ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 3 (430)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.98

Т.В. АЗАРНОВА

ОЦЕНКИ ЭЛЕМЕНТОВ ОБРАТНЫХ МАТРИЦ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ЛИНЕЙНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

В банаховой алгебре $\operatorname{End} X$ линейных ограниченных операторов, действующих в бесконечномерном комплексном банаховом пространстве X, выделяется несколько классов операторов, замкнутых относительно таких операций, как сложение, умножение и умножение на число. Основные результаты, полученные в данной статье, связаны с замкнутостью рассматриваемых классов относительно операции взятия обратного оператора (в этом случае говорят о наполненности рассматриваемого класса). Многие аспекты этой проблемы освещены в работах [1]–[3].

В основе включения операторов в класс лежат свойства их многомерных матриц, определение которых вводится через дизъюнктную последовательность проекторов P_j ($j \in S$, где S — счетное подмножество из Z^n) из банаховой алгебры $\operatorname{End} X$. Относительно рассматриваемой системы проекторов сделаем следующие предположения.

1. Ряд $\sum\limits_{k\in S} P_k x$ безусловно сходится к x для $x \in X$.

2. $\sup\limits_{\alpha_k\in\mathbb{C},\, |\alpha_k|=1} \Big\| \sum\limits_{k\in S} \alpha_k P_k \Big\| = 1$ (из предположения 1, в общем случае, следует конечность данной величины).

3. Для любых конечных подмножеств σ_1, σ_2, Δ_1, Δ_2 из множества S, обладающих свойством $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$, $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$ и для любого оператора A из $\operatorname{End} X$ имеет место равенство

$$\Big\| \sum_{i\in\sigma_1,\, j\in\Delta_1} P_i A P_j + \sum_{i\in\sigma_2,\, j\in\Delta_2} P_i A P_j \Big\| = \max\Big\{ \Big\| \sum_{i\in\sigma_1,\, j\in\Delta_1} P_i A P_j \Big\|, \Big\| \sum_{i\in\sigma_2,\, j\in\Delta_2} P_i A P_j \Big\| \Big\}.$$

Отметим, что свойство 3 выполнено в гильбертовом пространстве $X = H$, если P_j ($j \in S$) — последовательность ортопроекторов.

Используя такую систему проекторов, поставим в соответствие каждому оператору A из $\operatorname{End} X$ матрицу $A = (A_{ij})$ ($i, j \in S$), составленную из операторных блоков $A_{ij} = P_i A P_j \in \operatorname{End} X$.

Для обоснования корректности определения оператора с помощью своей матрицы важно установить сильную и безусловную сходимость операторного ряда $\sum\limits_{i-j=k} A_{ij}$ ($i, j \in S$) к некоторому оператору $A_k \in \operatorname{End} X$ ($k \in Z^n$) и возможность построения оператора A с помощью операторов A_k в виде $A = \sum\limits_{k\in Z^n} A_k$.

Доказательство сильной и безусловной сходимости операторного ряда $\sum\limits_{i-j=k} A_{ij}$ ($i, j \in S$) сводится к исследованию ряда Фурье построенной по оператору $A \in \operatorname{End} X$ сильно непрерывной операторозначной функции $\Phi_A : R^n \to \operatorname{End} X$

$$\Phi_A(t) = P(t) A P(-t),$$

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Российского фонда фундаментальных исследований, проект 95-00032а.

где $P : R^n \to \operatorname{End} X$ — периодическое сильно непрерывное изометрическое представление

$$P(t)x = \sum_{k\in S} e^{i(k,t)} P_k x, \quad t \in R^n, \quad e^{i(k,t)} = e^{i(k_1 t_1 + \cdots + k_n t_n)}.$$

В силу предположений 2, 3 относительно дизъюнктной последовательности проекторов P_j $(j \in S)$ имеют место равенства

$$\|A_k\| = \sup_{i-j=k} \|A_{ij}\|,$$

и в дальнейшем будем рассматривать классы операторов, для которых ряд $A = \sum\limits_{k\in Z^n} A_k$ абсолютно сходится.

Для характеристики диагоналей матрицы (по аналогии с случаем $n = 1$) введем величины $d_A(k)$ ($d_A(k) = \sup\limits_{i-j=k} \|A_{ij}\|$, если k представляется в виде $k = i - j$ $(i, j \in S)$ и 0 иначе) и, используя эти величины, выделим исследуемые классы операторов. При описании классов операторов символ e будет использоваться для обозначения n-мерного вектора $e = (1, 1, \dots, 1)$, символ $|k|$ — для суммы $|k| = |k_1| + \cdots + |k_n|$, символ mk — для скалярного произведения n-мерных векторов m и k, знак $\leq$ — для обозначения отношения частичного порядка на множестве n-мерных векторов, относительно которого $k \leq m$ тогда и только тогда, когда $\forall i = \overline{1, n}\ \ k_i \leq m_i$.

1. $\operatorname{End}_1 X = \Big\{ A \in \operatorname{End} X : \sum\limits_{k\in Z^n} d_A(k) < \infty \Big\}$;

2. $\operatorname{End}_\alpha X = \Big\{ A \in \operatorname{End} X : \sum\limits_{k\in Z^n} d_A(k)\alpha(k) < \infty$, где $\alpha : Z^n \to R_+$ — неубывающий субэкспоненциальный вес, т.е. функция α, удовлетворяющая условиям 1) $\alpha(k) \geq 1$, 2) $\alpha(k_1 + k_2) \leq \alpha(k_1)\alpha(k_2)$, 3) $\lim\limits_{|k|\to\infty} \frac{\ln \alpha(k)}{|k|} = 0 \Big\}$;

3. $\operatorname{End}_\beta X = \Big\{ A \in \operatorname{End} X : \sup\limits_{k\in Z^n} d_A(k)\beta(k) < \infty$, где $\beta : Z^n \to R_+$ — весовая функция, удовлетворяющая условиям: 1) $\sum\limits_{k\in Z^n} \frac{1}{\beta(k)} < \infty$; 2) $\lim\limits_{|k|\to\infty} \frac{\ln \beta(k)}{|k|} = 0$; 3) $\sum\limits_{j\in Z^n} \frac{1}{\beta(j)\beta(k-j)} < c(\beta)\frac{1}{\beta(k)}$ для некоторой $c(\beta) > 0$; 4) $\lim\limits_{m\to\infty} \sup\limits_{\substack{k\in Z^n \\ \left[\begin{smallmatrix} k\neq -e,\ k\leq -e \\ k\neq e,\ k\geq e \end{smallmatrix}\right.}} \sum\limits_{\substack{j\leq m-e \\ j\geq -m+e}} \frac{\beta(k)}{\beta(mk+j)} = 0 \Big\}$;

4. $\operatorname{End}_\gamma X = \Big\{ A \in \operatorname{End} X : d_A(k) \leq M_A \gamma^{|k|} = M_A \gamma_1^{|k_1|} \cdots \gamma_n^{|k_n|}$ для некоторых $M_A = M(A)$, $\gamma_i = \gamma_i(A)$, $\gamma_i \in (0, 1)$, $(i = \overline{1, n})$ $\Big\}$;

5. $\operatorname{End}_0 X = \Big\{ A \in \operatorname{End}\ X : d_A(k) = 0$ для $\left[\begin{array}{ll} k \neq -e, & k \leq -e \\ k \neq e, & k \geq e \end{array}\right. \Big\}$.

Каждый из рассматриваемых классов является линейным подпространством пространства $\operatorname{End} X$. Простая проверка показывает, что в подпространствах $\operatorname{End}_1 X$, $\operatorname{End}_\alpha X$, $\operatorname{End}_\beta X$ можно ввести следующие нормы:

$$\|A\|_1 = \sum_{k\in Z^n} d_A(k); \quad \|A\|_\alpha = \sum_{k\in Z^n} d_A(k)\alpha(k); \quad \|A\|_\beta = c(\beta) \sup_{k\in Z^n} d_A(k)\beta(k).$$

Кроме того, справедлива следующая

Теорема 1. *Подпространства* $\operatorname{End}_1 X$, $\operatorname{End}_\alpha X$, $\operatorname{End}_\beta X$, $\operatorname{End}_\gamma X$ *замкнуты относительно операции умножения операторов, т.е. являются подалгебрами алгебры* $\operatorname{End} X$.

Доказательство данной теоремы основано на оценивании коэффициентов Фурье сильно непрерывной операторозначной функции $\Phi_{BA}(t) = \Phi_B(t)\Phi_A(t)$, где функция $\Phi_A(t)$ уже была описана выше.

Дальше будут сформулированы частично без доказательства, частично с сокращенным доказательством основные теоремы о наполненности подалгебр $\mathrm{End}_1 X$, $\mathrm{End}_\alpha X$, $\mathrm{End}_\beta X$, $\mathrm{End}_\gamma X$ и приведены конкретные оценки для норм обратных операторов в этих подалгебрах.

Подалгебра $\mathrm{End}_0 X$ не является наполненной подалгеброй в $\mathrm{End}\, X$, но для нее справедлива

Теорема 2. *Если оператор $A \in \mathrm{End}_0\ X$ и обратим, то обратный оператор $A^{-1} \in \mathrm{End}_\gamma\ X$, причем*

$$\|A^{-1}\|_1 \le 2 \cdot \|A^{-1}\| \left(\frac{\sqrt[n]{1 + 2 \cdot 3^n \chi(A)} + \sqrt[n]{2 \cdot 3^n \chi(A)}}{\sqrt[n]{1 + 2 \cdot 3^n \chi(A)} - \sqrt[n]{2 \cdot 3^n \chi(A)}} \right)^n,$$

где $\chi(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ — число обусловленности оператора A.

Доказательство. По каждому оператору $A \in \mathrm{End}_0 X$ строится имеющая абсолютно сходящийся ряд Фурье операторозначная функция $\Phi_A : \Pi^n \to \mathrm{End}\, X$, $\Phi_A(\theta) = P(\theta) A P(\theta^{-1})$, где Π^n — произведение окружностей $\Pi^n = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_i| = 1, \quad i = \overline{1, n}\}$, $P(\theta) = \sum\limits_{j \in S} P_j \theta^j$. Данная функция допускает голоморфное расширение на множество $G = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \prod\limits_{i=1}^{n} z_i \ne 0\}$, и существует область в C^n вида

$$K = \left\{ z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) : \rho_i \le |z_i| \le \frac{1}{\rho_i}, \quad \rho_i = \sqrt[n]{1 - \frac{1}{2 \cdot 3^n \chi(A) + 1}} \right\},$$

в точках которой операторы $\Phi_A(z)$ обратимы. В области K функция $\Phi_{A^{-1}} = (\Phi_A(z))^{-1}$ голоморфна, и результат теоремы получается за счет оценки коэффициентов кратного ряда Лорана $\Phi_{A^{-1}}(z) = \sum\limits_{k \in Z^n} B_k z^k$, где $\|B_k\| = d_{A^{-1}}(k) \le 2 \|A^{-1}\| \left(1 - \frac{1}{2 \cdot 3^n \cdot \chi(A) + 1}\right)^{\frac{|k|}{n}}$. $\square$

Аналогичным путем доказывается следующая

Теорема 3. *Если обратимый оператор A принадлежит $\mathrm{End}_\gamma X$ $(d_A(k) \le M_A \cdot \gamma^{|k|})$, то обратный оператор A^{-1} принадлежит $\mathrm{End}_\gamma X$, причем*

$$d_{A^{-1}}(k) \le 2 \|A^{-1}\| \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{c \gamma_i}{c - 1 + \gamma_i} \right)^{|k_i|},$$

где $c = \sqrt[n]{\frac{1}{2^{n+1} \cdot M_A \cdot \|A^{-1}\| \cdot H} + 1}$, $H = \prod\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{1 - \gamma_i} \right)$.

Ниже будут приведены три теоремы, связанные с наполненностью подалгебр $\mathrm{End}_1 X$, $\mathrm{End}_\alpha X$, $\mathrm{End}_\beta X$, доказательство которых основано на введении новой системы проекторов

$$P_j(m) = \sum_{l \in S,\ \underline{l}_j \le l \le \overline{l}_j} P_l \quad (j \in Z^n),$$

где $\underline{l}_j = ((j_1 - 1)m_1 + 1, \ldots, (j_n - 1)m_n + 1)$, $\overline{l}_j = (j_1 m_1, \ldots, j_n m_n)$, для некоторого вектора $m = (m_1, \ldots, m_n)$, введении относительно этой новой системы проекторов подалгебр $\mathrm{End}_{1,m} X = \mathrm{End}_1 X$, $\mathrm{End}_{\alpha,m} X = \mathrm{End}_\alpha X$, $\mathrm{End}_{\beta,m} X = \mathrm{End}_\beta X$ с нормами $\|A\|_{1,m}$, $\|A\|_{\alpha,m}$, $\|A\|_{\beta,m}$, эквивалентными соответственно $\|A\|_1$, $\|A\|_\alpha$, $\|A\|_\beta$, и на представлении оператора A в виде $A = C + D$, где оператор С $= \sum\limits_{k \in Z^n,\ -e \le k \le e} A_{k,m}$ (относительно новой системы проекторов) и для него, в случае обратимости, выполнена теорема 2.

Теорема 4. *Пусть A — обратимый оператор из $\mathrm{End}_1 X$. Тогда обратный оператор A^{-1} принадлежит пространству $\mathrm{End}_1 X$ и справедлива оценка*

$$\|A^{-1}\|_1 \le 2^{n+1} M \|A^{-1}\| \left(\frac{\sqrt[n]{1 + 2 \cdot 3^n \chi(A)} + \sqrt[n]{2 \cdot 3^n \chi(A)}}{\sqrt[n]{1 + 4 \cdot 3^n \chi(A)} - \sqrt[n]{4 \cdot 3^n \chi(A)}} \right)^n,$$

где величина M зависит только от $\|A\|$ и $\|A^{-1}\|$.

Теорема 5. *Если обратимый оператор A принадлежит $\operatorname{End}_\beta X$, то обратный оператор A^{-1} принадлежит $\operatorname{End}_\beta X$, причем справедлива оценка*

$$\|A^{-1}\|_\beta \le B \cdot \sup_{k \in Z^n} \beta(k) \left(1 - \frac{1}{1 + 4 \cdot 3^n \chi(A)}\right)^{\frac{|k|}{n}},$$

где величина B зависит только от $\|A\|$, $\|A^{-1}\|$ и функции β.

Теорема 6. *Если обратимый оператор A принадлежит $\operatorname{End}_\alpha X$, а функция α удовлетворяет условию*

$$\lim_{|m| \to \infty} \sup_{\substack{k \in Z^n \\ k < -e,\ k > e \\ -m+e \le j \le m-e}} \frac{\alpha(k)}{\alpha(mk + j)} = 0,$$

то $A^{-1} \in \operatorname{End}_\alpha X$ и имеет место оценка

$$\|A^{-1}\|_\alpha \le L \sum_{k \in Z^n} \alpha(k) \left(1 - \frac{1}{1 + 4 \cdot 3^n \chi(A)}\right)^{\frac{|k|}{n}},$$

где величина L зависит только от $\|A\|$, $\|A^{-1}\|$ и функции α.

Для величин M, B, L из последних трех теорем получены конкретные значения.

Литература

1. Баскаков А.Г. *Абстрактный гармонический анализ и асимптотические оценки элементов обратных матриц* // Матем. заметки. – 1992. – Т. 52. – № 2. – С. 17–25.
2. Баскаков А.Г. *О спектральных свойствах некоторых классов линейных операторов* // Функц. анализ и его прилож. – 1995. – Т. 29. – № 2. – С. 62–64.
3. Demko S., Moss F., Smith W. *Decay rates for inverses of band matrices* // Math. Comput. – 1984. – V. 43. – P. 491–499.

Воронежский государственный университет

Поступила
30.01.1995