ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 8 (495)

УДК 517.982

*Ю.Г. БОРИСОВИЧ, А.А. ДЕМЧЕНКО*

# О ПОСТРОЕНИИ ТЕОРИИ СТЕПЕНИ ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫХ И ФРЕДГОЛЬМОВЫХ СЕЧЕНИЙ БАНАХОВЫХ ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЙ

Одной из важнейших задач анализа является задача исследования топологических характеристик особых точек различных классов отображений. Основным методом исследования является теория степени отображений. В последнее время возрос интерес к таким видам отображений, как сечения векторных расслоений. Также в приложениях часто используется класс фредгольмовых линейных и нелинейных операторов. В связи с этим возникла идея построения теории степени фредгольмовых сечений векторных расслоений, чему и посвящена данная статья. В ней применяется методика свед́ения к конечномерному случаю, широко используемая в различных задачах, например, в [1].

## 1. Конечномерный случай

К конечномерному векторному расслоению впоследствии будут сведены случаи расслоений банаховых пространств.

Пусть $s : B \to E$ — непрерывное сечение $n$-мерного векторного расслоения $\pi : E \to B$.

**Определение 1.** Точка $x^* \in B$ сечения $s$ называется особой, если $s(x^*) = \theta \in F_{x^*}$, т. е. если ее образ является нулем соответствующего слоя.

Пусть область $\overline{D}^n \subset B$ такая, что $s$ на $\partial\overline{D}^n$ не содержит особых точек и $\overline{D}^n$ допускает такое симплициальное разбиение $\Sigma^n$, что на границе каждого симплекса сечение $s$ не содержит ни одной особой точки. Этого всегда можно добиться либо малым "шевелением" границ симплекса, либо малым "шевелением" сечения ([2], с. 483). Таким образом, $s$ не имеет особых точек на остове размерности $n-1$ данного разбиения. При попытке непрерывного продолжения отображения $s$ на всю область $\overline{D}^n$ без особых точек возникает препятствующий коцикл $c^n_s(\Sigma^n) \subset \pi_{n-1}(R^n \setminus 0)$. Любому симплексу $\sigma^n \subset K^n = \overline{D}^n$ сопоставляется значение гомотопической группы $\pi_{n-1}(R^n \setminus 0)$.

**Определение 2.** Степенью непрерывного сечения $s$ $n$-мерного векторного расслоения называется препятствие к его непрерывному продолжению на остов размерности $n$:

$$\deg(s, \overline{D}^n, \theta) = c^n_s(K^n).$$

## 2. Случай вполне непрерывных сечений

Пусть $\pi : E \to B$ — локально тривиальное банахово векторное расслоение с паракомпактной базой $B$, $s : B \to E$, $s \in C^1$, — сечение этого расслоения.

Пусть $\overline{D} \subset B$ — область базы такая, что сечение $s$ не имеет особых точек на $\partial D$; пусть $\{(W_i, \tau_i)\}$ — тривиализующее покрытие области $\overline{D} \subset B$ расслоения $\pi$, т. е. $\tau_i : \pi^{-1}(W_i) \to W_i \times F$, где $F$ — стандартный слой расслоения. Тогда сечение $\tilde{s}_i(x) = \tau_i \circ s(x)$, $x \in W_i$, — локально определенное векторное поле, $\tilde{s}_i : W_i \to W_i \times F$.

**Определение 3.** Сечение $s$ банахова векторного расслоения $\pi : E \to B$ с паракомпактной базой $B$ называется вполне непрерывным, если

1. $\exists\{(W_i, \tau_i)\}_{i=1}^m$ — конечное тривиализующее покрытие базы $B$;
2. $\forall W_i \in \{(W_i, \tau_i)\}_{i=1}^m \quad s|_{W_i} = I - k_i$, где $k_i$ — компактный оператор.

Заметим, что существование расслоений с конечным тривиализующим покрытием обеспечивает вторая основная теорема гомотопической классификации векторных расслоений ([3], с. 51).

Таким образом, вполне непрерывное сечение банахова паракомпактного векторного расслоения обладает таким конечным тривиализующим покрытием, что на каждой его области тривиализации оно представляет собой локально определенное вполне непрерывное векторное поле.

Нас интересуют особые точки этого сечения, которые определяются аналогично конечномерному случаю.

Предположим далее, что покрытие $\{(W_i, \tau_i)\}$ таково, что $\tilde{s}_i$ не имеют особых точек на $\partial W_i$ для любого $i$. Зафиксируем в покрытии одно множество $W_i$. Так как $\tilde{s}_i$ — вполне непрерывное векторное поле, то $\tilde{k}_i(W_i)$ — относительно компактное множество. Построим на нем шаудеровскую аппроксимацию $\tilde{k}_{i\varepsilon}(x)$ ([4], с. 123). Образ этого оператора лежит в конечномерном пространстве $F^{n_i} \subset F$ и является ограниченным множеством. Согласно лемме Гейне–Бореля $\tilde{k}_{i\varepsilon}(x)$ — относительно компактное множество. Из этого следует, что $\tilde{k}_{i\varepsilon}$ — конечномерное вполне непрерывное отображение, которое является аппроксимацией оператора $\tilde{k}_i(x)$. Тогда $\tilde{s}_{i\varepsilon}$ — вполне непрерывное конечномерное векторное поле, $\tilde{s}_{i\varepsilon} = I - \tilde{k}_{i\varepsilon}$. Так как $\tilde{s}_i$ невырождено на $\partial W_i$, то существует такое $\varepsilon > 0$, что $\|\tilde{s}_i(x)\| \geq \varepsilon$ для любого $x \in \partial W_i$. Из этого следует, что $\|\tilde{s}_{i\varepsilon/2}(x)\| > 0$ для любого $x \in \partial W_i$. Эту аппроксимацию можно выбрать трансверсальной нулевому сечению нашего расслоения ([2], с. 484).

Будем считать, что $W^{n_i} = F^{n_i} \cap W_i \neq \varnothing$. Далее рассмотрим сужение на $W^{n_i}$

$$\tilde{\tilde{s}}_i = \tilde{s}_{i\varepsilon/2}\big|_{W^{n_i}} : W^{n_i} \to F^{n_i}, \quad \tilde{\tilde{s}}_i(x) \neq 0, \quad x \in \partial W^{n_i}.$$

Получили конечномерное вполне непрерывное векторное поле. Проделав эту процедуру на каждом $W_i \in \{W_i\}_{i=1}^m$, получим семейство конечномерных операторов $\{\tilde{\tilde{s}}_i : W^{n_i} \to F^{n_i}\}_{i=1}^m$. Согласно определению вполне непрерывного сечения, этих операторов будет конечное число. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что все $n_i$ равны $n$ (если это не так, то достаточно взять $n = \max n_i$). Поэтому далее будем рассматривать семейство $\{\tilde{\tilde{s}}_i : W_i^n \to F_i^n\}$ вместо $\{\tilde{\tilde{s}}_i : W^{n_i} \to F^{n_i}\}$.

Перейдем к области $\overline{D}^n = \bigcup\limits_i W_i^n$. Известно ([5], с. 45), что для любого открытого покрытия паракомпактного гладкого конечномерного многообразия существует подчиненное ему гладкое разбиение единицы. Воспользуемся этим фактом для склеивания локально определенных векторных полей $\{\tilde{\tilde{s}}_i : W_i^n \to F_i^n\}$. Пусть семейство гладких функций $\{\varphi_\gamma : \overline{D}^n \to [0,1]\}$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{W_i^n\}$ области $\overline{D}^n$. Тогда можно определить конечномерное вполне непрерывное векторное поле $\tilde{\tilde{s}} : \overline{D}^n \to \overline{D}^n \times F^n$ по формуле

$$\tilde{\tilde{s}}(x) = \sum_{i=1}^m \sum_\gamma \varphi_\gamma \tilde{\tilde{s}}_i(x), \quad x \in \overline{D}^n.$$

Это конечномерное вполне непрерывное векторное поле, определенное на всем $\overline{D}^n$ и не имеющее на $\partial\overline{D}^n$ особых точек.

**Определение 4.** Степенью вполне непрерывного сечения векторного банахова расслоения $\deg(s, \overline{D}, \theta)$ называется степень его конечномерной аппроксимации $\tilde{\tilde{s}}$:

$$\deg(s, \overline{D}, \theta) = \deg(\tilde{\tilde{s}}, \overline{D}^n, \theta).$$

Определенная таким образом степень сечения является его целочисленной характеристикой, которая зависит только от значений $s$ на $\partial\overline{D}$, не зависит от выбора конечномерной аппроксимации $\tilde{s}_{i\varepsilon}(x)$ и обладает следующими свойствами:

1. Если $\deg(s, \overline{D}, \theta) \neq 0$, то существует такая точка $x \in D$, что $s(x) = \theta_x$.
2. Если $s_t = I - k_t$, где $k_t$ — непрерывная гомотопия, компактная по совокупности переменных отображения $k$, $y \notin s_t(\partial D)$ для всех $t \in [0; 1]$, то $\deg(s_t, \partial D, y) = \mathrm{const}$.
3. Степень $\deg(s, \partial D, y)$ аддитивно зависит от области, т. е. если $\overline{D} = \bigcup\limits_{i=1}^{m} U_i$, где $\{U_i\}_{i=1}^{m}$ — непересекающиеся открытые области в $D$, и если определены $\{\deg(s, \partial U_i, y)\}$, то

$$\deg(s, \partial D, y) = \sum_{i=1}^{m} \deg(s, \partial U_i, y).$$

## 3. Случай фредгольмовых сечений нулевого индекса

Вышеизложенная теория степени допускает обобщение на случай фредгольмовых сечений нулевого индекса векторных банаховых расслоений с паракомпактной базой.

Предположим, что на $B$ задана фредгольмова структура. Это означает, что для любых двух множеств $W_i$, $W_j$ из тривиализующего покрытия $\{(W_i, \tau_i)\}$ базы $B$ таких, что $W_i \cap W_j \neq \varnothing$, производная $D(\tau_i \circ \tau_j^{-1})(\xi)$ для любого $\xi \in \tau_j(W_i \cap W_j)$ принадлежит группе $GL_C(B)$, т. е. имеет вид $I + k$, где $k$ — вполне непрерывный оператор. Введем обозначения

$$U = W_i \cap W_j, \quad \tau_{ij} = \tau_i \circ \tau_j^{-1} : U \to E.$$

Пусть $s$ — гладкое фредгольмово сечение нулевого индекса, т. е. ядро и коядро производной конечномерны и имеют равные размерности. Возьмем точку $x \in U$ и рассмотрим локально "распрямленные" отображения $\tilde{s}_i = \tau_i \circ s$ и $\tilde{s}_j = \tau_j \circ s$ в этой точке. Заметим, что

$$\tau_i \circ s = \tau_i(\tau_j^{-1}(\tau_j \circ s)) = (\tau_i \circ \tau_j^{-1}) \circ (\tau_j \circ s).$$

Таким образом, $\tilde{s}_i = \tau_{ij} \circ \tilde{s}_j$ и

$$D\tilde{s}_i(x_0)h = (1 + k(x_0))Ds_j(x_0)h, \quad x_0 \in U.$$

Рассмотрим теперь вопрос о степени этого сечения относительно области $D \subset B$, на границе которой $s$ не имеет особых точек.

Согласно теореме о локальном представлении фредгольмово отображение нулевого индекса заменой аргумента локально можно привести к вполне непрерывному отображению ([6], с. 8).

Воспользуемся этим фактом и произведем такую процедуру на каждой из областей тривиализации области $D$, т. е. на каждом $W_i$ приведем фредгольмово сечение к вполне непрерывному. Далее полностью повторяется конструкция, изложенная во второй части данной статьи, а именно: на каждом множестве $W_i$ строится шаудеровская аппроксимация полученного вполне непрерывного сечения, трансверсальная нулевому сечению расслоения. Затем полученное семейство конечномерных вполне непрерывных сечений склеивается гладким разбиением единицы. В результате получится конечномерное вполне непрерывное векторное поле $\tilde{\tilde{s}}$, степень которого определена выше. Поэтому сформулируем

**Определение 5.** Степенью фредгольмова сечения нулевого индекса векторного банахова расслоения с паракомпактной базой $\deg(s, \overline{D}, \theta)$ называется степень его аппроксимации вполне непрерывным сечением $\tilde{\tilde{s}}$

$$\deg(s, D, \theta) = \deg(\tilde{\tilde{s}}, \overline{D}^n, \theta).$$

Данная степень также зависит только от значений $s$ на границе области и обладает всеми вышеперечисленными свойствами.

## Литература

1. Сапронов Ю.И., Смольянов В.А. *Обобщенная редукция Каччиополи и бифуркации решений уравнений при разрушениях непрерывных симметрий* // Матем. модели и операторные уравнения. – Воронеж, 2001. – С. 125–138.
2. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия. Методы и приложения.* – М.: Наука, 1979. – 759 с.
3. Хьюзмоллер Д. *Расслоенные пространства.* – М.: Мир, 1970. – 442 с.
4. Красносельский М.А., Забрейко П.П. *Геометрические методы нелинейного анализа.* – М.: Наука, 1975. – 511 с.
5. Ленг С. *Введение в теорию дифференцируемых многообразий.* – М.: Мир, 1967. – 204 с.
6. Борисович Ю.Г., Звягин В.Г., Сапронов Ю.И. *Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере–Шаудера* // УМН. – 1977. – Т. 32. – Вып. 4. – С. 3–54.

*Воронежский государственный университет*

*Поступила*
14.11.2002