ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 10 (425)

УДК 517.955

С.П. БАУТИН, А.Л. КАЗАКОВ

ОДНА ЗАДАЧА КОШИ С НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ НА РАЗНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ДЛЯ СИСТЕМЫ С ОСОБЕННОСТЬЮ

Строятся аналитические решения квазилинейной системы уравнений с частными производными в случае, когда начальные данные для разных функций заданы на разных поверхностях и получившаяся задача имеет конкретную особенность вида u/x или x/u. Указаны необходимые и достаточные условия существования и единственности решения поставленной задачи в виде формальных степенных рядов, а также достаточные условия сходимости этих рядов. Приведено одно обобщение рассмотренных задач, которое необходимо исследовать при построении течений идеального газа, возникающих за отраженной от оси или центра симметрии ударной волной.

Для систем уравнений с частными производными хорошо изучена задача Коши (зК), для которой в случае аналитичности всех входных данных справедлива теорема Коши-Ковалевской (тКК) ([1], с. 23; [2], с. 50). Рассмотрена обобщенная зК (зК с начальными данными на разных поверхностях) [3], [4] и доказаны соответствующие обобщения тКК. Для линейных интегро-дифференциальных уравнений с особенностью рассмотрена задача Гурса и доказан аналог тКК [5]. Если у поставленной зК обращается в нуль определитель матрицы, стоящей перед вектором выводящих производных, то возникает много различных ситуаций. В частности, имеет место характеристическая зК, для которой доказан соответствующий аналог тКК [6]. В данной работе рассмотрен один специальный случай зК с начальными данными на разных поверхностях, когда также обращается в нуль определитель соответствующей матрицы. Этот случай эквивалентен наличию в задаче особенности вида u/x или x/u.

Рассмотрим задачу Коши с начальными данными на разных поверхностях для квазилинейной системы в простейшем случае двух неизвестных функций, зависящих от двух независимых переменных,

$$A\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} u_y \\ v_y \end{pmatrix} = \vec{C}. \tag{1}$$

Здесь A, B — матрицы размерности 2×2, $\vec{C}\in R^2$, коэффициенты матриц A, B и компоненты вектора $\vec{C}$ есть функции от x, y, u, v. На двух разных кривых $\phi_i(x,y)=0$, $i=1,2$, пересекающихся в точке (x_0,y_0), поставим для неизвестных функций два начальных условия

$$\Phi_i(x,y,u,v)\big|_{\phi_i(x,y)=0}=0, \quad i=1,2. \tag{2}$$

Здесь ϕ_i, Φ_i, $i=1,2$, — заданные функции своих аргументов,

$$\phi_i(x_0,y_0)=0, \quad \Phi_i(x_0,y_0,u_0,v_0)=0, \quad x_0,y_0,u_0,v_0 \text{ — const}.$$

Задача (1), (2) есть зК с начальными данными на разных поверхностях для квазилинейной системы, которая далее для краткости называется задачей А.

Работа финансировалась Государственным комитетом Российской Федерации по высшему образованию через грантовый центр по исследованиям в области математики при Новосибирском государственном университете.

Сделаем замену переменных

$$x' = \phi_1(x,y), \quad y' = \phi_2(x,y), \quad u' = \Phi_1(x,y,u,v), \quad v' = \Phi_2(x,y,u,v)$$

с якобианом преобразования

$$J = J_1 J_2, \quad J_1 = \begin{vmatrix} \phi_{1x} & \phi_{1y} \\ \phi_{2x} & \phi_{2y} \end{vmatrix}, \quad J_2 = \begin{vmatrix} \Phi_{1u} & \Phi_{1v} \\ \Phi_{2u} & \Phi_{2v} \end{vmatrix}.$$

Полученную в результате этой замены систему квазилинейных дифференциальных уравнений разрешим относительно u_x, v_y (здесь и далее штрихи у новых переменных для облегчения написания опущены). Таким образом, задачу (1), (2) привели к нормальному виду с нулевыми начальными данными, поставленными на координатных осях

$$\begin{gathered} u_x = a(x,y,u,v)u_y + b(x,y,u,v)v_x + f(x,y,u,v), \\ v_y = c(x,y,u,v)u_y + d(x,y,u,v)v_x + g(x,y,u,v), \\ u(0,y) = 0, \quad v(x,0) = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Для возможности перехода от вида (1), (2) к виду (3) достаточно потребовать отличия от нуля в заданной точке определителей J_1, J_2 и соответствующего определителя, составленного из коэффициентов, стоящих перед производными u_x, v_y в системе (1) после проведения указанной замены. Будем предполагать, что задача (3) имеет конкретную особенность

$$f(x,y,u,v) = f_1(x,y,u,v)/x, \quad g(x,y,u,v) = g_1(x,y,u,v)/x.$$

Решение задачи (3) будем строить в классе аналитических функций и поэтому потребуем выполнения необходимых условий разрешимости задачи (3)

$$f_1\big|_{x=0,\,u=0} = g_1\big|_{x=0,\,u=0} = 0, \tag{4}$$

которые получаются, если уравнения в (3) домножить на x и положить $x = u = 0$. Тогда f_1 и g_1 имеют вид

$$\begin{gathered} f_1 = uf_2(x,y,u,v) + xf_3(x,y,u,v), \\ g_1 = ug_2(x,y,u,v) + xg_3(x,y,u,v) \end{gathered}$$

и задача (3) записывается следующим образом:

$$\begin{gathered} u_x = a(x,y,u,v)u_y + b(x,y,u,v)v_x + \frac{u}{x}f_2(x,y,u,v) + f_3(x,y,u,v), \\ v_y = c(x,y,u,v)u_y + d(x,y,u,v) + \frac{u}{x}g_2(x,y,u,v) + g_3(x,y,u,v), \\ u(0,y) = 0, \quad v(x,0) = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Теорема 1. *Пусть в задаче (5) функции a, b, c, d, f_2, g_2, f_3, g_3 являются аналитическими в некоторой окрестности точки $O(x=0,\ y=0,\ u=0,\ v=0)$. Введем константы*

$$\begin{gathered} A_0 = a(O), \quad B_0 = b(O), \quad C_0 = c(O), \quad D_0 = d(O), \\ f_0 = f_2(0), \quad g_0 = g_2(0), \\ A_n = nA_0/(n-f_0), \quad B_n = nB_0/(n-f_0), \quad C_n = C_0 + A_0 g_0/(n-f_0), \\ D_n = D_0 + B_0 g_0/(n-f_0) \end{gathered} \tag{6}$$

и две числовые последовательности Δ_n, δ_n по формулам

$$\begin{gathered} \Delta_0 = 1, \quad \delta_0 = 0, \quad \delta_{n+1} = 1 + A_{n+1}D_{n+1}B_n\delta_n/(B_{n+1}\Delta_n), \\ \Delta_{n+1} = 1 - C_{n+2}B_{n+1}\delta_{n+1}, \ \textit{если } B_0 \neq 0; \\ \Delta_n = 1, \quad \delta_n = 1, n \in \mathbf{N}, \ \textit{если } B_0 = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

Если выполняются условия

$$\Delta_n \neq 0, \quad f_0 \neq n, \quad n \in \mathbf{N}; \tag{8}$$

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = \delta_\infty, \quad |\delta_\infty| < +\infty, \lim_{n\to\infty} \Delta_n = \Delta_\infty \neq 0, \quad |\Delta_\infty| < +\infty; \tag{9}$$

$$|A_0 D_0|/\Delta_\infty^2 < 1, \tag{10}$$

то у задачи (5) *существует единственное локально аналитическое решение. При этом условия* (8) *являются необходимыми и достаточными условиями существования и единственности решения в виде формальных степенных рядов.*

Доказательство теоремы 1. Прежде, чем строить решение задачи (5) в виде формальных степенных рядов, а затем доказывать их сходимость, в задаче (5) делается замена переменных

$$x' = \varepsilon_1 x, \quad y' = \varepsilon_2 y, \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \text{— const} > 0,$$

где ε_1 и ε_2 выбираются следующим образом. Если

$$|A_0| < |\Delta_\infty|, \quad |D_0| < |\Delta_\infty|, \tag{11}$$

то $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, т. е. замена не производится. Если $|A_0| < |\Delta_\infty| \leq |D_0|$, то $\varepsilon_2 = 1$, а за ε_1 выбирается любое число, удовлетворяющее неравенствам $|A_0|/|\Delta_\infty| < \varepsilon_1 < |\Delta_\infty|/|D_0|$. Это возможно в силу (9), (10), поскольку $0 < |\Delta_\infty| \leq |D_0|$. Если же $|D_0| < |\Delta_\infty| \leq |A_0|$, то $\varepsilon_1 = 1$, а за ε_2 выбираем число, удовлетворяющее неравенствам $|D_0|/|\Delta_\infty| < \varepsilon_2 < |\Delta_\infty|/|A_0|$, что также возможно при условиях (9), (10). Случай $|\Delta_\infty| \leq |A_0|$, $|\Delta_\infty| \leq |D_0|$ невозможен в силу условия (10). В результате такой замены задача (5) перейдет в задачу

$$\begin{gathered} u_{x'} = a' u_{y'} + b' v_{x'} + \frac{u}{x'} f_2 + f_3, \\ v_{y'} = c' u_{y'} + d' v_{x'} + \frac{u}{x'} g_2 + g_3, \\ u(0, y') = 0, \quad v(x', 0) = 0, \end{gathered} \tag{12}$$

где в аргументах у функций надо заменить x, y на x'/ε_1, y'/ε_2 соответственно. У полученной в результате замены задачи (12), которая также является задачей A, значения констант Δ'_n, δ'_n, Δ'_∞, δ'_∞ совпадают со значениями соответствующих констант (7) задачи (5). Однако за счет выбора ε_1, ε_2 будут выполняться неравенства

$$|a'(O)| = |\varepsilon_2 a(O)/\varepsilon_1| < |\Delta_\infty|, \quad |d'(O)| = |\varepsilon_1 d(O)/\varepsilon_2| < |\Delta_\infty|.$$

Далее предполагается, что соответствующая замена сделана, у новой задачи A с целью облегчения написания штрихи опускаются (т. е. сохраняется написание (5)) и, следовательно, выполняются неравенства (11).

Решение задачи (5) будем строить в виде рядов (символ w принимает значения u, v)

$$w(x, y) = \sum_{k,l \in \mathbf{N}_0} w_{k,l} x^k y^l/(k!\, l!), \quad w_{k,l} = \left. \frac{\partial^{k+l} w}{\partial x^k \partial y^l} \right|_{x=y=0}. \tag{13}$$

Введем следующие обозначения (символ e принимает значения a, b, c, d; символ r — значения p, q)

$$\begin{gathered} f_4 = f_2 - f_0, \quad g_4 = g_2 - g_0, \quad e_0 = e(O) = \text{const}, \quad e_1 = e - e_0, \\ p = (a_1 u_y + b_1 v_x) x + u f_4 + x f_3, \quad q = (c_1 u_y + d_1 v_x) x + u g_4 + x g_3. \end{gathered}$$

Домножим обе части уравнений системы из задачи (5) на x. Во введенных выше обозначениях система примет вид

$$\begin{aligned} xv_y &= x(C_0u_y + D_0v_x) + ug_0 + q, \\ xu_x &= x(A_0u_y + B_0v_x) + uf_0 + p. \end{aligned} \tag{14}$$

Положим

$$r_{k,l} = \left.\frac{\partial^{k+l}r}{\partial x^k \partial y^l}\right|_{\substack{x=y=0\\u=v=0}},$$
$$\vec{w}_n = (w_{n,0}; w_{n-1,1}; \ldots; w_{0,n}), \quad \vec{r} = (r_{n,0}; r_{n-1,1}; \ldots; r_{0,n}).$$

Поскольку $e_1(O) = 0$, $f_4(O) = 0$, $g_4(O) = 0$, $u(O) = 0$, то в $r_{k,l}$ будут входить компоненты векторов $\vec{w}_m$ при $0 \le m \le l + k - 1$ и не будут входить компоненты векторов $\vec{w}$ при $m \ge l + k$.

Возможность однозначного определения коэффициентов рядов (13) доказывается индукцией по $n = k + l$. В силу начальных условий

$$u_{0,l} = v_{k,0} = 0 \text{ при всех } k, l \in \mathbf{N}_0 \tag{15}$$

и, в частности, $u_{0,0} = v_{0,0} = 0$. Следовательно, $\vec{w}_0$ однозначно определяются начальными условиями. Пусть все $\vec{w}_0, \ldots, \vec{w}_n$, $n \ge 0$, найдены. Чтобы найти $\vec{w}_{n+1}$, уравнения (14) дифференцируются $k + 1$ раз по x, $n - k$ раз по y, полагаются $x = y = u = v = 0$ и учитываются начальные условия в виде (15). В результате получим соотношения

$$\begin{gathered} u_{0,n+1} = 0, \\ u_{1,n} = A_0u_{0,n+1} + B_0v_{1,n} + f_0u_{1,n} + p_{0,n+1}, \\ v_{0,n+1} = C_0u_{0,n+1} + D_0v_{1,n} + g_0u_{1,n} + q_{0,n+1}, \\ \ldots \\ (k+1)u_{k+1,\,n-k} = (k+1)A_0u_{k,\,n-k+1} + (k+1)B_0v_{k+1,\,n-k} + f_0u_{k+1,\,n-k} + p_{k,\,n+1-k}, \\ (k+1)v_{k,\,n+1-k} = (k+1)C_0u_{k,\,n+1-k} + (k+1)D_0v_{k+1,\,n-k} + g_0u_{k+1,\,n-k} + q_{k,\,n+1-k}, \\ \ldots \\ (n+1)u_{n+1,0} = (n+1)A_0u_{n,1} + (n+1)B_0v_{n+1,0} + f_0u_{n+1,0} + p_{1,n}, \\ (n+1)v_{n,1} = (n+1)C_0u_{n,1} + (n+1)D_0v_{n+1,0} + g_0u_{n+1,0} + q_{1,n}, \\ v_{n+1,0} = 0, \end{gathered} \tag{16}$$

которые являются системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для компонент векторов $\vec{u}_{n+1}$, $\vec{v}_{n+1}$.

Система (16) решается методом последовательного исключения неизвестных. При этом "прямой ход" состоит в построении величин Δ_n, δ_n по формулам (7), а также величин $\chi_{n-k,\,k+1}$, $\psi_{n-k+1,\,k}$ по формулам

$$\begin{gathered} \psi_{1,n} = Q_{0,n}/\Delta_0, \quad \chi_{1,n} = P_{0,n}; \\ \psi_{k+1,\,n-k} = (C_{k+1}\chi_{k,\,n+1-k} + Q_{k,\,n-k})/\Delta_k, \\ \chi_{k+1,\,n-k} = A_{k+1}(B_k\delta_k\psi_{k+1,\,n-k} + \chi_{k,\,n-k+1}) + P_{k,\,n-k}, \quad k = 1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{17}$$

Здесь A_n, B_n, C_n, D_n задаются формулами (6), а величины $P_{k,\,n-k}$, $Q_{k,\,n-k}$ — нижеследующими формулами:

$$Q_{k,\,n-k} = \frac{p_{k,\,n+1-k}}{k+1-f_0} + q_{k,\,n+1-k}, \quad P_{k,\,n-k} = \frac{p_{k,\,n+1-k}}{k+1-f_0}.$$

“Обратный ход” решения СЛАУ (16) таков

$$
\begin{gathered}
v_{n+1,0} = 0, \\
v_{n,1} = \psi_{n+1,0}, \quad u_{n+1,0} = \chi_{n+1,0}, \\
v_{n-1,2} = \frac{D_n}{\Delta_{n-1}} v_{n,1} + \psi_{n,1}, \quad u_{n,1} = B_n \delta_n v_{n,1} + \chi_{n,1}, \\
\dots \\
v_{0,n+1} = \frac{D_0}{\Delta_0} v_{1,n} + \psi_{1,n}, \quad u_{1,n} = B_1 \delta_1 v_{1,n} + \chi_{1,n}.
\end{gathered} \tag{18}
$$

Таким образом, условия (8) суть необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости СЛАУ (16) (если при каком-то $n \in \mathbf{N}_0$ $f_0 = n+1$, $n \in \mathbf{N}$, то $u_{n_0+1,0}$ не определяется однозначно). При этом для нахождения $\vec{u}_1$, $\vec{v}_1$ необходимо, чтобы $f_0 \neq 1$. Для нахождения $\vec{u}_2$, $\vec{v}_2$ нужны условия $\Delta_1 \neq 0$, $f_0 \neq 1$, $f_0 \neq 2$. Для нахождения $\vec{u}_3$, $\vec{v}_3$ потребуем, чтобы $\Delta_1 \neq 0$, $\Delta_2 \neq 0$, $f_0 \neq 1$, $f_0 \neq 2$, $f_0 \neq 3$. И вообще, при переходе от нахождения $\vec{u}_n$, $\vec{v}_n$ к нахождению $\vec{u}_{n+1}$, $\vec{v}_{n+1}$ к ранее указанным условиям $\Delta_1 \neq 0, \dots, \Delta_{n-1} \neq 0$, $f_0 \neq 1, \dots, f_0 \neq n$ добавляются только два условия: $\Delta_n \neq 0$, $f_0 \neq n+1$.

Итак, условия (8) суть необходимые и достаточные условия существования и единственности коэффициентов рядов (13), которые можно найти по формулам (17), (18). Прежде, чем доказывать сходимость рядов (13), перейдем от некоторых рекуррентных формул к явным

$$
\begin{gathered}
\chi_{1,n} = P_{0,n}, \\
\chi_{k+1,\,n-k} = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \left[\left(\prod_{j=i}^{k} \frac{A_{j+1}}{\Delta_j} \right) P_{i-1,\,n+1-i} \right] + P_{k,\,n-k} \right\} + \\
+ \left\{ \sum_{i=1}^{k} \left[\left(\prod_{j=i}^{k} \frac{A_{j+1}}{\Delta_j} \right) B_i \delta_i Q_{i,\,n-i} \right] \right\}, \quad k = 1, \dots, n;
\end{gathered} \tag{19}
$$

$$
\begin{gathered}
v_{n,1} = \psi_{n+1,0}; \\
v_{k,\,n-k+1} = \sum_{i=k+1}^{n} \left[\left(\prod_{j=k+1}^{i} \frac{D_j}{\Delta_{j-1}} \right) \psi_{i+1,\,n-i} \right] + \psi_{k+1,\,n-k}, \quad k = 0, \dots, n-1.
\end{gathered} \tag{20}
$$

Таким образом, при неизвестных $\vec{P}_n$, $\vec{Q}_n$ построение $\vec{u}_{n+1}$, $\vec{v}_{n+1}$ можно осуществить следующей процедурой. Вначале по формулам (19) через $\vec{P}_n$, $\vec{Q}_n$ определить $\vec{\chi}_{n+1} = (\chi_{n+1,0}, \chi_{n,1}, \dots, \chi_{1,n})$. Затем из части соотношений (17) найти $\vec{\psi}_{n+1} = (\psi_{n+1,0}, \psi_{n,1}, \dots, \psi_{1,n})$ через $\vec{\chi}_{n+1}$, $\vec{Q}_n$. Далее по формулам (20) определить $\vec{u}_{n+1}$ через $\vec{\psi}_{n+1}$. И, наконец, из формул (18) найти $\vec{u}_{n+1}$ через $\vec{v}_{n+1}$, $\vec{\chi}_{n+1}$.

Сходимость рядов (13) докажем классическим методом мажорант. Функция

$$
W(x,y) = \sum_{k,l \in \mathbf{N}_0} W_{k,l} x^k y^l / (k!\, l!) \tag{21}
$$

мажорирует функцию $w(x,y)$ ($W \gg w$), если $W_{k,l} \geq |w_{k,l}|$. Тогда из сходимости ряда (21) в некоторой окрестности точки ($x = 0$, $y = 0$) вытекает сходимость в этой же окрестности ряда (13). Ниже понадобятся следующие свойства мажорант. Если у функции

$$
W^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n^* t^n / n! \tag{22}
$$

константы W_n^* таковы, что $W_n^* \geq \max\limits_{k+l=n} |W_{k,l}|$, то $W^*(x+y) \gg W(x,y)$. Тогда из сходимости в некоторой окрестности точки $t = 0$ ряда (21) следует, что ряд (21) сходится в некоторой окрестности точки ($x = 0$, $y = 0$). Если аналитические в окрестности точки O функции F_1,

F_2 от конечного числа переменных мажорируют нуль и $F_1(O) < F^0 = \mathrm{const}$, то функции $F_3 = F_1 + F_2$, $F_4 = F_1 F_2$, $F_5 = 1/(F^0 - F_1)$ также являются аналитическими, мажорирующими нуль функциями.

Для задачи (5) мажорантная задача строится следующим образом. Вначале выбираются положительные константы M, ρ такие, чтобы функция

$$R = M\left[1 - \frac{x+y+U+V}{\rho}\right]^{-1}[(x+y+U+V)(U_y+V_x)+1]$$

мажорировала функции

$$P = \sum_{k,l=0}^{\infty} P_{k,l}x^k y^l/(k!\,l!), \quad Q = \sum_{k,l=0}^{\infty} Q_{k,l}x^k y^l/(k!\,l!).$$

Это возможно при условии, что $U \gg u$, $V \gg v$ в силу аналитичности функций a_1, b_1, c_1, d_1, f_2, g_2, f_3, g_3. Из условий (9), (10) и их следствий — неравенств (11) — следует, что существуют константы M_1, M_2, q_* такие, что при всех $k, l \in \mathbf{N}_0$

$$M_1 \geq 1, \quad M_2 \geq 1, \quad 0 < q_* < 1, \quad \prod_{i=n}^{k+n} \frac{|A_{i+1}|}{|\Delta_i|} \leq M_1 q_*^k,$$
$$\prod_{i=n}^{n+k} \frac{|D_{i+1}|}{|\Delta_i|} \leq M_1 q_*^k, \quad \frac{1}{|\Delta_k|} \leq M_2, \quad |B_n \delta_n| \leq M_2,$$
$$\frac{|C_{n+1}|}{|\Delta_n|} \leq M_2, \quad |A_k| \leq M_2.$$

Если константы $U_{k,l}$, $V_{k,l}$ строить по формулам

$$V_{k,0} = U_{0,l} = 0, \quad V_{0,1} = U_{1,0} = R_{0,0},$$
$$V_{n,1} = \Psi_{n+1,0}, \quad V_{n-1,2} = M_1(q_*\Psi_{n+1,0} + \Psi_{n,1}),$$
$$V_{k,\,n+1-k} = M_1 \sum_{i=k+1}^{n} (q_*^{i-k}\Psi_{1+i,\,n+i}), \quad k = n-1, \ldots, 0,$$
$$U_{k+1,\,n-k} = M_2 V_{k+1,\,n-k} + X_{k+1,\,n-k}, \quad k = 0, \ldots, n+1,$$

где

$$X_{1,n} = R_{0,n},$$
$$X_{k+1,\,n-k} = M_1 \sum_{i=1}^{k} (q_*^{k-i+1} R_{i-1,\,n-i+1}) + M_1 M_2 \sum_{i=1}^{k} (q_*^{k-i+1} R_{i,n-i}), \quad k = 1, \ldots, n,$$
$$\Psi_{k+1,\,n-k} = M_2(X_{k,\,n-k+1} + R_{k,\,n-k}), \quad k = 1, \ldots, n,$$

то тогда $V_{k,l} \geq |v_{k,l}|$, $U_{k,l} \geq |u_{k,l}|$ и, следовательно,

$$V(x,y) = \sum_{k,l\in\mathbf{N}_0} V_{k,l}x^k y^l/(k!\,l!) \gg v(x,y),$$
$$U(x,y) = \sum_{k,l\in\mathbf{N}_0} U_{k,l}x^k y^l/(k!\,l!) \gg u(x,y).$$

Введем

$$R^* = M\left[1 - \frac{t + W^* + W^*}{\rho}\right]^{-1}[(t + W^* + W^*)(W_t^* + W_t^*) + 1]$$

и константы W_n^* построим по формулам

$$\begin{gathered}W_0^* = 0, \quad W_1^* = V_{1,0} = U_{0,1} = R_0^* > U_{0,1} = V_{0,1} = 0, \\ W_{n+1}^* = M_6 R_n^*, \quad n = 1, 2, \dots,\end{gathered} \tag{23}$$

где

$$\begin{gathered}R_n^* = \left.\frac{d^n R^*}{dt^n}\right|_{t=W^*=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ M_6 = M_2 M_5 + M_3, \quad M_5 = M_4[1 + 1/(1 - q_*)], \\ M_4 = M_2(M_3 + 1), \quad M_3 = 1 + M_1 q_*(1 + M_2)/(1 - q_*).\end{gathered}$$

Тогда $W_n^* \geq \max\limits_{k+l=n}\{U_{k,l}; V_{k,l}\}$, и, следовательно, $W(x, y)$ мажорирует как $U(x, y)$, так и $V(x, y)$. Построение коэффициентов ряда (22) по формулам (23) равносильно решению зК

$$W_t^* = M_6 M \left[1 - \frac{t + 2W^*}{\rho}\right]^{-1} [(t + 2W^*) 2W_t^* + 1], \quad W^*(0) = 0.$$

Если последнюю задачу записать в нормальном виде

$$W_t^* = G_3(t, W^*), \quad W^*(0) = 0, \tag{24}$$

то правая часть дифференциального уравнения — функция $G_3(t, W^*)$ — является аналитической в окрестности точки ($t = 0$, $W^* = 0$) функцией, мажорирующей нуль,

$$G_3(t, W^*) = G_2/(1 - 2G_1 G_2),$$

где

$$\begin{gathered}G_1(t, W^*) = t + 2W^* \gg 0, \quad G_1(O) = 0, \\ G_2(t, W^*) = M M_6/(1 - G_1/\rho) \gg 0.\end{gathered}$$

По теореме Коши-Ковалевской задача (24) имеет единственное аналитическое мажорирующее нуль решение, задаваемое сходящимся рядом (22), коэффициенты которого находятся по формулам (23). Из способа построения задачи (24) следует, что она является мажорантной для задачи (5): $W^*(x + y)$ мажорирует $u(x, y)$, $v(x, y)$, поэтому из сходимости ряда (22) следует сходимость рядов для U, V, что обеспечивает сходимость рядов (13), решающих задачу (5). □

Приведенное доказательство теоремы 1 позволяет использовать следующую терминологию. Условия (8) можно назвать условиями существования однозначного оператора решения задачи (5), т. к. они обеспечивают существование и единственность формального решения. Условия (9) — условия ограниченности оператора решения, поскольку позволяют выбрать константы для оценок. При переходе от $\vec{w}_n$ к построению $\vec{w}_{n+1}$ основную роль играет умножение на константы A_{k+1}/Δ_k, D_{k+1}/Δ_k, и благодаря условию (10) модули этих констант при достаточно больших k можно оценить величиной меньше единицы. Поэтому (10) — условие сжимаемости оператора решения.

Для того чтобы было удобно пользоваться теоремой 1, сформулируем некоторые условия, при выполнении которых выполняются условия (7), (8). Рассмотрим пару последовательностей s_n, z_n, $n \in \mathbf{N}$, вычисляемых по правилу

$$\begin{gathered}s_1 = 1, \quad z_1 = B_1, \quad s_{n+1} = (s_n - C_{n+1} z_n)/D_{n+1}, \\ s_{n+1} = A_{n+1} z_n + B_{n+1} s_{n+1} = [B_{n+1} z_n + (A_{n+1} D_{n+1} - B_{n+1} C_{n+1}) s_n].\end{gathered}$$

Лемма 1. *Если $D_n \neq 0$, $n \in \mathbf{N}$, то*

$$s_{n+1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{\Delta_k}{D_{k+1}}, \quad n = 1, 2, \dots \tag{25}$$

Лемма 2. *Пусть $D_n > 0$, $1 > B_n > 0$, $(1-C_n)(1-B_n) > A_n D_n > -B_n(1-C_n)$, $n \in \mathbf{N}$. Тогда $s_n > z_n > 0$, $n \in \mathbf{N}$.*

Теорема 2. *Если выполнены условия леммы 2 и $f_0 \neq n \in \mathbf{N}$, то можно построить решение задачи (5) в виде формальных рядов по степеням x и y.*

Доказательства лемм 1, 2 и теоремы 2 здесь не приводятся.

Теперь в терминах констант A_0, B_0, C_0, D_0 сформулируем достаточные условия сходимости рядов (13). Введем следующие обозначения:

$$\alpha_0 = A_0 D_0, \quad \beta_0 = B_0 C_0, \quad \gamma_0 = 1 + \alpha_0 - \beta_0;$$
$$\text{если } \ C_n \neq 0, \ \text{ то } \ \alpha_n = C_{n+1} A_n D_n / C_n,$$
$$\text{если } \ C_n = 0, \ \text{ то } \ \alpha_n = A_n D_n;$$
$$\gamma_n = 1 + \alpha_n - C_{n+1} B_n.$$

Лемма 3. *Если последовательность Δ_n сходится, то $4\alpha_0 \leq \gamma_0^2$. И обратно, если $4\alpha_0 < \gamma_0^2$, $\alpha_0 \neq 0$, $\Delta_n \neq 0$, $n \in \mathbf{N}$, то последовательность Δ_n сходится.*

Теорема 3. *Пусть выполнены условия леммы 2 и условия*

$$\gamma_0^2 > 4\alpha_0 \neq 0, \quad f_0 \neq n \in \mathbf{N}, \quad |C_0| < 1, \quad (|B_0| + |\alpha_0 - \beta_0|)^2 > |\alpha_0|.$$

Тогда существует единственное локально аналитическое решение задачи (5).

Доказательства леммы 3 и теоремы 3 здесь также не приводятся.

Сформулированные в теореме 3 достаточные условия аналитической разрешимости задачи (5) являются несколько громоздкими, что вызвано, в первую очередь, техникой доказательства теоремы.

Рассмотрим теперь задачу Коши с начальными данными на разных поверхностях в случае, когда имеется другая, по сравнению с (5), особенность в системе уравнений с частными производными

$$\begin{gathered} u_x = a(x,y,u,v)u_y + b(x,y,u,v)v_x + \frac{1}{u} f_1(x,y,u,v), \\ v_y = c(x,y,u,v)u_y + d(x,y,u,v)v_x + \frac{1}{u} g_1(x,y,u,v), \\ u(0,y) = 0, \quad v(x,0) = 0. \end{gathered} \tag{26}$$

Потребуем выполнения необходимых условий разрешимости задачи (26)

$$f_1\big|_{x=0,\, u=0} = g_1\big|_{x=0,\, u=0} = 0.$$

Тогда f_1 и g_1 имеют вид

$$\begin{gathered} f_1 = u f_2(x,y,u,v) + x f_3(x,y,u,v), \\ g_1 = u g_2(x,y,u,v) + x g_3(x,y,u,v) \end{gathered}$$

и задача (26) записывается следующим образом:

$$\begin{gathered} u_x = a(x,y,u,v)u_y + b(x,y,u,v)v_x + \frac{x}{u}f_2(x,y,u,v) + f_3(x,y,u,v), \\ v_y = c(x,y,u,v)u_y + d(x,y,u,v)v_x + \frac{x}{u}g_2(x,y,u,v) + g_3(x,y,u,v), \\ u(0,y) = 0, \quad v(x,0) = 0. \end{gathered} \tag{27}$$

Если строить решение задачи (27) в виде рядов по степеням x и y вида (13), то для $u_{1,0}$, $v_{0,1}$ получим два уравнения:

$$\begin{aligned} (u_{1,0})^2 &= f_2(0) + u_{1,0}f_0, \\ u_{1,0}v_{0,1} &= g_2(0) + u_{1,0}g_0. \end{aligned} \tag{28}$$

Чтобы не накладывать на g_2 дополнительные ограничения и для простоты рассмотрения потребуем $u_{1,0} \neq 0$. Тогда из второго уравнения $v_{0,1}$ определится однозначно. В свою очередь из первого уравнения действительное отличное от нуля значение $u_{0,1}$ найдется, если

$$f_0^2/4 + f_2(0) \geq 0, \quad |f_0| + |f_2(0)| \geq 0. \tag{29}$$

Тогда

$$u_{1,0} = f_2/2 \pm \sqrt{f_0^2/4 + f_2(0)}$$

и хотя бы одно значение $u_{1,0} \neq 0$. Для построения следующих коэффициентов рядов выбирается одно конкретное ненулевое значение $u_{1,0}$ и делается замена переменных $u' = u/u_{1,0}$, $v' = v/v_{1,0}$. Тогда $u'_{1,0} = 1$ и СЛАУ, из которых определяются $u'_{k,l}$, $v'_{k,l}$, $k + l \geq 2$, совпадают со СЛАУ (16), для которой в выражения p, q вместо f_2, f_3, g_2, g_3 нужно подставить соответственно $f_2/(u_{1,0})^2$, $f_3/u_{1,0}$, $g_2/(u_{1,0})^2$, $g_3/u_{1,0}$ и в аргументах функций a, b, c, d, f_2, f_3, g_2, g_3 заменить u, v на $u'u_{1,0}$, $v'u_{1,0}$. Поэтому для задачи (27) справедливы теоремы 1–4.

Замечание. Переменные x, y между собой и функции u, v между собой равноправны. Поэтому утверждения, сформулированные для x и u справедливы для y и v, т. е. задача

$$\begin{gathered} u_x = a(x,y,u,v)u_y + b(x,y,u,v)v_x + \frac{v}{y}f(x,y,u,v) + f_2(x,y,u,v), \\ v_y = c(x,y,u,v)u_y + d(x,y,u,v)v_x + \frac{v}{y}g(x,y,u,v) + g_2(x,y,u,v), \\ u(0,y) = 0, \quad v(x,0) = 0, \end{gathered} \tag{30}$$

и задача

$$\begin{gathered} u_x = a(x,y,u,v)u_y + b(x,y,u,v)v_x + \frac{y}{v}f(x,y,u,v) + f_2(x,y,u,v), \\ v_y = c(x,y,u,v)u_y + d(x,y,u,v)v_x + \frac{y}{v}g(x,y,u,v) + g_2(x,y,u,v), \\ u(0,y) = 0, \quad v(x,0) = 0, \end{gathered} \tag{31}$$

рассматриваются аналогично задачам (5) и (27) соответственно.

Задачи (5), (27), (30), (31) можно обобщать различным образом. Ниже рассмотрено одно конкретное обобщение задачи (5) — задача (32). Именно эту задачу необходимо исследовать для построения локально аналитических течений идеального газа, возникающих за ударной волной, отражающейся от оси или центра симметрии с конечной скоростью. В частном случае автомодельных течений подобная задача решена ранее ([7], с. 227). Задачи, также близкие к задаче (32), возникают при описании пространственного взаимодействия ударных волн [8].

Пусть в задаче

$$
\begin{gathered}
u_x = a(x,y,u,v)u_y + b(x,y,u,v)v_x + \frac{u}{w} f_1(x,y,u,v) + f_2(x,y,u,v),\\
v_y = c(x,y,u,v)u_y + d(x,y,u,v)v_x + \frac{u}{w} g_1(x,y,u,v) + g_2(x,y,u,v),\\
w_x = E_1(u,v,w,z,x),\\
z_y = uE_2 z_x + E_3 u_x + E_4 u_y + E_5 v_x + E_6 v_y + E_7,\\
u(0,y) = w(0,y) = 0, \quad v(x,0) = z(x,0) = 0,
\end{gathered} \tag{32}
$$

f_i, g_i $(i = 1,2)$, E_j $(j = 2,\dots,7)$ — аналитические функции переменных x, y, u, v; w, z, E_1 — также аналитические функции своих аргументов. Введем константы:

$$
\begin{gathered}
H_0 = E_1(0), \quad A_0 = a(O), \quad D_0 = d(O), \quad B_0 = b(O), \quad C_0 = c(O),\\
f_0 = f_1(0)/H_0, \quad g_0 = g_1(0)/H_0,\\
A_n = nA_0/(n - f_0), \quad B_n = nB_0/(n - f_0), \quad C_n = C_0 + a_0 g_0/(n - f_0),\\
D_n = D_0 + B_0 g_0/(n - f_0);\\
\alpha_0 = A_0 D_0, \quad \beta_0 = C_0 B_0, \quad \gamma_0 = 1 + \alpha_0 - \beta_0.
\end{gathered}
$$

Теорема 4. *Пусть*

$$
\begin{gathered}
H_0 \neq 0, \quad f_0 \neq n \in \mathbf{N}, \quad C_0 < 1, \quad \gamma_0^2 > 4\alpha_0, \quad (B_0 + \alpha_0 - \beta_0)^2 > |\alpha_0| > 0;\\
0 < B_n < 1, \quad (1 - B_n)(1 - C_n) > A_n D_n > -B_n(1 - C_n), \quad n \in \mathbf{N}.
\end{gathered}
$$

Тогда задача (32) *имеет единственное локально аналитическое решение.*

Доказательство теоремы 4 в главных чертах повторяет доказательство теоремы 1. Поэтому остановимся только на основных моментах. Будем строить решение в виде рядов, аналогичных (13).

Из граничных условий и уравнений системы (32) имеем, что w от y не зависит, $w_0 = 0$, $u_{0,l} = v_{k,0} = z_{k,0} = 0$, $k, l \in \mathbf{N}$.

Перепишем задачу (32) в виде

$$
\begin{gathered}
wu_x/H_0 = A_0 wu_y/H_0 + B_0 wv_x/H_0 + uf_0 + p,\\
wv_y/H_0 = C_0 wu_y/H_0 + D_0 wv_x/w_0 + ug_0 + q,\\
w_x = E_1(u,v,w,z,x),\\
z_y = uE_2 z_x + E_3 u_x + E_4 u_y + E_5 v_x + E_6 v_y + E_7,\\
u(0,y) = w(0,y) = 0, \quad v(x,0) = z(x,0) = 0,
\end{gathered} \tag{33}
$$

где

$$
\begin{gathered}
p = [(a - A_0)u_y + (b - B_0)v_x]w/H_0 + f_2 w + (f/H - f_0)u,\\
q = [(c - C_0)u_y + (d - D_0)v_x]w/H_0 + g_2 Y + (g/H - g_0)u.
\end{gathered}
$$

Будем одновременно находить коэффициенты рядов, задающих искомое решение, у которых одинакова сумма индексов $k + l = n$. При $n = 0$ соответствующие коэффициенты однозначно определяются из начальных условий. Пусть для $k + l = n$ коэффициенты известны. Для нахождения коэффициентов с суммой индексов $n+1$ определим производные $n+1$-го порядка в нуле. Для w_{n+1}, z_{k+l}, $k + l = n + 1$, получаем явные формулы после дифференцирования в точке O системы (33). Для нахождения $u_{k,\,n-k+1}$, $v_{l+1,\,n-l}$, $k, l = 0,\dots,n$, получим СЛАУ вида (16). Благодаря условиям теоремы СЛАУ однозначно разрешима. Сходимость полученных формальных рядов также доказывается методом мажорант. Мажорантная задача в этом случае имеет вид

$$
\begin{gathered}
U_t^* = M_7\left[1-\frac{t+2U^*+W^*+Z^*}{\rho}\right]^{-1}[(t+2U^*+W^*+Z^*)4U_t^*+1],\\
W_t^* = M_8\left[1-\frac{t+2U^*+W^*+Z^*}{\rho}\right]^{-1},\\
Z_t^* = M_7\left[1-\frac{t+2U^*+W^*+Z^*}{\rho}\right]^{-1}[U^*W_t^*+4U_t^*+1],\\
U^*(0)=W^*(0)=Z^*(0)=0,\quad \rho, M_i>0 \quad (i=7,8).
\end{gathered}
\tag{34}
$$

Систему можно разрешить относительно производных неизвестных функций и задача (34) переписывается в следующем нормальном виде:

$$
\begin{gathered}
U_t^*=G_1(t,U^*,W^*,Z^*),\quad W_t^*=G_2(t,U^*,W^*,Z^*),\quad Z_t^*=G_3(t,U^*,W^*,Z^*),\\
U^*(0)=W^*(0)=Z^*(0)=0,
\end{gathered}
\tag{35}
$$

где G_i $(i=\overline{1,3})$ — аналитические функции своих аргументов, мажорирующие нуль. По теореме Коши-Ковалевской существует единственное аналитическое решение задачи (35), мажорирующее нуль. При надлежащем выборе констант M_7, M_8, ρ функции $U(x+y)\gg u(x,y)$, $v(x,y)$; $W(x+y)\gg w(x)$, $Z(x+y)\gg z(x+y)$.

Значит, ряды, задающие решение (32), сходятся, и, следовательно, решение задачи (32) строится однозначно.

Литература

1. Петровский И.Г. *Лекции об уравнениях с частными производными.* – 3-е изд. – М.: Физматгиз, 1961. – 400 с.
2. Курант Р. *Уравнения с частными производными.* – М.: Мир, 1964. – 830 с.
3. Леднев Н.А. *Новый метод решения дифференциальных уравнений с частными производными* // Матем. сб. – 1948. – Т. 22. – № 2. – С. 205–266.
4. Баутин С.П. *Одна задача Коши с начальными данными на разных поверхностях, возникающая в газовой динамике* // Актуальные вопр. современ. матем. – Новосибирск, 1995. – С. 32–43.
5. Wagschal C. *Une généralisation du problème de Goursat pour des systèmes d'équations intégro-differentielles holomorphes ou partiellement holomorphes* // J. math. pures et appl. – 1974. – V. 53. – № 2. – P. 99–131.
6. Баутин С.П. *Характеристическая задача Коши для квазилинейной аналитической системы* // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12. – № 11. – С. 2052–2063.
7. Седов Л.И. *Методы подобия и размерности в механике.* – М.: Наука, 1981. – 448 с.
8. Тешуков В.М. *Пространственное взаимодействие сильных разрывов в газе* // Прикл. матем. и механ. – 1986. – Т. 50. – Вып. 4. – С. 605–615.

Уральская государственная горно-геологическая академия,

Уральский государственный университет

Поступила
06.03.1995