ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 7 (470)

УДК 517.968:519.6

Б.Г. ГАБДУЛХАЕВ, И.К. РАХИМОВ

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МОНОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Введение

Работа посвящена точным и приближенным методам решения нелинейного сингулярного интегрального уравнения вида

$$Ax \equiv \lambda F(s, x(s)) + \mu\Phi(s, x(s), J(h(x); s)) = y(s), \tag{1}$$

где сингулярный интеграл

$$J(h(x); s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\sigma, x(\sigma)) \operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2} d\sigma, \quad -\infty < s < \infty, \tag{2}$$

понимается в смысле главного значения по Коши–Лебегу; здесь λ и μ — произвольные вещественные параметры, $F(s, u)$, $h(s, u)$ и $\Phi(s, u, v)$ — известные вещественные непрерывные функции своих аргументов, 2π-периодические по переменной s, а $y(s)$ и $x(s) \in L_2(0, 2\pi)$ — соответственно данная и искомая функции. Основное внимание уделяется квадратурным методам как наиболее удобным в приложениях, но в то же время как наиболее трудным в теоретическом обосновании.

Заметим, что уравнение (1)–(2) является обобщением исследованного в работе [1] уравнения, однако здесь, в отличие от [1], в основу исследований положена в первую очередь теория монотонных операторов [2]. В связи с этим отметим, что подробный обзор исследований по приближенным методам решения сингулярных интегральных уравнений на основе теории монотонных операторов имеется в [3].

Следует также отметить, что частные случаи уравнения (1)–(2) встречаются в многочисленных прикладных задачах (напр., [4]–[11] и библиография в них), поэтому исследование точных и приближенных методов решения уравнения (1)–(2) представляет значительный интерес.

1. О существовании и единственности решения

Пусть выполняются условия

(А) $|F(s, u) - F(s, v)| \le M_1|u - v|$

для любых $s, u, v \in \mathbb{R}$ и некоторой постоянной $M_1 \in \mathbb{R}^+$;

(Б) $\lambda[F(s, u) - F(s, v)](u - v) \ge \lambda m_1|u - v|^2$

для любых $s, u, v \in \mathbb{R}$ и некоторой $m_1 \in \mathbb{R}$;

(В) $|\Phi(s, u, v) - \Phi(s, u_1, v_1)| \le M_2|u - u_1| + M_3|v - v_1|$

для любых $s, u, v, u_1, v_1 \in \mathbb{R}$ и некоторых M_2 и $M_3 \in \mathbb{R}^+$;

(Г) $\mu[\Phi(s, u, v) - \Phi(s, u_1, v)](u - u_1) \ge \mu m_2|u - u_1|^2$

для любых $s, u, v, u_1 \in \mathbb{R}$ и некоторой $m_2 \in \mathbb{R}$;

(Д) $|h(s, u) - h(s, v)| \le M_4|u - v|$

для любых $s, u, v \in \mathbb{R}$ и некоторой $M_4 \in \mathbb{R}^+$.

Кроме того, без ограничения общности будем предполагать, что

(Е) $\psi(s) \equiv \lambda F(s, 0) + \mu\Phi(s, 0, Jh(0)) = 0$.

Для уравнения (1)–(2) в вещественном пространстве $L_2 = L_2(0, 2\pi)$ квадратично суммируемых по Лебегу 2π-периодических функций со скалярным произведением и нормой соответственно

$$(\varphi, \psi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(s)\psi(s)ds \qquad (\varphi, \psi \in L_2),$$
$$\|\varphi\| = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi(s)|^2 ds\right\}^{1/2} \qquad (\varphi \in L_2)$$

справедлива

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (A)–(E), *где*

$$M \equiv |\lambda|M_1 + |\mu|(M_2 + M_3M_4) < \infty, \tag{3}$$
$$m \equiv \lambda m_1 + \mu m_2 - |\mu|M_3M_4 > 0. \tag{4}$$

Тогда уравнение (1) *имеет единственное решение* $x^* \in L_2(0, 2\pi)$ *при любой правой части* $y \in L_2(0, 2\pi)$ *и*

$$\|x^*\| \le m^{-1}\|y\|. \tag{5}$$

2. Итерационный метод

Решение нелинейного сингулярного интегрального уравнения (1) можно найти универсальным итерационным методом при соответствующем выборе итерационных параметров с помощью условий (3) и (4).

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *единственное решение* $x^*(s) \in L_2$ *уравнения* (1) *можно найти как предел в* L_2 *итерационной последовательности*

$$x^i = x^{i-1} + \frac{m}{M^2}(y - Ax^{i-1}), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

при любом начальном приближении $x^0 \in L_2$. *Для погрешности* i*–го приближения* $x^i(t)$ *справедливы оценки*

$$\|x^* - x^i\| \le q^i\|x^* - x^0\| \le \frac{q^i}{1-q}\|x^1 - x^0\|, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

где

$$q = \sqrt{1 - (m/M)^2} < 1. \tag{8}$$

3. Общий проекционный метод и его частные случаи

Возьмем полную ортонормальную систему функций $\{\varphi_r(s)\}_1^\infty$ в $L_2(0, 2\pi)$; в силу сепарабельности $L_2(0, 2\pi)$ такая система всегда существует. Обозначим через $X_n = \mathcal{L}(\{\varphi_r\}_1^n)$ линейную оболочку, натянутую на первые $n \in \mathbb{N}$ элементов этой системы; в том случае, когда каждая функция $\varphi_r = \varphi_{r,n}$ $(r = \overline{1,n})$, т. е. зависит от $n \in \mathbb{N}$ (напр., для сплайновых базисов), считаем, что последовательность подпространств $\{X_n\}_1^\infty$ предельно плотна в пространстве L_2. Обозначим через P_n линейный оператор ортогонального проектирования L_2 на X_n. Тогда уравнение (1) можно аппроксимировать конечномерным уравнением

$$A_nx_n \equiv P_nAx_n = P_ny \quad (x_n, P_ny \in X_n), \tag{9}$$

которое эквивалентно системе нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ)

$$c_r\left(A\sum_{k=1}^n \alpha_k\varphi_k\right) = c_r(y), \quad r = \overline{1,n}, \tag{10}$$

порядка $n \in \mathbb{N}$, где $c_r(f) = (f, \varphi_r)$ — коэффициенты Фурье функции $f \in L_2$ по системе координатных функций $\varphi_r \in L_2$. Функция

$$x_n^*(s) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^* \varphi_k(s), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{11}$$

принимается за приближенное решение уравнения (1), где коэффициенты $\alpha_k^* = \alpha_{k,n}^*$, $k = \overline{1,n}$, образуют решение СНАУ (10).

Теорема 3. *В условиях теоремы* 1 *как уравнение* (9), *так и СНАУ* (10) *однозначно разрешимы при любых $n \in \mathbb{N}$. Приближенные решения* (11) *сходятся в L_2 к точному решению $x^*(s)$ уравнения* (1), *причем для погрешности приближенной формулы $x^*(s) \approx x_n^*(s)$, $s \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, справедливы неулучшаемые по порядку двусторонние оценки*

$$E_n(x^*) \le \|x^* - x_n^*\| \le (M/m) E_n(x^*), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{12}$$

где $E_n(x^*)$ — наилучшее приближение в L_2 функции $x^* \in L_2$ всевозможными элементами из X_n.

Рассмотрим некоторые частные случаи общего проекционного метода (9)–(11).

3.1. *Метод редукции.* Положим

$$n = 2r+1, \;\; i = \sqrt{-1}\,, \;\; \varphi_k(\sigma) = \exp(ik\sigma), \;\; k = 0, \pm 1, \dots,$$

$$x_n(s) = \sum_{k=-r}^{r} \alpha_k e^{iks}, \;\; \alpha_k = \overline{\alpha}_{-k} \in \mathbb{C}, \;\; r+1 \in \mathbb{N}, \tag{13}$$

$$P_n = \Phi_n, \;\; \Phi_n(f;s) = \sum_{k=-r}^{r} c_k(f) e^{iks}, \;\; c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\sigma) e^{-ik\sigma} d\sigma, \tag{14}$$

где $f \in L_2$. Очевидно, $\Phi_n^2 = \Phi_n$, $\Phi_n^* = \Phi_n$. Поэтому в силу (13), (14) метод (9)–(11) представляет собой метод редукции (Галёркина) решения уравнения (1) по тригонометрической системе функций. Тогда сходимость и оценки погрешности этого метода для уравнения (1) следуют из общей теоремы 3.

3.2. *Метод сплайн–подобластей.* Пусть $s_r = 2r\pi/n$, $r = \overline{0,n}$, $n \in \mathbb{N}$, а $\varphi_k(s)$ — характеристические функции интервалов $(s_{k-1}, s_k]$, $k = \overline{1,n}$. Положим

$$x_n(s) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(s), \quad \alpha_k \in \mathbb{R}, \;\; n \in \mathbb{N}, \tag{15}$$

$$P_n = S_n, \;\; S_n(f;s) = \sum_{k=1}^{n} f_k \varphi_k(s), \;\; f_k = \frac{1}{s_k - s_{k-1}} \int_{s_{k-1}}^{s_k} f(\sigma) d\sigma, \tag{16}$$

где $f \in L_2$. Ясно, что здесь $S_n^2 = S_n$, $S_n^* = S_n$ в $L_2(0, 2\pi)$. Поэтому в силу (15)–(16) общий проекционный метод (9)–(11) переходит в метод сплайн-подобластей нулевого порядка; обоснование этого метода также следует из общей теоремы 3.

4. Проекционно-итеративные методы

Сначала рассмотрим простой частный случай. Из теорем 2 и 3 следует

Теорема 4. *Пусть в качестве начального приближения $x^0 \in L_2$ в итерационном методе* (6) *берется приближенное решение $x_n^* \in X_n$ уравнения* (1), *построенное проекционным методом* (9)–(11). *Тогда погрешность k-го приближения $x^* - x^k$ оценивается по формуле*

$$\|x^* - x^k\| \le (M/m) E_n(x^*) q^k,$$

где n и $k \in \mathbb{N}$, а число q определено в (8).

Теперь решение (11) уравнения (9) будем искать итерационным методом вида

$$x_n^j = x_n^{j-1} + (m/M^2)(P_n y - A_n x_n^{j-1}), \quad j, n \in \mathbb{N}, \tag{17}$$

где x_n^0 — произвольное начальное приближение из X_n. Тогда применением теоремы 1 к уравнению (9) легко доказывается

Теорема 5. *В условиях теоремы* 1 *решение* $x_n^* \in X_n$ *уравнения* (9) *можно найти как предел в* L_2 *итерационной последовательности* (17), *причем для любого* $x_n^0 \in X_n$ *справедливы оценки*

$$\|x_n^* - x_n^j\| \le \frac{q^j}{1-q}\|x_n^1 - x_n^\circ\|, \quad n, j \in \mathbb{N}.$$

Из теорем 3 и 5 следует

Теорема 6. *В условиях теоремы* 1 *единственное решение* $x^* \in L_2$ *уравнения* (1) *можно найти как предел*

$$x^* = \lim_{n\to\infty} \lim_{j\to\infty} x_n^j$$

в L_2 *проекционно-итеративной последовательности* (17). *При этом для любых* $n, j \in \mathbb{N}$ *и* $x_n^0 \in X_n$ *справедливы оценки*

$$\|x^* - x_n^j\| \le \frac{M}{m} E_n(x^*) + \frac{q^j}{1-q}\|x_n^1 - x_n^0\|, \tag{18}$$

где число q *определено в* (8).

5. Квадратурные методы

В приложениях большое значение имеют квадратурные методы решения сингулярных интегральных уравнений, основанные на аппроксимации сингулярных операторов конечномерными операторами, порождаемыми квадратурными формулами.

5.1. *Полиномиальный метод квадратур.* Сначала приведем вычислительные схемы этого метода, устанавливаемые на основе работ [1], [12]–[14].

Введем на $[0, 2\pi]$ равноотстоящие узлы

$$s_j = \frac{2j\pi}{N}, \quad j = \overline{0, N}, \quad N \in \mathbb{N}, \tag{19}$$

и приближенное решение уравнения (1) с непрерывными коэффициентами будем искать в виде полинома

$$x_n^*(s) = \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N} \alpha_k^* \Delta_n(s - s_k), \quad n = \left[\frac{N}{2}\right], \tag{20}$$

где

$$2\Delta_n(\varphi) = \begin{cases} \sin\dfrac{N\varphi}{2}\operatorname{cosec}\dfrac{\varphi}{2} & \text{при} \;\; N = 2n+1 \;\; (n+1 \in \mathbb{N}); \\ \sin\dfrac{N\varphi}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2} & \text{при} \;\; N = 2n \;\; (n \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

Приближенные значения $\alpha_k^* = x_n^*(s_k)$, $k = \overline{1, N}$, искомой функции $x^*(s)$ в узлах (19) определяем как решение СНАУ

$$\lambda F(s_j, \alpha_j) + \mu\Phi\left(s_j, \alpha_j, \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\beta_{j-k} h(s_k, \alpha_k)\right) = y(s_j), \quad j = \overline{1, N}, \tag{21}$$

где

$$\beta_{j-k} = \beta_{j-k}(N) = \begin{cases} \operatorname{tg} \dfrac{j-k}{2N}\pi, & \text{если } j-k \text{ четно;} \\ \operatorname{ctg} \dfrac{k-j}{2N}\pi, & \text{если } j-k \text{ нечетно,} \end{cases} \tag{22}$$

при $N = 2n+1$,

$$\beta_{j-k} = \beta_{j-k}(N) = \begin{cases} 0, & \text{если } j-k \text{ четно;} \\ 2\operatorname{ctg} \dfrac{k-j}{N}\pi, & \text{если } j-k \text{ нечетно,} \end{cases} \tag{23}$$

при $N = 2n$.

Для вычислительной схемы (1), (19)–(23) справедливы следующие две теоремы.

Теорема 7. *Если $y \in C_{2\pi}$, то в условиях теоремы 1 СНАУ (21) имеет единственное решение $\alpha_1^*, \ldots, \alpha_N^* \in \mathbb{R}$ при любых $N \in \mathbb{N}$, а приближенное решение (20) удовлетворяет неравенствам*

$$\|x_n^*(s)\| \le \left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} |\alpha_j^*|^2\right)^{1/2} \le \frac{1}{m}\left\{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} |y(s_k)|^2\right\}^{1/2}, \quad N \in \mathbb{N}. \tag{24}$$

Теорема 8. *Пусть непрерывные функции $F(s,u)$, $h(s,u)$, $\Phi(s,u,v)$ и $y(s)$ таковы, что в условиях теоремы 1 решение $x^* \in C_{2\pi}$ и функция $J(g;s) \in C_{2\pi}$, где $g(s) = h(s, x^*(s))$. Тогда метод механических квадратур (19)–(23) сходится в пространстве L_2 со скоростью, определяемой неравенством*

$$\begin{gathered} \|x^* - x_n^*\|_{L_2} \le 2E_{n_1}(x^*)_{C_{2\pi}} + \frac{|\mu| M_3}{m}\left\{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} |J(g - P_n g; s_j)|^2\right\}^{1/2}, \\ n = \left[\frac{N}{2}\right], \ \ n_1 = \left[\frac{N-1}{2}\right], \ \ N \in \mathbb{N}, \end{gathered} \tag{25}$$

где $E_{n_1}(\varphi)_{C_{2\pi}}$ — наилучшее равномерное приближение функции $\varphi \in C_{2\pi}$ тригонометрическими полиномами порядка не выше $n_1 \in \mathbb{N}$, а P_n — определяемый ниже оператор Лагранжа.

Следствие. Пусть в условиях теоремы функции $h(s,u)$ (по каждой из переменных) и $x^*(s)$ удовлетворяют условиям

$$x^*, h \in W^r H^\alpha \quad (r+1 \in \mathbb{N},\ \ 0 < \alpha \le 1).$$

Тогда метод квадратур (19)–(23) сходится в среднем и равномерно со скоростями соответственно

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_2} = O(N^{-r-\alpha}), \qquad r+\alpha > 0; \tag{26}$$

$$\|x^* - x_n^*\|_{C_{2\pi}} = O(N^{-r-\alpha+1/2}), \quad r+\alpha > 1/2. \tag{27}$$

5.2. *Методы сплайн-квадратур.* Рассмотрим еще две схемы метода квадратур. Пусть сначала приближенное решение сингулярного интегрального уравнения (1) с непрерывными коэффициентами ищется в виде сплайна нулевой степени

$$x_N(s) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \psi_k(s), \quad N \in \mathbb{N}, \tag{28}$$

где

$$\psi_k(s) = \{1 \ \text{при} \ s \in (s_{k-1}, s_k];\ \ 0 \ \text{при} \ s \notin (s_{k-1}, s_k]\}, \quad s_k = \frac{2k\pi}{N}.$$

Неизвестные коэффициенты $\alpha_k = x_N(s_k) \in \mathbb{R}$ будем определять из СНАУ

$$\lambda F(\overline{s}_j, \alpha_j) + \mu\Phi\Big(\overline{s}_j, \alpha_j, \sum_{k=1}^{N} h(\overline{s}_k, \alpha_k)\gamma_{j-k}\Big) = y(\overline{s}_j), \quad j = \overline{1, N}, \tag{29}$$

где

$$\overline{s}_j = \frac{2j-1}{N}\pi = s_{j-1/2}, \quad \gamma_{j-k} = \frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{\sin s_{k-j+1/2}}{\sin s_{k-j-1/2}}\right|. \tag{30}$$

Теорема 9. *В условиях теоремы 7 СНАУ (29)–(30) однозначно разрешима при любых $N \in \mathbb{N}$, а приближенные решения (28) удовлетворяют неравенству*

$$\|x_N\| = \left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|\alpha_j|^2\right)^{1/2} \le \frac{1}{m}\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|y(\overline{s}_j)|^2\right)^{1/2}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Теперь приближенное решение уравнения (1) будем искать в виде сплайна первой степени

$$\widetilde{x}_N(s) = \sum_{k=1}^{N}\alpha_k\varphi_k(s), \quad N \in \mathbb{N}, \tag{31}$$

где $\{\varphi_k(s)\}_0^N$ – фундаментальные 2π-периодические сплайны первой степени для сетки узлов (19):

$$\varphi_k(s) = \Big\{0 \ \text{ при } \ s \le s_{k-1} \ \text{ и } \ s \ge s_{k+1}; \ \frac{s - s_{k-1}}{\delta} \ \text{ при } \ s_{k-1} \le s \le s_k; \ \frac{s_{k+1} - s}{\delta} \ \text{ при } \ s_k \le s \le s_{k+1}\Big\}, \quad \delta = \frac{2\pi}{N}.$$

Неизвестные коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ определим из СНАУ

$$\lambda F(s_j, \alpha_j) + \mu\Phi\Big(s_j, \alpha_j, \sum_{k=1}^{N}\delta_{j-k}h(s_k, \alpha_k)\Big) = g(s_j), \quad j = \overline{1, N}, \tag{32}$$

где

$$\delta_{j-k} = \frac{2\pi}{N}\int_0^1 \left[\operatorname{ctg}(j-k+s)\frac{\pi}{N} + \operatorname{ctg}(j-k-s)\frac{\pi}{N}\right](s-1)ds. \tag{33}$$

Теорема 10. *В условиях теоремы 7 СНАУ (32)–(33) имеет единственное решение α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}$ при любых $N \in \mathbb{N}$ и для приближенного решения (31) справедливы неравенства*

$$\|\widetilde{x}_N\| \le \left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^2\right)^{1/2} \le \frac{1}{m}\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|y(s_j)|^2\right)^{1/2}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

6. Квадратурно-итерационные методы

Следует отметить, что система нелинейных уравнений (21)–(23) может быть решена следующим итерационным методом

$$\alpha_j^i = \alpha_j^{i-1} + \frac{m}{M^2}\Big\{y(s_j) - \lambda F(s_j, \alpha_j^{i-1}) - \mu\Phi(s_j, \alpha_j^{i-1}, \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\beta_{j-k}h(s_k, \alpha_k^{i-1}))\Big\}, \quad j = \overline{1, N}, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{34}$$

где $\alpha_1^\circ, \alpha_2^\circ, \ldots, \alpha_N^\circ$ — произвольное начальное приближение.

Теорема 11. *В условиях теоремы 7 итерационный метод (34) сходится к единственному решению $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_N^*$ системы уравнений (21), причем для i-го приближения справедливы оценки*

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|\alpha_j^* - \alpha_j^i|^2\right)^{1/2} \le q^i\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|\alpha_j^* - \alpha_j^\circ|^2\right)^{1/2} \le \frac{q^i}{1-q}\left\{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|\alpha_j^1 - \alpha_j^\circ|^2\right\}^{1/2}, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{35}$$

где постоянная q определена в (8).

Теорема 12. *В условиях теорем 1 и 8 единственное решение уравнения (1) можно найти как предел*

$$x^*(s) = \lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty} x_n^k(s)$$

в $L_2(0, 2\pi)$ квадратурно-итерационной последовательности полиномов

$$x_n^i(s) = \frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^i\Delta_n(s - s_j), \quad n = \left[\frac{N}{2}\right], \ \ i = 1, 2, \ldots\,; \ \ N = 1, 2, \ldots,$$

где α_j^i определены в (34). *При этом для любых $N, i \in \mathbb{N}$ справедливы оценки*

$$\|x^* - x_n^i\|_{L_2} \le 2E_{n_1}(x^*)_{C_{2\pi}} + \frac{|\mu|M_3}{m}\left\{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|J(g - P_n g; s_j)|^2\right\}^{1/2} + \frac{q^i}{1-q}\left\{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|\alpha_j^1 - \alpha_j^\circ|^2\right\}^{1/2},$$

$$n = \left[\frac{N}{2}\right], \ \ n_1 = \left[\frac{N-1}{2}\right],$$

где q, g, α_j^1 и α_j° определены в теоремах 2 и 8.

7. Доказательства теорем

Доказательства будем проводить с помощью результатов теории монотонных операторов (напр., [2] и библиография в ней) и результатов теории приближения функций и операторов, изложенных в [1], [8], [9], [11]–[14].

Доказательство теоремы 1. В силу условий (А), (В) и линейности оператора J из (2) для любых $s \in \mathbb{R}$ и $x, z \in L_2$ находим

$$|A(x;s) - A(z;s)| \le |\lambda|M_1|x - z| + |\mu|[M_2|x - z| + M_3|J[h(x) - h(z); s]|]. \tag{36}$$

Поскольку

$$\|J\| = 1, \quad J : L_2 \to L_2, \tag{37}$$

то в силу условия (Д) для любых $x, z \in L_2$ имеем

$$\|J[h(x) - h(z)]\| \le M_4\|x - z\|. \tag{38}$$

Из соотношений (36)–(38) следует неравенство

$$\|Ax - Az\| \le M\|x - z\| \quad (x, z \in L_2), \tag{39}$$

где постоянная M определена в (3).

Для любых $s \in \mathbb{R}$ и $x, z \in L_2$ справедливо представление

$$Ax - Az = \lambda[F(s,x) - F(s,z)] + \mu[\Phi(s,x,Jh(x)) - \Phi(s,z,Jh(x))] + \mu[\Phi(s,z,Jh(x)) - \Phi(s,z,Jh(z))].$$

Отсюда в силу условий (Б) и (Г) находим

$$(Ax - Az)(x - z) \ge \lambda m_1|x - z|^2 + \mu m_2|x - z|^2 - |\mu|M_3|J[h(x) - h(z)]|\,|x - z| \ \ (s \in \mathbb{R}; x, z \in L_2). \tag{40}$$

Из неравенства (40) с учетом (37), (38) находим

$$(Ax - Az, x - z) \geq m\|x - z\|^2 \quad (x, z \in L_2), \tag{41}$$

где постоянная m определена в (4).

Таким образом, оператор $A : L_2 \to L_2$, определяемый левой частью уравнения (1), удовлетворяет условию Липшица с постоянной M и сильно монотонен с постоянной m, приведенными в (3) и (4) соответственно. Тогда из соответствующих результатов [2] получаем утверждение теоремы 1 с оценками (5).

Доказательство теоремы 2. Уравнение (1) эквивалентно заданному в L_2 операторному уравнению

$$x = \left(E - \frac{m}{M^2}A\right)x + \frac{m}{M^2}y \quad (x, y \in L_2), \tag{42}$$

где оператор перехода $B = E - \frac{m}{M^2}A : L_2 \to L_2$ в силу условий (39) и (41) является сжимающим оператором с коэффициентом сжатия q, определенным в (8). Тогда универсальный итерационный метод (6) решения исходного уравнения (1) является методом простой итерации для вспомогательного уравнения (42). Отсюда с помощью известных результатов (напр., [2], [15]) по последнему методу находим оценки (7), откуда и следует требуемое утверждение.

Доказательство теоремы 3. Оператор $P_n : L_2 \to X_n \subset L_2$, использованный в теореме 3, удовлетворяет условиям

$$P_n^2 = P_n, \quad P_n^* = P_n, \quad \|P_n\| = 1,\ n \in \mathbb{N}. \tag{43}$$

Поэтому в силу (39), (41) и (43) для любых $x_n, z_n \in X_n$ находим соотношения

$$\|A_n x_n - A_n z_n\| = \|P_n(Ax_n - Az_n)\| \leq \|Ax_n - Az_n\| \leq M\|x_n - z_n\| \quad (x_n, z_n \in X_n), \tag{44}$$

$$\begin{gathered}(A_n x_n - A_n z_n, x_n - z_n) = (P_n(Ax_n - Az_n), x_n - z_n) = \\ = (Ax_n - Az_n, P_n^*(x_n - z_n)) = (Ax_n - Az_n, x_n - z_n) \geq m\|x_n - z_n\|^2 \quad (x_n, z_n \in X_n),\end{gathered} \tag{45}$$

где постоянные M и m определены в (3) и (4) соответственно. Теперь, применяя к уравнению (9) теорему 1, в силу неравенств (44) и (45) убеждаемся в справедливости первой части утверждения теоремы 3; для доказательства второй части утверждения теоремы достаточно показать справедливость неравенств (12). Левая часть этих неравенств очевидна в силу $x_n^* \in X_n$, а для доказательства правой части воспользуемся тождеством

$$(Ax^* - Ax_n^*, x^* - x_n^*) = (Ax^* - Ax_n^*, x^* - P_n x^*),$$

где x_n^* — решение уравнения (9). Отсюда, как и в ([2], с. 103), находим

$$\|x^* - x_n^*\| \leq (M/m)E_n(x^*), \quad n \in \mathbb{N},$$

откуда с учетом определения $E_n(x^*)$ в пространстве L_2 следует требуемое утверждение.

О доказательствах теорем 4–6 указано в разделе 4. Здесь отметим только то, что выбором в (18) номера итерации $j \in \mathbb{N}$ (параметра дискретизации $n \in \mathbb{N}$) как функции от n (соответственно от j) погрешность проекционно–итеративного метода (17) может быть в определенном смысле ([8], гл. 2, § 7) минимизирована.

Доказательство теоремы 7. Пусть $\mathbb{R}^N$ — пространство N-мерных векторов с обычными скалярным произведением и нормой соответственно

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \beta_k \quad (\overline{x} = \{\alpha_k\}_1^N \in \mathbb{R}^N,\ \ \overline{y} = \{\beta_k\}_1^N \in \mathbb{R}^N),$$

$$\|\overline{x}\| = \left\{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} |\alpha_k|^2\right\}^{1/2}, \quad \overline{x} \in \mathbb{R}^N,\ \ N \in \mathbb{N}.$$

Систему нелинейных алгебраических уравнений (21)–(23) запишем в виде операторного уравнения

$$\overline{A}\overline{x} = \overline{y} \quad (\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^N), \tag{46}$$

где $\overline{x} = \{\alpha_k\}_1^N$, $\overline{y} = \{y(s_k)\}_1^N$, $\overline{A}\overline{x} = \overline{\eta} = \{\eta_k\}_1^N$, а

$$\eta_j = \lambda F(s_j, \alpha_j) + \mu \Phi\biggl(s_j, \alpha_j, \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \beta_{j-k} h(s_k, \alpha_k)\biggr), \quad j = \overline{1, N}. \tag{47}$$

Покажем, что для любых $\overline{x} = \{a_k\}_1^N$ и $\overline{z} = \{b_k\}_1^N$ матричный оператор $\overline{A} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ удовлетворяет неравенствам

$$\|\overline{A}\overline{x} - \overline{A}\overline{z}\| \le M\|\overline{x} - \overline{z}\|, \tag{48}$$

$$(\overline{A}\overline{x} - \overline{A}\overline{z}, \overline{x} - \overline{z}) \ge m\|\overline{x} - \overline{z}\|^2, \tag{49}$$

где постоянные M и m приведены в теореме 1, а скалярное произведение и норма определены в пространстве $\mathbb{R}^N$.

Из (29), (46), (47) с учетом условий (A) и (B) для любых $\overline{x}, \overline{z} \in \mathbb{R}^N$ находим

$$\begin{aligned}
\|\overline{A}\overline{x} - \overline{A}\overline{z}\| &\le |\lambda| \biggl\{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} |F(s_j, a_j) - F(s_j, b_j)|^2\biggr\}^{1/2} + \\
&+ |\mu| \biggl\{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \biggl|\Phi\biggl(s_j, a_j, \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\beta_{j-k} h(s_k, a_k)\biggr) - \Phi\biggl(s_j, b_j, \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\beta_{j-k} h(s_k, b_k)\biggr)\biggr|^2\biggr\}^{1/2} \le \\
&\le |\lambda| M_1 \biggl\{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|a_j - b_j|^2\biggr\}^{1/2} + |\mu| M_2 \biggl\{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|a_j - b_j|^2\biggr\}^{1/2} + \\
&+ |\mu| M_3 \biggl\{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\biggl|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\beta_{j-k}[h(s_k, a_k) - h(s_k, b_k)]\biggr|^2\biggr\}^{1/2} = \\
&= (|\lambda| M_1 + |\mu| M_2)\|\overline{x} - \overline{y}\| + |\mu| M_3 \sigma_N,
\end{aligned} \tag{50}$$

где

$$\sigma_N = \biggl\{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\biggl|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\beta_{j-k}[h(s_k, a_k) - h(s_k, b_k)]\biggr|^2\biggr\}^{1/2}. \tag{51}$$

Положим

$$x_n(s) = \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N} a_k \Delta_n(s - s_k), \quad a_k = x_n(s_k), \tag{52}$$

$$z_n(s) = \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N} b_k \Delta_n(s - s_k), \quad b_k = y_n(s_k), \tag{53}$$

$$P_n(\varphi; s) = \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N} \varphi(s_k)\Delta_n(s - s_k), \quad \varphi \in C_{2\pi}, \;\; n = \biggl[\frac{N}{2}\biggr], \tag{54}$$

где функция $\Delta_n(t)$ и узлы s_k определены выше.

Известно ([1], с. 6–8; [8], гл. 3), что

$$\sigma_N = \biggl\{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} |J(P_n\psi; s_j)|^2\biggr\}^{1/2} \le \biggl\{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} |\psi(s_j)|^2\biggr\}^{1/2}, \tag{55}$$

где $\psi(s) = h(s, x_n(s)) - h(s, z_n(s))$, а оператор J определен в (2). Тогда из (51)–(55) с учетом условия (Д) находим

$$\sigma_N \le \left\{ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} |h(s_j, x_n(s_j)) - h(s_j, z_n(s_j))|^2 \right\}^{1/2} \le M_4 \left\{ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} |a_j - b_j|^2 \right\}^{1/2} = M_4 \|\overline{x} - \overline{z}\|. \quad (56)$$

Из (50), (51), (56) следует

$$\|\overline{A}\overline{x} - \overline{A}\overline{z}\| \le (|\lambda| M_1 + |\mu| M_2 + |\mu| M_3 M_4) \|\overline{x} - \overline{z}\| = M \|\overline{x} - \overline{z}\| \quad (\overline{x}, \overline{z} \in \mathbb{R}^N),$$

т. е. неравенство (48) доказано.

Для любых $\overline{x} = \{a_k\}_1^N$ и $\overline{z} = \{b_k\}_1^N \in \mathbb{R}^N$ из (46), (47) находим

$$\begin{aligned}
(\overline{A}\overline{x} - \overline{A}\overline{z}, \overline{x} - \overline{z}) = \lambda \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} [F(s_j, a_j) - F(s_j, b_j)](a_j - b_j) + \\
+ \frac{\mu}{N} \sum_{j=1}^{N} \left[\Phi\left(s_j, a_j, \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \beta_{j-k} h(s_k, a_k)\right) - \Phi\left(s_j, b_j, \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \beta_{j-k} h(s_k, b_k)\right) \right] (a_j - b_j) = \\
= \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^{N} [F(s_j, a_j) - F(s_j, b_j)](a_j - b_j) + \\
+ \frac{\mu}{N} \sum_{j=1}^{N} \left[\Phi\left(s_j, a_j, \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \beta_{j-k} h(s_k, a_k)\right) - \Phi\left(s_j, b_j, \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \beta_{j-k} h(s_k, a_k)\right) \right] (a_j - b_j) + \\
+ \frac{\mu}{N} \sum_{j=1}^{N} \left[\Phi\left(s_j, b_j, \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \beta_{j-k} h(s_k, a_k)\right) - \Phi\left(s_j, b_j, \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \beta_{j-k} h(s_k, b_k)\right) \right] (a_j - b_j) = \\
= \lambda \Sigma_1 + \mu \Sigma_2 + \mu \Sigma_3, \quad (57)
\end{aligned}$$

где смысл сумм Σ_i очевиден.

В силу условия (Б) для суммы Σ_1 имеем

$$\lambda \Sigma_1 \ge \lambda m_1 \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} |a_j - b_j|^2 = \lambda m_1 \|\overline{x} - \overline{z}\|^2 \quad (\overline{x}, \overline{z} \in \mathbb{R}^N). \quad (58)$$

Аналогично, в силу условия (Г) для суммы Σ_2 имеем

$$\mu \Sigma_2 \ge \mu m_2 \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} |a_j - b_j|^2 = \mu m_2 \|\overline{x} - \overline{z}\|^2 \quad (\overline{x}, \overline{z} \in \mathbb{R}^N). \quad (59)$$

Из (57)–(59) для любых $\overline{x}, \overline{z} \in \mathbb{R}^N$ находим

$$(\overline{A}\overline{x} - \overline{A}\overline{z}, \overline{x} - \overline{z}) \ge (\lambda m_1 + \mu m_2) \|\overline{x} - \overline{z}\|^2 - |\mu| \, |\Sigma_3|, \quad (60)$$

где в силу условия (В) и соотношений (56) имеем

$$\begin{aligned}
|\Sigma_3| \le \left\{ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \left| \Phi\left(s_j, b_j, \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \beta_{j-k} h(s_k, a_k)\right) - \right.\right. \\
\left.\left. - \Phi\left(s_j, b_j, \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \beta_{j-k} h(s_k, b_k)\right) \right|^2 \right\}^{1/2} \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} |a_j - b_j|^2 \right)^{1/2} \le \\
\le M_3 \|\overline{x} - \overline{z}\| \left\{ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \beta_{j-k} h(s_k, a_k) - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \beta_{j-k} h(s_k, b_k) \right|^2 \right\}^{1/2} =
\end{aligned}$$

$$= M_3\|\overline{x}-\overline{z}\|\left\{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\beta_{j-k}\psi(s_k)\right|^2\right\}^{1/2} =$$

$$= M_3\|\overline{x}-\overline{z}\|\sigma_N = M_3\|\overline{x}-\overline{z}\|\left\{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|J(P_n\psi;s_j)|^2\right\}^{1/2} \le M_3M_4\|\overline{x}-\overline{z}\|^2 \quad (\overline{x},\overline{z}\in\mathbb{R}^N). \quad (61)$$

Из (60) и (61) для любых $\overline{x},\overline{z}\in\mathbb{R}^N$ получаем

$$(\overline{A}\overline{x}-\overline{A}\overline{z},\overline{x}-\overline{z}) \ge (\lambda m_1+\mu m_2-|\mu|M_3M_4)\|\overline{x}-\overline{z}\|^2 \equiv m\|\overline{x}-\overline{z}\|^2,$$

тем самым неравенство (49) доказано.

Таким образом, матричный оператор $\overline{A}$ в пространстве $\mathbb{R}^N$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной M и является сильно монотонным с постоянной m. Поэтому из теории монотонных операторов [2] для уравнения (46) следует, что система уравнений (21)–(23) имеет единственное решение $\alpha_1^*,\dots,\alpha_N^*$ и для него в силу неравенства (53) справедливы соотношения

$$\|\overline{x}^*\| = \left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}|\alpha_k^*|^2\right)^{1/2} \le \frac{1}{m}\|\overline{y}\| = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|y(s_k)|^2\right)^{1/2}. \quad (62)$$

Известно (напр., [1], с. 6), что

$$\|x_n\|_{L_2} = \|\overline{x}\|_{\mathbb{R}^N} \qquad \text{при} \quad N=2n+1, \quad (63)$$

$$\|x_n\|_{L_2} \le \|\overline{x}\|_{\mathbb{R}^N} \le \sqrt{2}\,\|x_n\|_{L_2} \quad \text{при} \quad N=2n, \quad (64)$$

где $\overline{x}=\{\alpha_k\}_1^N, \alpha_k=x_n(s_k)$, а многочлен $x_n(s)$ определен выше.

Из (62)–(64) следуют оценки (24).

Доказательство теоремы 8. Каждой функции $\varphi(s)\in C_{2\pi}$ поставим в соответствие N-периодический вектор $\overline{\varphi}=\{\varphi(s_k)\}_1^N\in\mathbb{R}^N$ и интерполяционный полином (54). Тогда ясно, что $\overline{P_n\varphi}=\overline{\varphi}\in\mathbb{R}^N$ для любой $\varphi\in C_{2\pi}$.

В доказанном выше неравенстве (49) положим $\overline{x}=\overline{x}^*=\{\alpha_k^*\}_1^N$ и $\overline{z}=\overline{x^*}=\{x^*(s_k)\}_1^N\in\mathbb{R}^N$, где $x^*(s)$ — решение уравнения (1)–(2), а $\alpha_1^*,\dots,\alpha_N^*$ — решение системы уравнений (21)–(23). Тогда в силу (1) и (19)–(23) последовательно находим

$$\overline{A}\overline{x}=\overline{A}\overline{x}^*\equiv\overline{y}=\overline{Ax^*}=\{\lambda F(s_j,x^*(s_j))+\mu\Phi(s_j,x^*(s_j),J(g;s_j))\}_1^N, \quad (65)$$

$$\overline{A}\overline{z}=\overline{A}\overline{x^*}=\{\lambda F(s_j,x^*(s_j))+\mu\Phi(s_j,x^*(s_j),J(P_ng;s_j))\}_1^N, \quad (66)$$

где $g(\sigma)=h(\sigma,x^*(\sigma))$, а $y(s)\in C_{2\pi}$ — правая часть уравнения (1), $\overline{y}=\{y(s_k)\}_1^N\in\mathbb{R}^N$. Поэтому из формул (49), (65), (66) получаем

$$\|\overline{x}^*-\overline{x^*}\|_{\mathbb{R}^N} = \left\{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|\alpha_j^*-x^*(s_j)|^2\right\}^{1/2} \le \frac{1}{m}\,\|\overline{A}\overline{x}^*-\overline{A}\overline{x^*}\|_{\mathbb{R}^N} =$$

$$= \frac{|\mu|}{m}\left\{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|\Phi(s_j,x^*(s_j),J(g;s_j))-\Phi(s_j,x^*(s_j),J(P_ng;s_j))|^2\right\}^{1/2}. \quad (67)$$

Из неравенства (71) с учетом условия (В) находим

$$\left\{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|x^*(s_j)-\alpha_j^*|^2\right\}^{1/2} \le \frac{|\mu|M_3}{m}\left\{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|J(g;s_j)-J(P_ng;s_j)|^2\right\}^{1/2} =$$

$$= \frac{|\mu|M_3}{m}\left\{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[h(\sigma;x^*(\sigma))-P_nh(\sigma;x^*(\sigma))]\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s_j}{2}d\sigma\right|^2\right\}^{1/2}. \quad (68)$$

Известно (напр., [8], гл. 3), что

$$\|x^* - P_n x^*\|_{L_2} \le 2E_{n_1}(x^*)_{C_{2\pi}}, \quad n_1 = \left[\frac{N-1}{2}\right], \quad x^* \in C_{2\pi}, \tag{69}$$

$$\|P_n x^* - x_n^*\|_{L_2} = \|P_n(x^* - x_n^*)\|_{L_2} \le \|\overline{x^* - x_n^*}\|_{\mathbb{R}^N} = \left\{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} |x^*(s_j) - \alpha_j^*|^2\right\}^{1/2}. \tag{70}$$

Поскольку $\|x^* - x_n^*\| \le \|x^* - P_n x^*\| + \|P_n x^* - x_n^*\|$, где $x^*(s)$ и $x_n^*(s)$ — точное и соответственно приближенное решения уравнения (1), то из соотношений (68)–(70) следует оценка (25). Так как $E_n(x^*)_{C_{2\pi}} \to 0$, $n \to \infty$, то в силу (25) для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} |J(g - P_n g; s_j)|^2\right\}^{1/2} = 0, \quad g(\sigma) = h(\sigma; x^*(\sigma)). \tag{71}$$

Для любого тригонометрического полинома $Q_n(s)$ порядка не выше $n-1 \in \mathbb{N}$ справедливо тождество

$$J(g - P_n g) = J(E - P_n)(g - Q_n), \tag{72}$$

где E — единичный оператор.

Пусть $Q_n(s) = S_n(g; s)$, где S_n — некоторый (определяемый ниже) тригонометрический полиномиальный оператор, перестановочный с оператором J. Тогда тождество (72) принимает вид

$$J(g - P_n g) = (\tilde{g} - S_n\tilde{g}) - JP_n(g - S_n g), \quad \tilde{g} = Jg. \tag{73}$$

Из тождества (73) получаем неравенства

$$\|\overline{J(g - P_n g)}\|_{\mathbb{R}^N} \le \|\overline{\tilde{g} - S_n\tilde{g}}\|_{\mathbb{R}^N} + \|\overline{JP_n(g - S_n g)}\|_{\mathbb{R}^N} \le \|\tilde{g} - S_n\tilde{g}\|_{C_{2\pi}} + \|\overline{JP_n(g - S_n g)}\|_{\mathbb{R}^N}. \tag{74}$$

Известно ([1], с. 6–8), что для любой $\varphi(s) \in C_{2\pi}$

$$\|\overline{JP_n\varphi}\|_{\mathbb{R}^N} \le \|\overline{\varphi}\|_{\mathbb{R}^N} \le \|\varphi\|_{C_{2\pi}}, \quad N \in \mathbb{N}. \tag{75}$$

Из (73)–(75) при $\varphi = g - S_n g$ следует неравенство

$$\left\{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} |J(g - P_n g; s_j)|^2\right\}^{1/2} \le \|g - S_n g\|_{C_{2\pi}} + \|\tilde{g} - S_n\tilde{g}\|_{C_{2\pi}}. \tag{76}$$

Полагая $S_n = \sigma_{n-1}$, где $\sigma_{n-1}(g; s)$ — сумма Фейера порядка $n-1 \in \mathbb{N}$ для функции $g \in C_{2\pi}$, из (76) получаем требуемое соотношение (71).

Для доказательства оценки (26) в неравенстве (76) за оператор S_n достаточно принять оператор Валле–Пуссена порядка $n-1$ или же операторы обобщенного суммирования рядов Фурье с помощью так называемых λ-матриц, в том числе матриц Фавара и Валле–Пуссена (подробности можно найти., напр., в ([8], гл. 3, 4)). Оценка (27) обычным способом выводится из оценки (26).

Теорема 8 и ее следствие доказаны.

Доказательство теорем 9 и 10 проводится по схеме доказательства теорем 7 и 8, при этом за основу берутся теоремы 1.12 и соответственно 1.13 из ([11], гл. 4).

В связи с теоремами 7–10 отметим, что аналогичные утверждения справедливы также для СНАУ

$$\lambda F(s_j, \alpha_j) + \mu\Phi\left(s_j, \alpha_j, \frac{1}{N}\sum_{\substack{k=1\\k\ne j}}^{N} h(s_k, \alpha_k)\operatorname{ctg}\frac{(k-j)\pi}{N}\right) = y(s_j), \quad s_j = \frac{2j\pi}{N}, \quad j = \overline{1, N}, \quad N \in \mathbb{N},$$

аппроксимирующей нелинейное сингулярное интегральное уравнение (1)–(2).

Доказательство теоремы 11. Итерационный метод (35) эквивалентен методу

$$\overline{x}^i = \overline{x}^{i-1} + \frac{m}{M^2}(\overline{y} - \overline{A}\overline{x}^{i-1}), \quad i = 1, 2, \ldots, \quad \overline{x}^\circ = \{\alpha_k^\circ\}_1^N \in \mathbb{R}^N, \tag{77}$$

являющемуся универсальным итерационным методом решения уравнения (46). Тогда, как и в теореме 2, но с учетом теоремы 9, находим, что матричный оператор

$$\overline{B} = E - \frac{m}{M^2}\overline{A} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$$

является оператором сжатия с коэффициентом $q \in (0, 1)$, определенным в (8). Отсюда и из (77) выводится требуемое утверждение.

Теорема 12 выводится из теорем 8 и 11.

Литература

1. Габдулхаев Б.Г. *Квадратурно–итерационный метод решения нелинейных сингулярных интегральных уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 1974. – № 11. – С. 4–15.
2. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* – М.: Мир, 1978. – 336 с.
3. Рахимов И.К. *Прямые методы решения нелинейных сингулярных интегральных уравнений с монотонными операторами*: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1998. – 150 с.
4. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике.* – М.: Наука, 1968. – 512 с.
5. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977. – 638 с.
6. Гусейнов А.И., Мухтаров Х.Ш. *Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений.* – М.: Наука, 1980. – 414 с.
7. Габдулхаев Б.Г. *Конечномерные аппроксимации сингулярных интегралов и прямые методы решения особых интегральных и интегро-дифференциальных уравнений* // Итоги науки и техники. Матем. анализ. – М.: ВИНИТИ, 1980. – Вып. 18. – С. 251–307.
8. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.
9. Габдулхаев Б.Г. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений* I*–рода.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1994. – 288 с.
10. Лифанов И.К. *Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент.* – М.: ТОО “Янус”, 1995. – 519 с.
11. Габдулхаев Б.Г. *Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1995. – 230 с.
12. Габдулхаев Б.Г. *Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений методом механических квадратур* // ДАН СССР. – 1968. – Т. 179. – № 2. – С. 260–263.
13. Габдулхаев Б.Г. *Об одном общем квадратурном процессе и его применении к приближенному решению сингулярных интегральных уравнений* //ДАН СССР. – 1968. – Т. 179. – № 3. – С. 515–517.
14. Габдулхаев Б.Г. *Методы решения сингулярных интегральных уравнений с положительными операторами* // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33. – № 3. – С. 400–410.
15. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П. и др. *Приближенное решение операторных уравнений.* – М.: Наука, 1969. – 456 с.

Казанский государственный университет

Поступила
27.02.2001