** (1), 29–47 (2006).

[4] Куликов А.Ю., Малыгина В.В. *Об устойчивости неавтономных разностных уравнений с несколькими запаздываниями*, Изв. вузов. Математика, №3, 18–26 (2008).

[5] Erbe L.H., Xia H. *Global stability of a linear nonautonomous delay difference equation*, J. Differ. Equ. Appl. **1** (2), 151–161 (1995).

[6] Zhang B.G., Tian C.J., Wong P.J.Y. *Global attractivity of difference equation with variable delay*, Dynam. Contin. Discrete Impuls. Syst. **6** (3), 307–317 (1999).

[7] Berezansky L., Braverman E. *On Bohl–Perron type theorems for difference equations*, Funct. Differ. Equ. **11** (1–2), 19–29 (2004).

[8] Kovácsvölgyi I. *The asymptotic stability of difference equations*, Appl. Math. Lett. **13** (1), 1–6 (2000).

[9] Yu J.-S., Cheng S.-S. *A stability criterion for a neutral difference equation with delay*, Appl. Math. Lett. **7** (6), 75–80 (1994).

А.Ю. Куликов

аспирант, кафедра вычислительной математики и механики,
Пермский государственный технический университет,
Комсомольский просп., д. 29а, г. Пермь, 614000,

e-mail: stphn@mail.ru

A.Yu. Kulikov

Postgraduate, Chair of Computational Mathematics and Mechanics,
Perm State Technical University,
29a Komsomol'skii Ave., Perm, 614000 Russia,

e-mail: stphn@mail.ru