ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 10 (533)

УДК 517.956

Н.В. ШУСТРОВА

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА С ОТХОДОМ ОТ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА–БИЦАДЗЕ С КОМПЛЕКСНЫМ ПАРАМЕТРОМ

1. Постановка задачи и основные результаты

Для уравнения

$$Lu = u_{xx} + \operatorname{sgn} y u_{yy} + \lambda u = 0 \tag{1}$$

в области D, ограниченной в полуплоскости $y > 0$ дугой окружности единичного радиуса $BK = \Gamma$ ($r = 1$, $0 \le \varphi \le \varphi_0$, $0 < \varphi_0 \le \pi$) и отрезком AK ($\varphi = \varphi_0$, $0 < r < 1$), а в полуплоскости $y < 0$ ограниченной отрезком AC прямой $y = -k_0 x$ и отрезком CB характеристики $x - y = 1$ уравнения (1), где $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(\frac{1}{k_0+1}, -\frac{k_0}{k_0+1})$, решается

Задача TN. Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup AK \cup \Gamma) \cap C^2(D_+ \cup D_-), \tag{2}$$

$$Lu(x,y) = 0, \quad (x,y) \in (D_+ \cup D_-), \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial N}\Big|_{AK} = 0, \tag{4}$$

$$u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in AC, \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial N}\Big|_{\Gamma} = f(\varphi), \tag{6}$$

где $\partial u/\partial N$ — производная по нормали, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$; $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

Обобщенная задача Трикоми для уравнения (1) при $\lambda = 0$ была изучена в [1], а в [2] для этого уравнения решена задача Трикоми–Неймана. В статье [3] эта же задача рассмотрена в другой области. В данной работе на основании результатов [1]–[3] методом спектрального анализа построено решение смешанной задачи с отходом от характеристики для уравнения Лаврентьева–Бицадзе с параметром при всех $\lambda \ne \lambda_{nm}$, где λ_{nm} — собственные значения соответствующей спектральной задачи.

2. Задача на собственные значения

Рассмотрим спектральную задачу, соответствующую обобщенной задаче (2)–(6), которую назовем

Задача TN_λ. Найти значения параметра λ и соответствующие им функции $u(x,y)$, удовлетворяющие условиям (2)–(5) и

$$\frac{\partial u}{\partial N}\Big|_{\Gamma} = 0. \tag{7}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, конкурс “Агидель”, грант № 05.01.97913.

В области D_+, разделяя в уравнении (1) переменные $u(x,y) = u(r\cos\varphi, r\,\sin\varphi) = v(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$, с учетом граничных условий (4), (7) получим

$$r^2R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - \mu^2)R(r) = 0, \quad R(0) = 0, \quad R'(1) = 0,$$
$$\Phi''(\varphi) + \mu^2\Phi(\varphi) = 0, \quad \Phi'(\varphi_0) = 0,$$

где μ — постоянная разделения переменных.

Решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям $R(0) = 0$ и $\Phi'(\varphi_0) = 0$, имеют вид

$$u_{\lambda\mu}(x,y) = A^+_{\lambda\mu}J_\mu(\sqrt{\lambda}r)\cos(\mu(\varphi_0 - \varphi)), \quad \operatorname{Re}\mu > 0, \tag{8}$$

где $J_\mu(\cdot)$ — функция Бесселя первого рода порядка μ, $A^+_{\lambda\mu}$ — произвольные постоянные. Найдем значение функции $u_{\lambda\mu}(x,y)$ и ее производной по y на отрезке AB оси $y = 0$

$$u_{\lambda\mu}(x, 0+0) = A_{\lambda\mu}\cos\mu\varphi_0 J_\mu(\sqrt{\lambda}x), \qquad 0 \le x \le 1, \tag{9}$$

$$\frac{\partial u_{\lambda\mu}(x,0+0)}{\partial y} = \frac{A_{\lambda\mu}\mu J_\mu(\sqrt{\lambda}x)}{x}\sin\mu\varphi_0, \quad 0 < x < 1. \tag{10}$$

Рассмотрим теперь уравнение (1) в области D_-. Введем замену переменных $x = p\operatorname{ch}\theta$, $y = p\operatorname{sh}\theta$. Полагая $u(x,y) = v(p,\theta) = P(p)\Theta(\theta)$, разделим в этом уравнении переменные. Тогда с учетом граничного условия (5) получим

$$p^2P''(p) + pP'(p) + (\lambda p^2 - \nu^2)P(p) = 0, \quad |P(0)| < +\infty;$$
$$\Theta''(\theta) - \nu^2\Theta(\theta) = 0, \quad \Theta(-\operatorname{arth}k_0) = 0,$$

где ν — постоянная разделения переменных.

Следовательно, решения уравнения (1), удовлетворяющие условию (5), определяются по формуле

$$u_{\lambda\nu}(x,y) = C_{\lambda\nu}J_\nu(\sqrt{\lambda}\sigma)(e^{\nu\theta} - K^\nu e^{-\nu\theta}),$$

где $C_{\lambda\mu}$ — произвольные постоянные, $K = (1-k_0)/(1+k_0)$. Отсюда при $y = 0$ найдем

$$u_{\lambda\nu}(x, 0-0) = v_{\lambda\nu}(\sigma, 0) = C_{\lambda\nu}J_\nu(\sqrt{\lambda}x)(1 - K^\nu), \quad 0 \le x \le 1, \tag{11}$$

$$\frac{\partial u_{\lambda\nu}(x,0-0)}{\partial y} = \frac{C_{\lambda\nu}\nu J_\nu(\sqrt{\lambda}x)}{x}(1 + K^\nu), \qquad 0 < x < 1. \tag{12}$$

В силу (2), приравнивая соответственно равенства (9) и (11), (10) и (12), получим уравнение для нахождения постоянной $\nu = \mu$

$$\operatorname{tg}\mu\varphi_0 = \frac{1 + K^\mu}{1 - K^\mu}. \tag{13}$$

Уравнение (13) имеет счетное множество корней, которые обозначим через μ_n, и они расположены в интервалах $(n - 3/4)\pi/\varphi_0 < \mu_n < (n - 1/2)\pi/\varphi_0$, $n = 1, 2, \ldots$

Удовлетворяя решения (8) уравнения (1) граничному условию (7), найдем

$$R'(1)\Phi(\varphi) = 0.$$

Значит, $R'_{\lambda\mu_n}(1) = \sqrt{\lambda}J'_{\mu_n}(\sqrt{\lambda}) = 0$. Из теории бесселевых функций [4] известно, что функции $zJ'_\mu(z)$ при $\mu > -1$ имеют только вещественные нули. Тогда обозначая через α_{nm} m-й корень последнего уравнения, получим собственные значения задачи TN_λ

$$\lambda_{nm} = \alpha^2_{nm}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Теперь при $\lambda = \lambda_{nm}$ найдем собственные функции задачи TN_λ. С учетом того, что в области D_- аргумент $\theta = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$, имеет место

Теорема 1. *Собственным значениям* $\alpha_{nm} = \sqrt{\lambda_{nm}}$, *являющимся* m*-ми корнями уравнения* $\sqrt{\lambda} J'_{\mu_n}(\sqrt{\lambda}) = 0$, *где* $n, m = 1, 2, \dots$, *соответствует система собственных функций*

$$u_{nm}(x,y) = C_{nm} J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{nm}} r)\cos(\mu_n(\varphi_0 - \varphi)), \quad (x,y) \in D_+,$$

$$u_{nm}(x,y) = \frac{C_{nm}(-1)^n}{\sqrt{2(1+K^{2\mu_n})}} J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{nm}(x^2-y^2)})\left(\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{\mu_n}{2}} - K^{\mu_n}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\frac{\mu_n}{2}}\right), \quad (x,y) \in D_-.$$

Лемма 1. *Система функций* $\{\Phi_n(\varphi)\} = \{\cos(\mu_n(\varphi_0 - \varphi))\}_{n=1}^{\infty}$ *образует базис в* $L_2(0, \varphi_0)$.

Доказательство. Аналогично [1] рассмотрим систему функций

$$\Phi_n(\varphi) = \cos \mu_n \frac{\varphi_0}{\pi}\alpha, \quad \alpha = \frac{\pi(\varphi_0 - \varphi)}{\varphi_0}, \quad \alpha \in (0, \pi), \quad n = 1, 2, \dots$$

Возьмем разложение в $L_2(0, \pi)$ некоторой функции $f(\alpha)$ по заданной системе функций $\{\Phi_n(\alpha)\}_{n=1}^{\infty}$

$$f(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \mu_n \frac{\varphi_0}{\pi}\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \Phi_n(\alpha). \tag{14}$$

Используя результаты работы [5], рассмотрим систему $h_k(\alpha)$, биортогональную системе синусов $\{\sin((n-3/4)\alpha + \pi/2)\}_{k=1}^{\infty}$. Умножая (14) на $h_k(\alpha)$ и интегрируя от 0 до π, получим

$$\int_0^{\pi} f(\alpha) h_k(\alpha) d\alpha = \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \Phi_n(\alpha) h_k(\alpha) d\alpha.$$

Пусть $\int\limits_0^{\pi} f(\alpha) h_k(\alpha) d\alpha = f_k$, тогда $f_k = C_k + \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n \int\limits_0^{\pi} \Phi_n(\alpha) h_k(\alpha) d\alpha - C_k$ или

$$f_k = C_k + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^{\pi} \Phi_n(\alpha) h_k(\alpha) d\alpha - \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^{\pi} \cos((n-3/4)\alpha) h_k(\alpha) d\alpha.$$

Отсюда

$$f_k = C_k + \sum_{n=1}^{\infty} C_n a_{kn}, \tag{15}$$

где

$$a_{kn} = \int_0^{\pi} (\Phi_n(\alpha) - \cos((n-3/4)\alpha)) h_k(\alpha) d\alpha = \int_0^{\pi} I_n(\alpha) h_k(\alpha) d\alpha,$$
$$I_n(\alpha) = \Phi_n(\alpha) - \cos((n-3/4)\alpha). \tag{16}$$

Оценим теперь двойной ряд

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{kn}^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^{\pi} I_n(\alpha) h_k(\alpha) d\alpha\right)^2 \le M \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\pi} I_n^2(\alpha) d\alpha\right), \tag{17}$$

где M — постоянная из неравенства Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty} (F, h_k)^2 \le M \|F\|^2, \tag{18}$$

которое справедливо, т. к. система $\{\sin((n-3/4)\alpha+\pi/2)\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис Рисса [5]. Оценим коэффициенты полученного ряда (17)

$$I_n^2=\left\{\cos\mu_n\frac{\varphi_0}{\pi}\alpha-\cos((n-3/4)\alpha)\right\}^2\le\left\{2\sin\frac{\mu_n\frac{\varphi_0}{\pi}\alpha-(n-3/4)\alpha}{2}\right\}^2\le$$
$$\le\left\{\frac{2(\mu_n\frac{\varphi_0}{\pi}\alpha-(n-3/4)\alpha)}{2}\right\}^2\le K^{2\mu_n}\le K^{2(n-3/4)\pi/\varphi_0}. \quad (19)$$

Усиливая неравенство (17), с помощью оценки (19) получим

$$\sum_{n,k=1}^{\infty}a_{nk}^2\le M\pi\sum_{n=0}^{\infty}K^{2(n+1/4)\pi/\varphi_0}=M\pi K^{\pi/2\varphi_0}(1-K^{2\pi/\varphi_0})^{-1}. \quad (20)$$

Из (20) видно, что если число k_0 достаточно близко к единице, то $\sum\limits_{k,n=1}^{\infty}a_{kn}^2<1$. Поэтому бесконечная система уравнений (15) однозначно разрешима относительно C_k, причем

$$\sum_{k=0}^{\infty}C_k^2<\infty. \quad (21)$$

Докажем теперь сходимость ряда (14) в $L_2(0,\pi)$, записав его с учетом равенства (16) в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n\Phi_n(\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin((n-3/4)\alpha+\pi/2)+\sum_{n=1}^{\infty}C_nI_n(\alpha). \quad (22)$$

Первый ряд в правой части (22) сходится в $L_2(0,\pi)$ в силу базисности Рисса системы синусов. Последний в правой части (22) ряд оценим по критерию Коши, используя оценку (19),

$$\int_0^{\pi}\left(\sum_{n=m}^{m+N}C_nI_n(\alpha)\right)^2d\alpha\le\sum_{n=m}^{m+N}C_n^2\sum_{n=m}^{m+N}\int_0^{\pi}I_n^2(\alpha)d\alpha\le\sum_{n=m}^{m+N}C_n^2\sum_{n=m}^{m+N}\pi K^{2(n-3/4)\pi/\varphi_0}.$$

Из полученного неравенства ясно, что при k_0, достаточно близком к единице, ряд (22), а следовательно, и ряд (14) сходятся в $L_2(0,\pi)$. Ряд (14) сходится к функции $f(\alpha)$, т. к. если равенство (14) умножить на $h_k(\alpha)$ и проинтегрировать по интервалу $(0,\pi)$, то с учетом (15) получим значение f_k. В силу полноты системы $h_k(\alpha)$ ряд (14) сходится к функции $f(\alpha)$.

Чтобы теперь из формулы (14) получить разложение в $L_2(0,\varphi_0)$ некоторой функции $f(\varphi)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_n\cos\mu_n(\varphi_0-\varphi)$, воспользуемся подстановкой $\alpha=\frac{\pi(\varphi_0-\varphi)}{\varphi_0}$. Тогда коэффициенты C_n разложения в $L_2(0,\varphi_0)$ определятся из системы уравнений (15), где числа f_k, a_{kn} вычисляются по формулам

$$f_k=\frac{\pi}{\varphi_0}\int_0^{\varphi_0}f(\varphi)h_k\left(\frac{\pi(\varphi_0-\varphi)}{\varphi_0}\right)d\varphi, \quad (23)$$

$$a_{kn}=\frac{\pi}{\varphi_0}\int_0^{\varphi_0}\left(\cos\mu_n(\varphi_0-\varphi)-\cos\left((n-3/4)\frac{\pi(\varphi_0-\varphi)}{\varphi_0}\right)\right)h_k\left(\frac{\pi(\varphi_0-\varphi)}{\varphi_0}\right)d\varphi, \quad (24)$$

$\{h_k(\frac{\pi(\varphi_0-\varphi)}{\varphi_0})\}$ — биортогональная система к системе синусов $\{\sin((n-3/4)\frac{\pi(\varphi_0-\varphi)}{\varphi_0}+\pi/2)\}$.

Лемма 2. *Если $f(\varphi)\in C^{\beta}[0,\varphi_0]$, $0<\beta\le 1$, то ряд (14) равномерно сходится к функции $f(\varphi)$ на $[0,\varphi_0]$.*

Используя (15), запишем ряд (14) в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty}C_k\Phi_k(\alpha)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k\Phi_k(\alpha)-\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_k(\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}C_na_{kn}.$$

Применяя подстановку $\alpha = \frac{\pi(\varphi_0-\varphi)}{\varphi_0}$, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos\mu_k(\varphi_0-\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cos\mu_k(\varphi_0-\varphi) - \sum_{k=1}^{\infty}\cos\mu_k(\varphi_0-\varphi)\sum_{n=1}^{\infty} C_n a_{kn}.$$

Оценим теперь ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\cos^2(\mu_k(\varphi_0-\varphi)) = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^{k+1}}{2\sqrt{1+K^{2\mu_k}}}(\sin\mu_k\varphi+\cos\mu_k\varphi+K^{\mu_k}(-\cos\mu_k\varphi+\sin\mu_k\varphi))\right\}^2 \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty}\{\sin\mu_k\varphi+\cos\mu_k\varphi+K^{\mu_k}(-\cos\mu_k\varphi+\sin\mu_k\varphi)\}^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\{\sin\mu_k\varphi+\cos\mu_k\varphi+\tfrac{1}{2}\sin[\mu_k\varphi-\arccos K^{\mu_k}]+\tfrac{1}{2}\sin[\mu_k\varphi+\arccos K^{\mu_k}] -$$

$$-\tfrac{1}{2}\cos[-\mu_k\varphi+\arccos K^{\mu_k}]-\tfrac{1}{2}\cos[\mu_k\varphi+\arccos K^{\mu_k}]\}^2 \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty}\left\{-\sin\left(\frac{\arccos K^{\mu_k}}{2}\right)+2\cos\left(\frac{\arccos K^{\mu_k}}{2}\right)\right\}^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\cos\left(\frac{\arccos K^{\mu_k}}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\sin\left(\frac{\arccos K^{\mu_k}}{2}\right)\right\}^2 = 2\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\sqrt{\frac{1+K^{\mu_k}}{2}}-\sqrt{\frac{1-K^{\mu_k}}{2}}\right\}^2 +$$

$$+2\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\sqrt{\frac{1+K^{\mu_k}}{2}}+\sqrt{\frac{1-K^{\mu_k}}{2}}\right\}^2 = 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{K^{2\mu_k}}{2+2\sqrt{1-K^{2\mu_k}}}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{K^{2\mu_k}}{2-2\sqrt{1-K^{2\mu_k}}}.$$

Из этой оценки и следует равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\cos^2(\mu_k(\varphi_0-\varphi))$. Учитывая теперь неравенство $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^2 \le M\|f\|^2$, а также сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{kn}C_n$, установим, что ряд (15) также равномерно сходится.

3. Обобщенная задача TN

Для уравнения (1) в области D рассмотрим задачу (2)–(6).

Теорема 2. *Если $f(\varphi)\in C^{\beta}[0,\varphi_0]$, $0<\beta\le 1$, $\lambda\ne\lambda_{nm}$, $f'(\varphi_0)=0$, то существует решение задачи* (2)–(6) *и оно имеет вид*

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda}r)}{\sqrt{\lambda}J'_{\mu_n}(\sqrt{\lambda})}\cos(\mu_n(\varphi_0-\varphi)), \quad (x,y)\in D_+, \tag{25}$$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n(-1)^{n+1}J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda(x^2-y^2)})}{\sqrt{2(1+K^{2\mu})}\sqrt{\lambda}J'_{\mu_n}(\sqrt{\lambda})}\left(\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{\mu_n}{2}} - K^{\mu_n}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\frac{\mu_n}{2}}\right), \quad (x,y)\in D_-, \tag{26}$$

где C_n — коэффициенты разложения функции $f(\varphi)$ по системе функций $\{\cos\mu_n(\varphi_0-\varphi)\}$ и определяются из системы уравнений (15), *а числа f_k и a_{kn} вычисляются по формулам* (23) *и* (24) *соответственно.*

Действительно, на основании асимптотической формулы ([6], с. 217) $J_\mu(z)=\frac{1}{\Gamma(\mu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\mu}$ при $\mu\to\infty$ ряд (25) и ряды, полученные почленным k-кратным дифференцированием данного ряда по переменным r и φ, при $r\le r_0<1$ сходятся равномерно, т. к. для достаточно больших n

справедливы оценки

$$\left|\frac{C_n}{\sqrt{\lambda}J'_{\mu_n}(\sqrt{\lambda})}\frac{\partial^{(k)}J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda}r)}{\partial r^{(k)}}\cos(\mu_n(\varphi_0-\varphi))\right| \le |C_n\mu_n^{k-1}r^{\mu_n-k}|,$$

$$\left|\frac{C_nJ_{\mu_n}(\sqrt{\lambda}r)}{\sqrt{\lambda}J'_{\mu_n}(\sqrt{\lambda})}\frac{\partial^{(k)}\cos(\mu_n(\varphi_0-\varphi))}{\partial\varphi^{(k)}}\right| \le |C_n\mu_n^{k-1}r^{\mu_n}|,$$

а при $r=1$

$$\left|\frac{C_nJ_{\mu_n}(\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}J'_{\mu_n}(\sqrt{\lambda})}\cos(\mu_n(\varphi_0-\varphi))\right| \le \left|\frac{C_n}{\mu_n}\right|.$$

Производная ряда (25) по r при $r=1$ есть разложение функции $f(\varphi)$ по системе функций $\Phi_n(\varphi)$, которое равномерно сходится на $[0,\varphi_0]$. Если $(x,y)\in D_-$, то поскольку $0\le(\frac{x+y}{x-y})^{\frac{\mu_n}{2}}\le 1$ и $0<K^{\mu_n}(\frac{x-y}{x+y})^{\frac{\mu_n}{2}}<1$, то ряд (26) в гиперболической части области $\overline{D_-}$ равномерно сходится. Отсюда следует равномерная сходимость решения задачи (2)–(6) в области $\overline{D}$.

Литература

1. Моисеев Е.И. *Применение метода разделения переменных для решения уравнений смешанного типа* // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26. – № 7. – С. 1160–1172.
2. Сабитов К.Б., Хасанова С.Л. *Спектральные свойства краевой задачи с производной по нормали в граничном условии для уравнений смешанного типа и их применения* // Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 6. – С. 64–76.
3. Моисеев Е.И. *Решение задачи Трикоми в специальных областях* // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26. – № 1. – С. 93–103.
4. Ватсон Г.Н. *Теория бесселевых функций.* – М.: Ин. лит., 1949. – 799 с.
5. Моисеев Е.И. *О базисности одной системы синусов* // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23. – № 1. – С. 177–179.
6. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. *Курс современного анализа.* Ч. 2. *Трансцендентные функции.* – М.: Физматгиз, 1963. – 516 с.

Стерлитамакский филиал академии наук Республики Башкортостан

Поступила 17.03.2006