ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 1 (464)

УДК 519.633

Г.И. ШИШКИН

СЕТОЧНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ, СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ПО ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Решения краевых задач для уравнений с частными производными, старшие производные которых (либо некоторые из них) содержат параметр ε, принимающий сколь угодно малые значения, обладают ограниченной гладкостью решений. Для таких задач точность приближенных решений традиционных численных методов (см., напр., [1]) зависит от величины параметра и ухудшается при малых значениях ε (описание проблем, возникающих в случае эллиптических и параболических уравнений см., напр., в [2]–[6]). В связи с этим возникает проблема разработки схем, сходящихся равномерно относительно параметра ε (или короче — сходящихся ε-равномерно).

В данной работе рассматриваются краевые задачи для сингулярно возмущенных волнового уравнения, а также эквивалентной системы двух гиперболических уравнений первого порядка в случае ограниченных и неограниченных областей. В этих уравнениях старшая производная по пространственной переменной содержит параметр ε, принимающий произвольные значения из полуинтервала $(0, 1]$. При $\varepsilon \to 0$ в этих задачах возникают пограничные (гиперболические) слои, описываемые уравнениями гиперболического типа. Показано, что традиционные разностные схемы не позволяют получать приближенные решения, погрешность которых не зависит от ε. Показано также, что в естественных классах разностных схем не существует схем подгонки, сходящихся ε-равномерно.

Для гиперболической системы с использованием монотонных разностных аппроксимаций на специальных сетках, сгущающихся в пограничных слоях, построены схемы, сходящиеся ε-равномерно в равномерной сеточной норме. Для волнового уравнения ε-равномерные схемы строятся "сворачиванием" схем для соответствующей гиперболической системы. Скорость сходимости таких схем (в норме L_∞) оценивается величиной $O(N^{-1} + N_0^{-1})$, где $N+1$ и N_0+1 — число узлов сетки по пространственной и временной переменным. Заметим, что нормы L_p и энергетическая норма, порождаемая сингулярно возмущенным волновым уравнением, не являются адекватными для указанных задач — сингулярная часть решения, будучи конечной в равномерной норме, в этих нормах стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

1. Постановки задач

1. На множестве $\overline{G}$, $G = D \times (0, T]$, где D есть одно из множеств

$$D = (0, d), \tag{1.1}$$

$$D = (0, \infty), \tag{1.2}$$

$$D = (-\infty, 0), \tag{1.3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 98-01-00362).

рассмотрим начально-краевую задачу для сингулярно возмущенного волнового уравнения[1]

$$
\begin{gathered}
L_{(1.4)}\,u(x,t) \equiv \left\{\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - b^2(x,t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right\}u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in G, \\
u(x,t) = \varphi(x,t), \ \ (x,t) \in S, \quad \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \varphi_0(x,t), \ \ (x,t) \in S_0.
\end{gathered} \tag{1.4}
$$

Здесь ε — параметр, принимающий произвольные значения из полуинтервала $(0,1]$; $S = \overline{G} \setminus G$, $S = S_0 \cup S_L$, $S_0 = \{(x,t) : x \in D, \ t = 0\}$ — основание, а $S_L = \overline{S}_L$ — боковая граница множества G. Функции $b(x,t), f(x,t), (x,t) \in \overline{G}$, $\varphi(x,t), (x,t) \in S, \varphi_0(x,t)$, $(x,t) \in \overline{S}_0$, считаем достаточно гладкими и удовлетворяющими на множестве $S_* = \overline{S}_0 \cap S_L$ условиям согласования, обеспечивающим достаточную гладкость решения задачи при каждом фиксированном значении параметра ε; $b(x,t) \geq b_0 > 0$, $(x,t) \in \overline{G}$; в случае неограниченных областей все функции считаем ограниченными; пусть $u \in C^K(\overline{G})$, $K \geq 3$.

При стремлении параметра к нулю в окрестности боковой границы S_L (при $S_L \neq \emptyset$) появляются пограничные слои (*гиперболические* пограничные слои, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями вдоль соответствующих характеристик). В том случае, когда граничная функция $\varphi(x,t)$ и правая часть уравнения $f(x,t)$ удовлетворяют условию $-b^2(x,t)(\partial^2/\partial t^2)\varphi(x,t) = f(x,t)$, $(x,t) \in S_L$, в главном члене асимптотического разложения (по параметру ε) решения краевой задачи (1.4) отсутствует сингулярная часть; решение, по существу, является регулярным.

Заметим, что мы не рассматриваем случай неограниченной области $D = (-\infty, \infty)$, поскольку в этом случае пограничные слои не возникают и, как показал анализ, уже классические разностные схемы [1] (см. также п. 5 ниже) сходятся ε-равномерно со скоростью $O(N^{-1} + N_0^{-1})$.

Для простоты будем предполагать выполненным условие

$$b(x,t) = \text{const}, \quad (x,t) \in \overline{G}.$$

2. Задачу (1.4) удобно привести к эквивалентной системе гиперболических уравнений первого порядка. Пусть на множестве $\overline{G}$ определены операторы

$$L_1^i \equiv \left\{(-1)^{i+1}\varepsilon\frac{\partial}{\partial x} + p^i(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\right\}, \ \ p^i(x,t) \geq p_0 > 0, \ \ (x,t) \in \overline{G}, \ \ i = 1,2. \tag{1.5а}$$

В случае областей (1.1)–(1.3) через G^i, $i = 1,2$, обозначим множество, являющееся множеством достижимости (при возрастании аргумента t) для оператора L_1^i с данными на множестве S^i; $\overline{G} = G^i \cup S^i$, $S^i = S_0 \cup S_L^i$, S_L^1 и S_L^2 — левая и правая боковые границы G. Пусть $\varGamma = \overline{D} \setminus D = \varGamma^1 \cup \varGamma^2$, где $\varGamma^1$ и $\varGamma^2$ — левая и правая границы D; $\varGamma^2(D_{(1.2)})$, $\varGamma^1(D_{(1.3)}) = \emptyset$. Тогда $S_L^i(G) = \varGamma^i(D) \times [0,T]$, $i = 1,2$, $G^1 = \{D \cup \varGamma^2\} \times (0,T]$, $G^2 = \{D \cup \varGamma^1\} \times (0,T]$.

На множестве $\overline{G}$ будем также рассматривать задачу для системы сингулярно возмущенных гиперболических уравнений первого порядка

$$
\begin{gathered}
L^i v(x,t) = g^i(x,t), \quad (x,t) \in G^i, \\
v^i(x,t) = \psi^i(x,t), \quad (x,t) \in S^i, \ \ i = 1,2.
\end{gathered} \tag{1.5б}
$$

Здесь $v(x,t) = (v^1(x,t), v^2(x,t))^T$, $(x,t) \in \overline{G}$, — вектор-функция, оператор L^i определяется соотношением

$$L^i v(x,t) \equiv L_1^i v^i(x,t) + \sum_{j=1,2} c^{ij}(x,t) v^j(x,t),$$

[1]Запись $L_{(j.k)}$ (а также $f_{(j.k)}$, $M_{(j.k)}$) означает, что этот оператор (соотв. функция, постоянная) введен в формуле $(j.k)$. Через M, M_i (через m, m_i) обозначаем положительные постоянные, не зависящие от ε и от параметров шаблонов используемых разностных схем.

функции $c^{ij}(x,t)$, $g^i(x,t)$, $p^i(x,t)$, а также $\psi^i(x,t)$ являются достаточно гладкими соответственно на множестве $\overline{G}$ и сторонах S_0, S_L^i, функции $\psi^i(x,t)$ непрерывны на S^i. На множестве S_* считаем выполненными условия согласования, обеспечивающие достаточную гладкость решения задачи при фиксированных значениях параметра; пусть $v \in C^K(\overline{G})$, $K \geq 2$.

При $\varepsilon \to 0$ в окрестности множества S_L появляются пограничные слои.

При выполнении условия

$$\begin{gathered} p^1(x,t) = p^2(x,t) = b, \quad g^1(x,t) = 0, \quad g^2(x,t) = -f(x,t), \\ c^{12}(x,t) = -1, \quad c^{ij}(x,t) = 0, \quad (i,j) \neq (1,2), \quad (x,t) \in \overline{G}, \\ \psi^1(x,t) = \varphi(x,t), \ \ (x,t) \in S^1, \ \ \psi^2(x,t) = b\varphi_0(x,t) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,t), \ \ (x,t) \in S_0, \end{gathered} \tag{1.6}$$

решение задачи (1.4) вне $M\varepsilon$-окрестности границы S_L^2 (при $S_L^2 \neq \emptyset$) задается соотношением $u(x,t) = v^1(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}$, $r(x;\mathit{\Gamma}^2) \geq \varepsilon b^{-1} t$, где $r(x;\mathit{\Gamma}^2)$ — расстояние от точки x до границы $\mathit{\Gamma}^2$. Если же выполняется условие

$$\begin{gathered} p^1(x,t) = p^2(x,t) = b, \quad g^1(x,t) = -f(x,t), \quad g^2(x,t) = 0, \\ c^{21}(x,t) = -1, \quad c^{ij}(x,t) = 0, \quad (i,j) \neq (1,2), \quad (x,t) \in \overline{G}, \\ \psi^2(x,t) = \varphi(x,t), \ \ (x,t) \in S^2, \ \ \psi^1(x,t) = b\varphi_0(x,t) - \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,t), \ \ (x,t) \in S_0, \end{gathered}$$

функция $v^2(x,t)$ является решением задачи (1.5) вне $M\varepsilon$-окрестности границы S_L^1: $u(x,t) = v^2(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}$, $r(x,\mathit{\Gamma}^1) \geq \varepsilon b^{-1} t$.

Задачи (1.4), (1.5) возникают, например, в механике сплошных сред при исследовании волновых процессов, когда скорость распространения возмущений мала по сравнению с размерами среды (см., напр., [7]).

2. Мотивация исследований

Обсудим проблемы, возникающие при решении задач (1.4) и (1.5).

1. Рассмотрим задачу (1.5), (1.1).

1.1. При условии $c^{ij}(x,t) \equiv 0$, $(x,t) \in \overline{G}$, система (1.5) распадается. Для простоты рассмотрим задачу для одного уравнения первого порядка

$$\begin{gathered} Lu(x,t) \equiv \left\{\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right\} u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in G^1, \\ u(x,t) = \varphi(x,t), \quad (x,t) \in S^1, \end{gathered} \tag{2.1}$$

где $\varphi(x,t) = 0$, $(x,t) \in S_0$, $\varphi(x,t) = \varphi^0(t)$, $(x,t) \in S_L^1$; функция $\varphi^0(t)$, $t \in [0,T]$, достаточно гладкая, причем $(d^k/dx^k)\varphi^0(t) = 0$, $t = 0$, $k \leq K$, K достаточно велико, $K \geq 1$.

Сингулярным решением этой задачи является

$$u(x,t) = \begin{cases} \varphi^0(t - \varepsilon^{-1}x), & t \geq \varepsilon^{-1}x; \\ 0, & t < \varepsilon^{-1}x, \quad (x,t) \in \overline{G}, \end{cases} \tag{2.2}$$

функция $u(x,t)$ ограничена ε-равномерно, однако ее производные по x в окрестности множества S_L^1 неограниченно возрастают при $\varepsilon \to 0$.

1.2. Для решения краевой задачи (2.1) используем классическую разностную схему (см., напр., [1]). На множестве $\overline{G}_{(1.1)}$ введем равномерную сетку

$$\overline{G}_h = \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_0, \tag{2.3}$$

где $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_0$ — сетки на отрезках $\overline{D}$ и $[0,T]$ соответственно с шагами $h = dN^{-1}$ и $\tau = TN_0^{-1}$ ($N+1$ и N_0+1 — число узлов сеток $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_0$). Задаче (2.1), (1.1) сопоставим неявную разностную схему

$$\begin{gathered}\Lambda z(x,t) \equiv \{\varepsilon\delta_{\overline{x}} + \delta_{\overline{t}}\}z(x,t) = 0, \quad (x,t) \in G_h^1,\\ z(x,t) = \varphi(x,t), \quad (x,t) \in S_h^1,\end{gathered} \tag{2.4}$$

где $G_h^1 = G^1 \cap \overline{G}_h$, $S_h^1 = S^1 \cap \overline{G}_h$, $\delta_{\overline{x}}z(x,t)$, $\delta_{\overline{t}}z(x,t)$ — направленные (назад) разностные производные. Разностная схема (2.4), (2.3) является монотонной (для нее справедлив принцип максимума, см., напр., [1]); схема устойчива ε-равномерно.

1.3. Рассмотрим поведение ошибки $\omega(x,t) = u(x,t) - z(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}_h$. Функция $\omega(x,t)$ — решение сеточной задачи

$$\Lambda\omega(x,t) = \Psi(x,t), \quad (x,t) \in G_h^1, \quad \omega(x,t) = 0, \quad (x,t) \in S_h^1,$$

где $\Psi(x,t) = \{\varepsilon(\delta_{\overline{x}} - \frac{\partial}{\partial x}) + (\delta_{\overline{t}} - \frac{\partial}{\partial t})\}u(x,t)$ — невязка решения. При $\varphi_0(t) = t^2$, $t \in [0,T]$, имеем $\Psi(x,t) = -\varepsilon^{-1}h - \tau$, $(x,t) \in G_h^1$, $t \geq \varepsilon^{-1}x + \max[\varepsilon^{-1}h, \tau]$.

Нетрудно видеть, что при условии $\varepsilon = \varepsilon(h) = Mh$ выполняется неравенство $\max\limits_{\overline{G}_h}|u(x,t) - z(x,t)| \geq m$ для сколь угодно малых h и τ, т.е. решение сеточной задачи (2.4), (2.3) при N, $N_0 \to \infty$ не сходится к решению краевой задачи (2.1), (1.1) ε-равномерно.

Подобным образом убеждаемся, что явные разностные схемы для задачи (2.1), (1.1) также не сходятся ε-равномерно.

Теорема 2.1. *Решения разностных схем, построенных на основе классических аппроксимаций задачи* (1.5) *на областях* (1.1)–(1.3), *не сходятся ε-равномерно в равномерной сеточной норме.*

Замечание. Равномерная норма функции $u_{(2.2)}(x,t)$ — решения задачи (2.1) — конечная величина для всех $\varepsilon \in (0,1]$. Однако в норме L_p, $1 \leq p < \infty$, это решение стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. При построении сеточных методов для сингулярно возмущенных эллиптических уравнений с параметром ε^2 при старших производных используется также энергетическая норма

$$\|v\|_\varepsilon^2 = \|v\|_{L_2}^2 + \varepsilon^2\|\nabla v\|_{L_2}^2,$$

порождаемая (в теории методов конечных элементов) эллиптической частью оператора $L_{(1.4)}$; здесь $\nabla v = \nabla v(x)$ — градиент функции $v(x)$ (см., напр., [5]). Этой норме в случае задачи (2.1) соответствует норма

$$\|v(x,t)\|_\varepsilon^2 \equiv \|v(x,t)\|_{L_2}^2 + \varepsilon^2\|\nabla_{x,t}v(x,t)\|_{L_2}^2,$$

где $\nabla_{x,t}v(x,t) \equiv ((\partial/\partial x)v(x,t), (\partial/\partial t)v(x,t))$. В норме $\|\cdot\|_\varepsilon$, а также норме $\|v(x,t)\|_{\varepsilon,\nu}^2$, $\nu > 1$, где $\|v(x,t)\|_{\varepsilon,\nu}^2 = \|v(x,t)\|_{L_2}^2 + \varepsilon^\nu\|\nabla_{x,t}v(x,t)\|_{L_2}^2$, $\nu \geq 0$, решение задачи (2.1), (1.1) также стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Таким образом, сингулярное решение (будучи конечным в равномерной норме) может быть сколь угодно малым в нормах L_p, $1 \leq p < \infty$, и $\|\cdot\|_{\varepsilon,\nu}$, $\nu > 1$, при малых значениях параметра ε, т. е. нормы L_p и $\|\cdot\|_{\varepsilon,\nu}$ не являются адекватными в случае сингулярно возмущенных задач.

2. В случае задачи (1.4), (1.1) при условии

$$\begin{gathered}b = 1, \ \ f(x,t) = 0, \ \ (x,t) \in \overline{G}, \ \ \varphi_0(x,t) = 0, \ \ (x,t) \in S_0,\\ \varphi(x,t) = \varphi^0(t), \ \ x = 0, \ \ \varphi(x,t) = 0, \ \ x > 0, \ \ (x,t) \in S,\end{gathered} \tag{2.5}$$

где $\varphi^0(t) = \varphi^0_{(2.1)}(t)$, используем разностную схему

$$\begin{gathered}\Lambda z(x,t) \equiv \{\varepsilon^2\delta_{x\overline{x}} - \delta_{t\overline{t}}\}z(x,t) = 0, \quad (x,t) \in G_h,\\ z(x,t) = \varphi(x,t), \ \ (x,t) \in S_h, \ \ z(x,t) = z^*(x,t), \ \ t = \tau, \ \ (x,t) \in G_h,\end{gathered}$$

где $z^*(x,t)$ — некоторая функция, достаточно близкая к $u(x,t)$ при $t = \tau$, $\overline{G}_h = \overline{G}_{h(2.3)}$.

Функция $u_{(2.2)}(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}$ при $\varepsilon \le \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 = dT^{-1}$ — решение задачи (1.4), (2.5), (1.1). При $\varphi^0(t) = t^4$ имеем

$$\Lambda u(x,t) = 24^{-1}[\varepsilon^{-2}h^2 - \tau^2], \quad (x,t) \in G_h, \quad t \ge \varepsilon^{-1}x + \max[\varepsilon^{-1}h, \tau].$$

При $\varepsilon = \varepsilon(h) = Mh$ найдется множество G_h^*, на котором выполняется неравенство $\max\limits_{\overline{G}_h^*} |u(x,t) - z(x,t)| \ge m$ для сколь угодно малых h и τ. Справедлива

Теорема 2.2. *Решения разностных схем, построенных на основе классических аппроксимаций задачи* (1.4) *на областях* (1.1)–(1.3), *не сходятся ε-равномерно в равномерной сеточной норме.*

Таким образом, ошибки разностных схем, построенных на основе классических аппроксимаций краевых задач (1.4) и (1.5), при малых ε становятся соизмеримыми с самими решениями (в норме L_∞), что порождает проблему разработки разностных схем, сходящихся ε-равномерно.

3. О методе подгонки для гиперболических уравнений

Для построения ε-равномерно сходящихся разностных схем в случае сингулярно возмущенных эллиптических и параболичекских уравнений разработаны и используются метод подгонки и метод специальным образом сгущающихся сеток (описание их см., напр., в [2]–[6]). Однако использование метода подгонки может вызывать затруднения. В ([4], с. 89–91; [6], с. 128–143) показано, что методы подгонки для указанных уравнений имеют ограниченную применимость; при наличии параболических пограничных слоев не существует схем подгонки на равномерных сетках, сходящихся ε-равномерно.

Выясним, какие проблемы возникают при использовании метода подгонки в случае сингулярно возмущенных гиперболических уравнений.

1. Рассмотрим гиперболическое уравнение первого порядка на полуоси $(0,\infty)$

$$\begin{gathered} Lu(x,t) \equiv \left\{\varepsilon\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right\}u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in G, \\ u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in S_0, \quad u(x,t) = \varphi(t), \quad (x,t) \in S_L^1, \end{gathered} \tag{3.1}$$

где $G = G^1 = D_{(1.2)} \times (0,T]$ с границей $S = S^1 = S_0 \cup S_L^1$, $\varphi(t)$ — гладкая функция, удовлетворяющая условиям согласования в точке $(0,0)$; $\varphi(0) = 0$. Требуется построить разностную схему, сходящуюся ε-равномерно.

Для задачи (3.1) справедлив принцип максимума. Например, пусть некоторое выпуклое множество G^0 образовано отрезками прямых, параллельных осям координат и характеристикам оператора $L_{(3.1)}$; верхнюю сторону, параллельную оси x_1, и правую сторону, параллельную оси t, а также отрезки характеристик считаем принадлежащими G^0.

Лемма 3.1. *Пусть для функции $w(x,t)$ выполняются условия*

$$L_{(3.1)}w(x,t) \ge 0, \quad (x,t) \in G^0, \quad w(x,t) \ge 0, \quad (x,t) \in S^0,$$

где $S^0 = \overline{G}^0 \setminus G^0$. Тогда $w(x,t) \ge 0$, $(x,t) \in \overline{G}^0$.

Будем рассматривать разностные схемы на равномерных сетках. Введем на множестве $\overline{G}$ сетку

$$\overline{G}_h = \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_0 \tag{3.2}$$

с шагами h и τ по пространственной и временной переменным. Разностные уравнения ищем в таком виде

$$\Lambda z(x,t) \equiv \{A\delta_{\overline{x}} + \delta_{\overline{t}}\}z(x,t) = 0, \quad (x,t) \in G_h, \tag{3.3a}$$

где $G_h = G \cap \overline{G}_h$, коэффициент A — функционал коэффициентов уравнения из (3.1) и зависит от x, t, h, τ, ε. Определив функцию $z(x,t)$ на множестве $S_h = S \cap \overline{G}_h$ соотношением

$$z(x,t) = \varphi(t), \quad (x,t) \in S_h, \tag{3.3б}$$

получим разностную схему (3.3), (3.2) для задачи (3.1).

В задачах (3.1) и (3.3), (3.2) перейдем к переменным ξ, t, $\xi = \varepsilon^{-1}x$. Пусть $u^0(\xi,t)$, $(\xi,t) \in \overline{G}_\xi$, и $z^0(\xi,t)$, $(\xi,t) \in \overline{G}_{h\xi}$, — решения соответствующих задач

$$\begin{gathered} L^0 u^0(\xi,t) \equiv \left\{\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial t}\right\} u^0(\xi,t) = 0, \quad (\xi,t) \in G_\xi, \\ u^0(\xi,t) = \varphi(t), \quad (\xi,t) \in S_\xi; \end{gathered} \tag{3.4}$$

$$\Lambda^0 z^0(\xi,t) \equiv \{A^0\,\delta_{\overline{\xi}} + \delta_{\overline{t}}\} z^0(\xi,t) = 0, \quad (\xi,t) \in G_{h\xi}, \tag{3.5а}$$

$$z^0(\xi,t) = \varphi(t), \quad (\xi,t) \in S_{h\xi}. \tag{3.5б}$$

Здесь G^0_ξ — образ множества G^0, $u^0(\xi,t) = u(x(\xi),t)$, $(\xi,t) \in \overline{G}_\xi$, $z^0(\xi,t) = z(x(\xi),t)$, $(\xi,t) \in \overline{G}_{h\xi}$, $A^0(\xi,t,h_\xi,\tau,\varepsilon) = \varepsilon^{-1}A(x(\xi) = \varepsilon\xi, t, \varepsilon h_\xi, \tau, \varepsilon)$, $h_\xi = \varepsilon^{-1}h$. Сеточная задача (3.5) есть разностная схема на сетке $\overline{G}_{h\xi} = \overline{G}_{h(3.2)\xi}$ для задачи (3.4).

Данные задачи (3.4), а следовательно, и ее решение не зависят от ε. Также не зависят от ε семейства сеток $G_{h\xi}$ и $S_{h\xi}$ (они определяются лишь величинами h_ξ, τ). Поэтому схему подгонки для задачи (3.4) (сходящуюся ε-равномерно) естественно искать в виде уравнений (3.5а), в которых коэффициент $A^0 = A^0_0$ не зависит от ε,

$$\Lambda^0_0\, z^0(\xi,t) \equiv \{A^0_0(\xi,t,h_\xi,\tau)\delta_{\overline{\xi}} + \delta_{\overline{t}}\} z^0(\xi,t) = 0, \quad (\xi,t) \in G_{h\xi}. \tag{3.6}$$

Схема подгонки (3.6), (3.5б), если она существует, сходится ε-равномерно (ее решение не зависит от ε).

Разностные схемы метода подгонки будем искать в классе схем с разностными уравнениями вида (3.3а) в переменных x, t и вида (3.6) в переменных ξ, t на сетках G_h и $G_{h\xi}$ соответственно.

Условие поточечной аппроксимации разностным оператором Λ^0 оператора L^0 на гладких функциях приводит к соотношению ([1], с. 73–78)

$$|A^0_0(\xi,t,h_\xi,\tau) - 1| \le \mu(h_\xi,\tau;\xi,t),$$

где $\mu(h_\xi,\tau;\xi,t) \to 0$ при h_ξ, $\tau \to 0$ в точке $(\xi,t) \in G_{h\xi}$. Скажем, что оператор Λ^0_0 аппроксимирует оператор L^0 равномерно на множестве $G^*_\xi \subseteq \overline{G}_\xi$, если $\mu(h_\xi,\tau;\xi,t)$ не зависит от ξ, t при $(\xi,t) \in G^*_\xi$, т. е. $\mu(h_\xi,\tau;\xi,t) = \lambda(h_\xi,\tau)$, $\lambda(h_\xi,\tau) \to 0$ при h_ξ, $\tau \to 0$.

Лемма 3.2. *Пусть для задачи* (3.1) *на сетке* $\overline{G}_{h(3.2)}$ *построена разностная схема* (3.3), *сеточные уравнения которой имеют вид* (3.3а) *на сетке* G_h *и* (3.6) *— на сетке* $G_{h\xi}$. *В рассматриваемом классе разностных схем не существует схемы, сходящейся* (*при* h, $\tau \to 0$) ε*-равномерно, если в* m*-окрестности множества* $S^1_{L\xi}$ *найдется точка* $(\xi,t) \in G_\xi$, $\xi < t$, *в окрестности которой оператор* Λ^0_0 *аппроксимирует оператор* L^0 *равномерно.*

Замечание. Разностную схему метода подгонки для задачи (3.1) можно строить в более широком классе, например, на четырехточечном шаблоне неявных разностных схем в таком виде

$$\Lambda z(x,t) \equiv \{A\delta_{\overline{x}} + B\delta_{x\overline{x}} + C + \delta_{\overline{t}}\} z(x,t) = D, \quad (x,t) \in G^1_h, \tag{3.7}$$

где коэффициенты A, B, C, D зависят от x, t, h, τ, ε. Учитывая, что данные задачи (3.1) и сетка $\overline{G}_{h\xi}$ не зависят от ε, уравнение, соответствующее уравнению (3.7), ищем в виде

$$\Lambda^0_0 z^0(\xi,t) \equiv \{A^0_0(\xi,t,h_\xi,\tau)\delta_{\overline{\xi}} + B^0_0(\xi,t,h_\xi,\tau)\delta_{\xi\overline{\xi}} + C^0_0(\xi,t,h_\xi,\tau) + \delta_{\overline{t}}\} z^0(\xi,t) = D^0_0(\xi,t,h_\xi,\tau). \tag{3.8}$$

В этом случае условие равномерной на множестве G^*_ξ аппроксимации оператора L^0 оператором Λ^0_0 принимает вид

$$|A^0_0(\xi,t,h_\xi,\tau)-1|,\ |B^0_0(\xi,t,h_\xi,\tau)|,\ |C^0_0(\xi,t,h_\xi,\tau)|\le\lambda(h_\xi,\tau),\quad (\xi,t)\in G^*_\xi,\quad \lambda(h_\xi,\tau)\to 0 \ \text{ при } h_\xi,\tau\to 0.$$

Утверждение леммы 3.2 сохраняется и в том случае, когда разностные уравнения имеют вид (3.7) и (3.8) на сетках G_h и $G_{h\xi}$ соответственно.

Доказательство леммы (и замечания) проводится методом от противного по схеме доказательства аналогичной теоремы для параболического уравнения в ([4], с. 186–189); при построениях используется техника барьерных функций.

В случае системы гиперболических уравнений (1.5) при $c^{ij}(x,t)\equiv 0$, $(x,t)\in\overline{G}$, приходим к распавшейся системе уравнений первого порядка. Рассмотрим задачу (1.5) при условии

$$\begin{gathered} p^i(x,t)=1,\quad c^{ij}(x,t),\quad g^i(x,t)=0,\quad (x,t)\in\overline{G},\\ \psi^1(x,t)=\varphi(t),\quad (x,t)\in S^1,\quad \psi^2(x,t)=0,\quad (x,t)\in S^2,\quad i,j=1,2, \end{gathered}\tag{3.9}$$

где $\varphi(t)$ — гладкая функция, удовлетворяющая условиям согласования в точке $(0,0)$; $\varphi(0)=0$. Справедлива

Теорема 3.1. *Пусть для задачи* (1.5), (3.9), (1.1) *на сетке* $\overline{G}_h$ *равномерной по обеим переменным* x, t *построена разностная схема на четырехточечном шаблоне неявных разностных схем, причем ее коэффициенты в переменных* ξ, t, $\xi=\varepsilon^{-1}x$ *не зависят от параметра* ε. *В рассматриваемом классе разностных схем не существует схемы, сходящейся* ε*-равномерно, если в* m*-окрестности множества* $S^1_{L\xi}$ *найдется точка* $(\xi,t)\in G_\xi$, $\xi<t$, *в окрестности которой (в переменных* ξ, t*) сеточный оператор аппроксимирует дифференциальный оператор равномерно.*

2. Рассмотрим задачу (1.4), (1.1) при условии

$$\begin{gathered} f(x,t)=0,\quad (x,t)\in\overline{G},\quad \varphi(x,t)=\varphi^0(t),\quad x=0,\\ \varphi(x,t)=0,\quad x>0,\quad (x,t)\in S,\quad \varphi_0(x,t)=0,\quad (x,t)\in S_0, \end{gathered}\tag{3.10}$$

$\varphi^0(t)$ — гладкая функция, удовлетворяющая условиям согласования в $(0,0)$. На равномерной сетке будем строить разностные схемы на пятиточечном шаблоне типа “прямой крест”

$$\Lambda z(x,t)\equiv\{A\delta_{x\overline{x}}+B\delta_{\widetilde{x}}+C+D\delta_{\overline{t}}-\delta_{t\overline{t}}\}z(x,t)=E,\quad (x,t)\in G_h,\quad t>\tau,\tag{3.11}$$

$$z(x,t)=\varphi^0(t),\quad (x,t)\in S_h,\quad x=0.\tag{3.12}$$

Здесь $A=A(x,t,h,\tau,\varepsilon),\dots,E=E(x,t,h,\tau,\varepsilon)$; функция $z(x,t)$ при $t=0,\ \tau$, $(x,t)\in\overline{G}_h$, $x>0$, определена каким-то образом. Перейдем к переменным ξ, t. Данные задачи (1.4), (3.10), (1.1) в новых переменных не зависят от ε. Пусть коэффициенты уравнения (3.11) в новых переменных не зависят от ε

$$\Lambda^0_0\, z^0(\xi,t)\equiv\{A^0_0\delta_{\xi\overline{\xi}}+B^0_0\delta_{\widetilde{\xi}}+C^0_0+D^0_0\delta_{\overline{t}}-\delta_{t\overline{t}}\}z^0(\xi,t)=E^0_0,\quad (\xi,t)\in G_{h\xi},\quad t>\tau,\tag{3.13}$$

где $A^0_0=A^0_0(\xi,t,h_\xi,\tau),\dots,E^0_0=E^0_0(\xi,t,h_\xi,\tau)$. Справедлива

Теорема 3.2. *Пусть для задачи* (1.4), (3.10), (1.1) *построена разностная схема, удовлетворяющая условию* (3.12); *пусть сеточные уравнения в переменных* x, t *и* ξ, t *имеют вид* (3.11) *и* (3.13) *соответственно. В рассматриваемом классе разностных схем не существует схемы, сходящейся* ε*-равномерно, если в* m*-окрестности множества* $S^1_{L\xi}$ *найдется точка* $(\xi,t)\in G_\xi$, $\xi<t$, *в окрестности которой сеточный оператор аппроксимирует дифференциальный оператор (в переменных* ξ, t*) равномерно.*

4. Априорные оценки решений и производных

1. Приведем оценки для решений задачи (1.5), (1.1).

1.1. В переменных ξ, t, $\xi = \varepsilon^{-1}x$, дифференциальные уравнения становятся регулярными. Для функций $\widetilde{v}(\xi,t)=v(x(\xi),t)$ получается оценка (см., напр., [8], с. 210) $|(\partial^{k_1+k_0}/\partial\xi^{k_1}\partial t^{k_0})\widetilde{v}(\xi,t)| \le M$, $(\xi,t) \in \overline{\widetilde{G}}$, $k_1 + k_0 \le K$, где $|\widetilde{v}(\xi,t)| = \max_i |\widetilde{v}^i(\xi,t)|$, $\widetilde{G}$ — образ множества G, $\widetilde{G} = \{(\xi,t) : (x(\xi),t) \in G\}$. В переменных x, t имеем

$$\left|\frac{\partial^{k_1+k_0}}{\partial x^{k_1}\partial t^{k_0}} v(x,t)\right| \le M\varepsilon^{-k_1}, \quad (x,t) \in \overline{G}, \quad k_1 + k_0 \le K. \tag{4.1}$$

1.2. Оценим решение задачи (1.5), (1.1) с учетом асимптотического поведения решения. Решение задачи представим в виде суммы

$$v(x,t) = U(x,t) + V(x,t), \quad (x,t) \in \overline{G}, \tag{4.2}$$

где $U(x,t)$ и $V(x,t)$ — регулярная и сингулярная части решения. Функция $U(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}$, есть сужение на $\overline{G}$ функции $v^*(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}^*$, — решения задачи

$$\begin{gathered} L^{i*}v^*(x,t) = g^{i*}(x,t), \quad (x,t) \in G^{i*}, \\ v^{i*}(x,t) = \psi^{i*}(x,t), \quad (x,t) \in S^{i*}, \quad i = 1,2. \end{gathered} \tag{4.3}$$

Область $\overline{G}^*$ — расширение области G за границу S_L; множество

$$\overline{G}^* = \overline{G}^*(p_0) = \{(x,t) : x \in [-Tp_0^{-1}\varepsilon,\ d + Tp_0^{-1}\varepsilon], \quad t \in [0,T]\} \tag{4.4}$$

содержит множество G вместе с его $(Tp_0^{-1}\varepsilon)$-окрестностью. Коэффициенты и свободные члены уравнений (4.3) являются гладкими продолжениями коэффициентов и свободных членов уравнений (1.5), сохраняющими их свойства. Функции $\psi^{i*}(x,t)$ гладкие на границе S^{i*} и на множестве S_0 совпадают с функциями $\psi^i(x,t)$. Функция $V(x,t)$ — решение задачи

$$L^iV(x,t) = 0, \ \ (x,t) \in G^i, \ \ V^i(x,t) = \psi^i(x,t) - U^i(x,t), \ \ (x,t) \in S^i, \ \ i = 1,2,$$

и обращается в нуль на множестве S_0.

Функцию $U(x,t)$ представим в виде разложения

$$U(x,t) = U_0(x,t) + \varepsilon U_1(x,t) + w(x,t), \quad (x,t) \in \overline{G};$$

$U_0(x,t)$, $U_1(x,t)$, $w(x,t)$ являются решениями следующих задач:

$$\begin{gathered} L_0^*U_0(x,t) = g^*(x,t), \ \ (x,t) \in \overline{G}^* \setminus \overline{S}_0^*, \quad U_0(x,t) = \psi^*(x,t), \ \ (x,t) \in S_0^*; \\ L_0^*U_1(x,t) = \begin{pmatrix} -\partial/(\partial x)U_0^1(x,t) \\ \partial/(\partial x)U_0^2(x,t) \end{pmatrix}, \quad (x,t) \in \overline{G}^* \setminus \overline{S}_0^*, \ \ U_1(x,t) = 0, \ \ (x,t) \in S_0^*; \\ L^{*i}w(x,t) = (-1)^i\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x}U_1^i(x,t), \ \ (x,t) \in G^{i*}, \\ w^i(x,t) = \psi^{i*}(x,t) - [U_0^i(x,t) + \varepsilon U_1^i(x,t)], \ \ (x,t) \in S^{i*}, \ \ i = 1,2. \end{gathered}$$

Здесь

$$L_0^* \equiv \begin{pmatrix} p^{1*}(x,t) & 0 \\ 0 & p^{2*}(x,t) \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t} + \begin{pmatrix} c^{11*}(x,t) & c^{12*}(x,t) \\ c^{21*}(x,t) & c^{22*}(x,t) \end{pmatrix}.$$

Оценивая функции $U_0(x,t)$, $U_1(x,t)$, $w(x,t)$, $V(x,t)$, находим

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial^{k_1+k_0}}{\partial x^{k_1}\partial t^{k_0}}U(x,t)\right| \le M[1+\varepsilon^{2-k_1}], \quad (x,t)\in\overline{G};\\
&\left|\frac{\partial^{k_1+k_0}}{\partial x^{k_1}\partial t^{k_0}}V^i(x,t)\right| \le M\varepsilon^{-k_1}, \quad t\ge p_0\varepsilon^{-1}r(x;\Gamma^i), \ \ i=1,2,\\
&V^1(x,t)=0, \quad t<p_0\varepsilon^{-1}x,\\
&V^2(x,t)=0, \quad t<p_0\varepsilon^{-1}(d-x), \ \ (x,t)\in\overline{G}, \ \ k_1+k_0\le K.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Теорема 4.1. *Пусть решение задачи* (1.5), (1.1) *удовлетворяет условию* $v\in C^{K_0}(\overline{G})$, $K_0\ge 4$. *Тогда для функции* $v(x,t)$ *и ее компонент из представления* (4.2) *справедливы оценки* (4.1), (4.5), *где* $K=K_0-2$.

2. В случае задачи (1.4), (1.1) имеем оценку

$$\left|\frac{\partial^{k_1+k_0}}{\partial x^{k_1}\partial t^{k_0}}u(x,t)\right| \le M\varepsilon^{-k_1}, \quad (x,t)\in\overline{G}, \quad k_1+k_0\le K. \tag{4.6}$$

Приведем оценки решения на основе его асимптотического поведения. Решение задачи представим в виде суммы

$$u(x,t)=U(x,t)+V(x,t), \quad (x,t)\in\overline{G}, \tag{4.7}$$

где $U(x,t)$, $V(x,t)$ — регулярная и сингулярная части решения. Функция $U(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}$, — сужение на $\overline{G}$ функции $u^*(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}^*$, — решения задачи

$$\begin{gathered}
L^*u^*(x,t)=f^*(x,t), \quad (x,t)\in G^*,\\
u^*(x,t)=\varphi^*(x,t), \ \ (x,t)\in S^*, \quad \frac{\partial}{\partial t}u^*(x,t)=\varphi_0^*(x,t), \ \ (x,t)\in S_0^*.
\end{gathered} \tag{4.8}$$

Здесь $\overline{G}^*=\overline{G}^*_{(4.4)}(b_0)$, коэффициенты и правая часть уравнения, а также начальные и граничные функции задачи (4.8) — гладкие продолжения данных задачи (1.4), сохраняющие их свойства. Функция $V(x,t)$ — решение задачи

$$\begin{gathered}
LV(x,t)=0, \quad (x,t)\in G,\\
V(x,t)=\varphi(x,t)-U(x,t), \ \ (x,t)\in S, \quad \frac{\partial}{\partial t}V(x,t)=0, \ \ (x,t)\in S_0.
\end{gathered}$$

Для компонент $U(x,t)$, $V(x,t)$ получаются оценки

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial^{k_1+k_0}}{\partial x^{k_1}\partial t^{k_0}}U(x,t)\right| \le M[1+\varepsilon^{2-k_1}], \ \ (x,t)\in\overline{G};\\
&\left|\frac{\partial^{k_1+k_0}}{\partial x^{k_1}\partial t^{k_0}}V(x,t)\right| \le M\varepsilon^{-k_1}, \ \ \text{при} \ \ t\ge b_0\varepsilon^{-1}r(x;\Gamma^1\cup\Gamma^2),\\
&V(x,t)=0, \ \ t<\min[b_0\varepsilon^{-1}r(x;\Gamma^1), b_0\varepsilon^{-1}r(x;\Gamma^2)],\\
&(x,t)\in\overline{G}, \quad k_1+k_0\le K.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Теорема 4.2. *Пусть решение задачи* (1.4), (1.1) *удовлетворяет условию* $u\in C^{K_0}(\overline{G})$, $K_0\ge 4$. *Тогда для функции* $u(x,t)$ *и ее компонент из представления* (4.7) *справедливы оценки* (4.6), (4.9), *где* $K=K_0-2$.

Замечание. Утверждения теорем 4.1 и 4.2 сохраняются в случае областей (1.2), (1.3).

5. Классические разностные схемы

1. Для задачи (1.5) построим разностную схему на основе классических неявных аппроксимаций задачи.

1.1. На множестве $\overline{G}$ введем сетку

$$\overline{G}_h = \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_0, \tag{5.1}$$

где $\overline{\omega}_1$ — вообще говоря, неравномерная сетка на $\overline{D}$; полагаем $h_i = x_{i+1} - x_i$, $x_i, x_{i+1} \in \overline{\omega}_1$, $h = \max\limits_i h_i$; считаем выполненным условие $h \le MN^{-1}$, $N+1$ — число узлов сетки $\overline{\omega}_1$ в случае области (1.1) и максимальное число узлов сетки $\overline{\omega}_1$ на отрезке единичной длины в случае областей (1.2), (1.3); $\overline{\omega}_0$ — равномерная сетка. Задачу (1.5) аппроксимируем сеточной задачей

$$\begin{aligned} \Lambda^i z(x,t) = g^i(x,t), \quad (x,t) \in G_h^i, \\ z^i(x,t) = \psi^i(x,t), \quad (x,t) \in S_h^i, \quad i = 1,2. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Здесь $G_h^i = G^i \cap \overline{G}_h$, $S_h^i = S^i \cap \overline{G}_h$, $z(x,t) = (z^1(x,t), z^2(x,t))^T$, $(x,t) \in \overline{G}_h$. В случае неявной схемы имеем

$$\Lambda^i z(x,t) \equiv \Lambda_1^i z^i(x,t) + \sum_{j=1,2} c^{ij}(x,t) z^j(x,t), \quad i,\, j = 1,2, \tag{5.3}$$

$$\Lambda_1^1 z^1(x,t) \equiv \{\varepsilon\delta_{\overline{x}} + p^1(x,t)\delta_{\overline{t}}\} z^1(x,t), \quad \Lambda_1^2 z^2(x,t) \equiv \{-\varepsilon\delta_x + p^2(x,t)\delta_{\overline{t}}\} z^2(x,t).$$

Операторы $\Lambda^i_{1(5.3)}$, $i = 1,2$, являются монотонными ε-равномерно при произвольном распределении узлов сетки $\overline{G}_{h(5.1)}$.

1.2. Приведем оценку решения задачи (5.2), (5.3), (5.1). Пусть коэффициенты $c^{ij}(x,t)$ удовлетворяют условию

$$\min_{i,\overline{G}} c^{ii}(x,t) \ge 1 + 2 \max_{i,j,i \ne j,\overline{G}} |c^{ij}(x,t)|, \quad i,j = 1,2.$$

Если это условие не выполняется, перейдем в задаче (1.5) к функции $w(x,t) = v(x,t)\exp(-\alpha t)$, $(x,t) \in \overline{G}$ и выберем величину α достаточно большой так, чтобы в новом уравнении для коэффициентов при функциях $w^i(x,t)$, $i = 1,2$, выполнялось аналогичное условие.

Для разностной схемы (5.2), (5.1) справедлив, например, следующий принцип максимума.

Лемма 5.1. *Пусть для разностной схемы* (5.2), (5.3), (5.1) *выполняются условия* $c^{12}(x,t) \le 0$, $c^{ij}(x,t) = 0$, $(i,j) \ne (1,2)$, $(x,t) \in G_h^i$;

$$\begin{gathered} \Lambda_1^1 z^1(x,t) \ge -c^{12} z^2(x,t), \quad (x,t) \in G_h^1, \quad \Lambda_1^2 z^2(x,t) \ge 0, \quad (x,t) \in G_h^2, \\ z^i(x,t) \ge 0, \quad (x,t) \in S_h^i, \quad i = 1,2. \end{gathered}$$

Тогда $z^i(x,t) \ge 0$, $(x,t) \in \overline{G}_h$, $i = 1,2$.

Используя технику барьерных функций [1], [9], [10], устанавливаем оценку $|z(x,t)| \le M$, $(x,t) \in \overline{G}_h$, где $M = M_1[\max\limits_{\overline{G}_h} |g(x,t)| + \max\limits_{i,S_h^i} |\psi^i(x,t)|\,]$. Таким образом, решение задачи (5.2), (5.3), (5.1) ограничено ε-равномерно.

Принимая во внимание оценку (4.1), находим

$$|v(x,t) - z(x,t)| \le M[\varepsilon^{-1}N^{-1} + N_0^{-1}], \quad (x,t) \in \overline{G}_h. \tag{5.4}$$

Теорема 5.1. *Пусть для решения задачи* (1.5), *рассматриваемой на областях* (1.1)–(1.3), *выполняются оценки теоремы* 4.1 *и замечания к ней. Тогда при* N, $N_0 \to \infty$ *решение разностной схемы* (5.2), (5.3), (5.1) *сходится к решению задачи* (1.5) *при фиксированных значениях параметра* ε. *Для сеточных решений справедлива оценка* (5.4).

1.3. При построении схем (5.2), (5.1) одно из дифференциальных уравнений (или оба) в задаче (1.5) можно аппроксимировать на основе явных схем. Для операторов $\Lambda^i_{(5.2)}$ получаются такие выражения

$$\begin{aligned}
&\Lambda^i z(x,t) \equiv \Lambda^i_1 z^i(x,t) + \sum_{j=1,2} c^{ij}(x,\check{t}) z^j(x,\check{t}),\\
&\Lambda^1_1 z^1(x,t) \equiv \{\varepsilon\delta_{\overline{x}} + p^1(x,\check{t})\delta_t\} z^1(x,\check{t}),\\
&\Lambda^2_1 z^2(x,t) \equiv \{-\varepsilon\delta_x + p^2(x,\check{t})\delta_t\} z^2(x,\check{t}), \quad i=1,2;
\end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}
&\Lambda^1 z(x,t) \equiv \Lambda^1_1 z^1(x,t) + \sum_{j=1,2} c^{1j}(x,\check{t}) z^j(x,\check{t}), \quad \Lambda^1_1 = \Lambda^1_{1(5.5)},\\
&\Lambda^2 z(x,t) \equiv \Lambda^2_1 z^2(x,t) + \sum_{j=1,2} c^{2j}(x,t) z^j(x,t), \quad \Lambda^2_1 = \Lambda^2_{1(5.3)};
\end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned}
&\Lambda^1 z(x,t) \equiv \Lambda^1_1 z^1(x,t) + \sum_{j=1,2} c^{1j}(x,t) z^j(x,t), \quad \Lambda^1_1 = \Lambda^1_{1(5.3)},\\
&\Lambda^2 z(x,t) \equiv \Lambda^2_1 z^2(x,t) + \sum_{j=1,2} c^{2j}(x,\check{t}) z^j(x,\check{t}), \quad \Lambda^2_1 = \Lambda^2_{1(5.5)},
\end{aligned} \tag{5.7}$$

где $v(x,\check{t}) = v(x,t-\tau)$.

Операторы $\Lambda^i_{1(5.5)}$, $\Lambda^i_{1(5.6)}$, $\Lambda^i_{1(5.7)}$, $i=1,2$, являются монотонными ε-равномерно, если для распределения узлов сетки $\overline{G}_{h(5.1)}$ выполняется условие

$$\tau \le \varepsilon^{-1} p_0 \min_i h_i. \tag{5.8}$$

Для разностных схем (5.2), (5.5)–(5.7), (5.1) при условии (5.8) справедливо утверждение теоремы 5.1.

2. В случае задачи (1.4), (1.2) ее решение можно найти, рассматривая задачу (1.5), (1.6).

2.1. Аппроксимируя эту задачу разностной схемой (5.2), (5.3), (5.1) и исключая $z^2(x,t)$, приходим к разностной схеме

$$\begin{gathered}
\Lambda z(x,t) = f^h(x,t), \quad (x,t)\in G_h, \ \ t \ge 2\tau,\\
z(x,t) = \varphi(x,t), \ \ (x,t)\in S_h, \quad \delta_t z(x,t) = \varphi_0(x,t), \ \ (x,t)\in S_{0h}.
\end{gathered} \tag{5.9}$$

Здесь $\Lambda z(x,t) \equiv \{\varepsilon^2 H_0(x)\delta_{\overline{x}\widehat{x}} - b^2\delta_{\overline{t}\,\overline{t}} + \varepsilon b H_1(x)\delta_{\overline{x}\widehat{x}}\delta_{\overline{t}}\} z(x,t)$,

$$\begin{gathered}
f^h(x,t) = f(x,t), \quad (x,t)\in G_h, \ \ t\ge 2\tau, \quad H_1(x) = 2^{-1}(h_{i-1}+h_i),\\
H_0(x) \equiv 2^{-1}(h_i)^{-1}(h_{i-1}+h_i), \quad x = x_i;
\end{gathered} \tag{5.10}$$

$\delta_{\overline{t}\,\overline{t}} v(x,t) = \delta_{\overline{t}} v_{\overline{t}}(x,t)$. В случае равномерной сетки $H_0(x)=1$, $H_1(x)=h$.

Заметим, что для дифференциальной задачи (1.4), (1.2) справедлив принцип максимума (формулировки принципа максимума для гиперболических уравнений второго порядка см., напр., в [10], с. 195). С использованием леммы 5.1 устанавливается следующий дискретный принцип максимума.

Лемма 5.2. *Пусть в случае задачи* (1.4), (1.2) *для разностной схемы* (5.9), (5.10), (5.1) *выполняются соотношения*

$$\begin{gathered}
\Lambda z(x,t) \le 0, \quad (x,t)\in G_h, \ \ t\ge 2\tau,\\
z(x,t)\ge 0, \ \ (x,t)\in S_h, \ \ \varepsilon\delta_{\overline{x}} z(x,t) + b\delta_t z(x,t) \ge 0, \ \ (x,t)\in S_{0h}, \ \ x\notin \varGamma^1.
\end{gathered}$$

Тогда $z(x,t)\ge 0$, $(x,t)\in \overline{G}_h$, $(\varepsilon\delta_{\overline{x}} + b\delta_t) z(x,t) \ge 0$, $(x,t)\in G_h$, $x\notin \varGamma^1$.

Используя принцип максимума, с учетом оценок теоремы 4.1 находим

$$|u(x,t) - z(x,t)| \le M[\varepsilon^{-1}N^{-1} + N_0^{-1}], \quad (x,t) \in \overline{G}_h. \tag{5.11}$$

При выводе оценки (5.11) использовались оценки решения схемы (5.2), (5.5), (5.1), на основе которой строилась схема (5.9), (5.10), (5.1).

Лемма 5.3. *Пусть для решения задачи* (1.5), (1.2) *выполняются оценки из замечания к теореме* 4.1. *Тогда при* $N, N_0 \to \infty$ *решение разностной схемы* (5.9), (5.10), (5.1) *сходится к решению задачи* (1.5) *при фиксированных значениях параметра. Для сеточных решений справедлива оценка* (5.11).

Для задачи (1.4), (1.3) получаем разностную схему (5.9), (5.1), где

$$H_0(x) = 2^{-1}(h_{i-1})^{-1}(h_{i-1} + h_i). \tag{5.12}$$

Приведем схему для задачи (1.4), (1.1). Пусть функция $\eta(x) = \eta(x, x^*)$, $x \in (-\infty, \infty)$, $x^* \in D$, определяется соотношениями $\eta(x) = \eta(x, x^*) = 1$ при $x \le x^*$, $\eta(x) = 0$ при $x > x^*$. Для решения задачи (1.4), (1.1) используем схему (5.9), (5.1), где

$$H_0(x) = H_0(x; x^*) = \eta(x)H_{0(5.9)}(x) + (1 - \eta(x))H_{0(5.12)}(x), \quad x \in \omega_1. \tag{5.13}$$

Для решений разностных схем (5.9), (5.12), (5.1) и (5.9), (5.13), (5.1) выполняется оценка (5.11). Справедлива

Теорема 5.2. *Пусть для решения задачи* (1.4), *рассматриваемой на областях* (1.1)–(1.3), *выполняются оценки теоремы* 4.2 *и замечание к ней. Тогда при* N, $N_0 \to \infty$ *решения разностных схем* (5.9), (5.10), (5.1); (5.9), (5.12), (5.1) *и* (5.9), (5.13), (5.1) *в случае областей* (1.2), (1.3) *и* (1.1) *соответственно сходятся при фиксированных значениях параметра* ε. *Для сеточных решений справедлива оценка* (5.11).

2.2. В том случае, когда при построении схем для задачи (1.4) используются операторы (5.5), приходим к явной схеме

$$\begin{gathered} \Lambda z(x,t) = f^h(x,t), \quad (x,t) \in G_h, \quad t \ge 2\tau, \\ z(x,t) = \varphi(x,t), \quad (x,t) \in S_h, \quad \delta_t z(x,t) = \varphi_0(x,t), \quad (x,t) \in S_{0h}. \end{gathered} \tag{5.14}$$

Здесь $f^h(x,t) = f(x, \check{\check{t}})$,

$$\begin{gathered} \Lambda z(x,t) \equiv \{\varepsilon^2 H_0(x)\delta_{\overline{x}\widehat{x}} - b^2\delta_{tt} + \varepsilon b H_1(x)\delta_{\overline{x}\widehat{x}}\delta_t\} z(x, \check{\check{t}}), \quad (x,t) \in G_h, \quad t \ge 2\tau, \\ H_1(x) = H_{1(5.9)}(x), \quad H_0(x) = H_0(x; D), \quad H_0(x; D_{(1.2)}) = H_{0(5.10)}(x), \\ H_0(x; D_{(1.3)}) = H_{0(5.12)}(x), \quad H_0(x; D_{(1.1)}) = H_{0(5.13)}(x), \\ v(x, \check{\check{t}}) = v(x, t - 2\tau), \quad t, t - 2\tau \in \overline{\omega}_0, \quad \delta_{tt}v(x,t) = \delta_t v_t(x,t). \end{gathered}$$

На сетке $\overline{G}_h$, распределение узлов которой удовлетворяет условию (5.8), для разностной схемы (5.14), (5.1) справедливо утверждение теоремы 5.2.

6. Специальные разностные схемы

1. Для задачи (1.5) построим схему, сходящуюся ε-равномерно.

1.1. Пусть $\overline{G} = \overline{G}_{(1.1)}$. Введем сетку

$$\overline{G}_h^s = \overline{\omega}_1^s \times \overline{\omega}_0, \tag{6.1}$$

сгущающуюся в окрестности пограничного слоя; $\overline{\omega}_1^s$ — кусочно-равномерная сетка, $\overline{\omega}_0 = \overline{\omega}_{0(5.1)}$. Сетка $\overline{\omega}_1^s = \overline{\omega}_1^s(\sigma)$ строится следующим образом. Отрезок $[0, d]$ разобьем на три части: $[0, \sigma]$, $[\sigma, d - \sigma]$, $[d - \sigma, d]$. На каждой части шаг сетки $\overline{\omega}_1^s$ постоянен и равен $h^{(1)} = \sigma(4^{-1}N)^{-1}$ на отрезках

$[0,\sigma]$, $[d-\sigma,d]$ и $h^{(2)}=(d-2\sigma)(2^{-1}N)^{-1}$ на $[\sigma,d-\sigma]$. Величину σ определим соотношением $\sigma=\sigma(d,\varepsilon)=\min[4^{-1}d,\, p_0^{-1}\varepsilon T]$. Сетка $\overline{\omega}_1^s$ построена.

Для решения разностной схемы (5.2), (5.3), (6.1) с учетом априорных оценок (4.5) устанавливается оценка

$$|v(x,t)-z(x,t)|\le M[N_1^{-1}+N_0^{-1}],\quad (x,t)\in\overline{G}_h. \tag{6.2}$$

1.2. В случае областей (1.2) и (1.3) строим сетку

$$\overline{G}_h^s=\overline{\omega}_1^s\times\overline{\omega}_0, \tag{6.3}$$

сгущающуюся в окрестности соответственно множеств S_L^1 и S_L^2. Область $\overline{D}_{(1.2)}$ разобьем на две части $[0,\sigma]$ и $[\sigma,\infty)$, а область $\overline{D}_{(1.3)}$ — на $(-\infty,-\sigma]$, $[-\sigma,0]$. На каждом из множеств шаг сетки $\overline{\omega}_1^s$ постоянен и равен $h^{(1)}=\sigma(2^{-1}N)^{-1}$ и $h^{(2)}=(1-\sigma)(2^{-1}N)^{-1}$ на множествах $[-\sigma,0]$, $[0,\sigma]$ и $(-\infty,-\sigma]$, $[\sigma,\infty)$ соответственно. Величину σ определим соотношением $\sigma=\min[2^{-1},\, p_0^{-1}\varepsilon T]$. Сетки $\overline{\omega}_1^s$ и $\overline{G}_h^s$ построены.

С учетом априорных оценок для решения разностной схемы (5.2), (5.3), (6.3) устанавливаем оценку (6.2).

Теорема 6.1. *Пусть для решения задачи* (1.5), *рассматриваемой на областях* (1.1)–(1.3), *выполняются оценки теоремы* 4.1 *и замечания к ней. Тогда при* N, $N_0\to\infty$ *решение разностной схемы* (5.2), (5.3), (6.1) *в случае области* (1.1) (*схемы* (5.2), (5.3), (6.3) *в случае областей* (1.2), (1.3)) *сходится к решению задачи* (1.5) ε*-равномерно. Для сеточных решений справедлива оценка* (6.2).

Замечание. При условии (5.8) для разностных схем (5.2), (5.5)–(5.7) на сетках $\overline{G}_{h(6.1)}$ и $\overline{G}_{h(6.3)}$ в случае областей (1.1) и (1.2), (1.3) соответственно справедливо утверждение теоремы 6.1.

2. Для решения задачи (1.4) используем схемы (5.9), (5.10), (6.3); (5.9), (5.12), (6.3) и (5.9), (5.13), (6.1) в случае областей (1.2), (1.3) и (1.1) соответственно. В случае схемы (5.9), (5.13), (6.1) считаем выполненным условие

$$x^*=x^*_{(5.13)}\in(4^{-1}d,\, 3/4d). \tag{6.4}$$

С использованием принципа максимума убеждаемся, что эти разностные схемы сходятся ε-равномерно:

$$|u(x,t)-z(x,t)|\le M[N^{-1}+N_0^{-1}],\quad (x,t)\in\overline{G}_h. \tag{6.5}$$

Теорема 6.2. *Пусть для решения задачи* (1.4), *рассматриваемой на областях* (1.1)–(1.3), *выполняются оценки теоремы* 4.2 *и замечания к ней. Тогда при* N, $N_0\to\infty$ *решение разностной схемы* (5.9), (5.13), (6.4), (6.1) *в случае области* (1.1) (*схемы* (5.9), (5.10), (6.3) *и* (5.9), (5.12), (6.3) *в случае областей* (1.2) *и* (1.3) *соответственно*) *сходится к решению задачи* (1.4) ε*-равномерно. Для сеточных решений справедлива оценка* (6.5).

Замечание. При выполнении условия (5.8) для разностной схемы (5.14), (6.4), (6.1) в случае области (1.1) (схемы (5.14), (6.3) в случае областей (1.2) и (1.3)) справедливо утверждение теоремы 6.2.

7. Обобщения и замечания

1. Приведенная техника построения ε-равномерно сходящихся схем применима и в том случае, когда волновое уравнение содержит члены с производными первого порядка. Так, в случае задачи для уравнения с постоянными коэффициентами, рассматриваемого на $\overline{G}_{(1.2)}$,

$$\begin{gathered} Lu(x,t) \equiv \left\{\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - b^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \varepsilon p \frac{\partial}{\partial x} + q \frac{\partial}{\partial t} + c\right\} u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in G, \\ u(x,t) = \varphi(x,t), \ \ (x,t) \in S, \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \varphi_0(x,t), \ \ (x,t) \in S_0, \end{gathered} \tag{7.1}$$

получаем неявную разностную схему

$$\begin{gathered} \Lambda z(x,t) = f(x,t), \ \ (x,t) \in G_h, \ \ t \geq 2\tau, \\ z(x,t) = \varphi(x,t), \ \ (x,t) \in S_h, \quad \delta_t z(x,t) = \varphi_0(x,t), \ \ (x,t) \in S_{0h}. \end{gathered}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Lambda z(x,t) \equiv \{&\varepsilon^2 H_0(x) \delta_{\overline{x}\widehat{x}} - b^2 \delta_{\overline{t}\,\overline{t}} + 2^{-1} \varepsilon p(\delta_x + \delta_{\overline{x}}) + c + 4^{-1} b^{-2} q^2 + \\ &+ \varepsilon H_1(x) \delta_{\overline{x}\widehat{x}} \delta_{\overline{t}}\} z(x,t) + \{H_2(x) q \delta_{\overline{t}} - \varepsilon H_3(x) \delta_{\overline{x}\widehat{x}}\} z(x,\check{t}) - H_4(x) 4^{-1} b^{-2} q^2 z(x,\check{\check{t}}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &H_0(x) = 2^{-1}(h_{i-1} + h_i)(h_i)^{-1}, \ \ H_1(x) = 2^{-1}(h_{i-1} + h_i) b, \\ &H_2(x) = 2b^2 q \tau^{-1} [\exp(2^{-1} b^{-2} q \tau) - 1], \\ &H_3(x) = 2^{-1} \varepsilon b \tau^{-1} [\exp(2^{-1} b^{-2} q \tau) - 1](h_{i-1} + h_i), \\ &H_4(x) = 4b^4 q^{-2} \tau^{-2} [\exp(b^{-2} q \tau) - 2\exp(2^{-1} b^{-2} q \tau) + 1]. \end{aligned}$$

На сетке $\overline{G}_{h(6.3)}$ разностная схема (7.1) сходится ε-равномерно; для нее справедливо утверждение теоремы 6.2.

2. Подобным образом строятся ε-равномерно сходящиеся схемы в случае задачи для квазилинейного уравнения — задачи (1.4), где в правой части дифференциального уравнения $f(x,t)$ заменена на $g(x,t,u(x,t))$.

3. Пусть данные задач (1.4) и (1.5) достаточно гладкие, однако на S_* не выполнены условия согласования (помимо непрерывности решений). В этом случае порядок ε-равномерной скорости сходимости схем снижается.

Выражаю признательность В.Б. Андрееву и П.Н. Вабищевичу, а также участникам II Всероссийского семинара “Теория сеточных методов для нелинейных краевых задач” (Казань, 18–21 сентября 1998 г.) за плодотворные обсуждения задач с ограниченной гладкостью решений.

Литература

1. Самарский А.А. *Теория разностных схем.* – М.: Наука, 1989. – 616 с.
2. Бахвалов Н.С. *К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1969. – Т. 9. – № 4. – С. 841–859.
3. Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У. *Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем.* – М.: Мир, 1983. – 199 с.
4. Шишкин Г.И. *Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений.* – Екатеринбург: УрО РАН, 1992. – 233 с.
5. Roos H.-G., Stynes M., Tobiska L. *Numerical methods for singularly perturbed differential equations.* – Berlin: Springer, 1996. – 348 p.
6. Miller J.J.H., O’Riordan E., Shishkin G.I. *Fitted numerical methods for singular perturbation problems.* – Singapore: World Scientific, 1996. – 166 p.
7. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. *Сборник задач по математической физике.* – М.: Наука, 1980. – 687 с.

8. Lieberstein H.M. *Theory of partial differential equations.* – New York: Acad. Press, 1972. – 283 p.
9. Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А. *Линейные уравнения второго порядка параболического типа* // УМН. – 1962. – Т. 17. – № 3. – С. 3–146.
10. Protter M.H., Weinberger H.F. *Maximum principles in differential equations.* – New York, Springer-Verlag, 1984. – 261 p.

Институт математики и механики
Уральского отделения
Российской Академии наук

Поступила
09.12.1999