ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 10 (533)

УДК 517.987

Л.С. ЕФРЕМОВА

О НЕБЛУЖДАЮЩЕМ МНОЖЕСТВЕ И ЦЕНТРЕ НЕКОТОРЫХ КОСЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ОТОБРАЖЕНИЙ ИНТЕРВАЛА

Исследования систем дифференциальных уравнений с цилиндрическим фазовым пространством [1], аттрактора Лоренца [2], описание моделей вполне развитой турбулентности [3] приводят к динамическим системам со структурой косого произведения.

Изучению неблуждающего множества и центра непрерывного косого произведения отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек в базе посвящена работа [4]. В [5] показано, что основополагающую роль в исследовании динамики косого произведения отображений интервала играют специальные многозначные функции. В [6] с использованием многозначных функций, введенных в [5] и [6], начато исследование неблуждающего множества и центра C^1-гладкого косого произведения отображений интервала, фактор-отображения и отображения, в слоях которого удовлетворяются условия типа Ω-устойчивости.

Естественное продолжение статей [5] и [6] привело к новым доказательствам результатов [4], публикуемым в данной работе. Укажем, что доказательство теоремы о глубине центра непрерывного косого произведения отображений интервала в статье [4] отсутствует. Доказательства основаны на использовании оригинальных многозначных функций, графики которых в фазовом пространстве совпадают с рассмотренными в статье основными предельными множествами динамической системы.

1. Предварительные сведения

Рассмотрим косое произведение отображений интервала

$$F(x,y) = (f(x), g_x(y)) \ \text{ для всех } \ (x,y) \in I, \tag{1}$$

где $I = I_1 \times I_2$ — замкнутый прямоугольник на плоскости (I_1, I_2 — замкнутые промежутки). Обозначим через $T^0(I)$ ($T^1(I)$) пространство всех непрерывных (C^1-гладких) отображений вида (1) с C^0-нормой (C^1-нормой). В силу (1) для каждого натурального n и произвольной точки (x,y) справедливо равенство

$$F^n(x,y) = (f^n(x), g_{x,n}(y)), \quad \text{где} \ \ g_{x,n} = g_{f^{n-1}(x)} \circ \cdots \circ g_{f(x)} \circ g_x. \tag{2}$$

Обозначим через $\widetilde{g}_x$ отображение $g_{x,n}$, если x — периодическая точка f ($x \in \mathrm{Per}(f)$), а n — (наименьший) период x.

В статье приведено новое доказательство следующего утверждения из [4].

Теорема 1. *Пусть фактор-отображение f косого произведения отображений интервала $F \in T^0(I)$ имеет замкнутое множество* $\mathrm{Per}(f)$. *Тогда неблуждающее множество $\Omega(F)$ отображения F представимо в виде*

$$\Omega(F) = \overline{\bigcup_{x \in \mathrm{Per}(f)} \{x\} \times \Omega(\widetilde{g}_x)},$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04-01-00457).

где $\Omega(\widetilde{g}_x)$ — неблуждающее множество отображения $\widetilde{g}_x$.

Данная работа содержит доказательство следующей теоремы, которая только лишь сформулирована, но не доказана в [4].

Теорема 2. *Пусть отображение $F \in T^0(I)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда центр $C(F)$ отображения F представим в следующем виде:*

$$C(F) = \Omega(F_{|\Omega(F)}) = \overline{\bigcup_{x \in \mathrm{Per}(f)} \{x\} \times \Omega(\widetilde{g}_{x|\Omega(\widetilde{g}_x)})},$$

где $F_{|\Omega(F)}$ $(\widetilde{g}_{x|\Omega(\widetilde{g}_x)})$ — сужение отображения F $(\widetilde{g}_x)$ на его неблуждающее множество $\Omega(F)$ $(\Omega(\widetilde{g}_x))$.

Доказательства сформулированных результатов основаны на использовании многозначных функций из [5] и [6]. Пусть 2^{I_2} есть пространство всех замкнутых подмножеств отрезка I_2 с экспоненциальной топологией.

Определение 1. Ω-функцией отображения $F \in T^0(I)$ называется функция $\zeta : \Omega(f) \to 2^{I_2}$ такая, что при любом $x \in \Omega(f)$ выполнено равенство $\zeta(x) = \Omega(F)(x)$, где $\Omega(F)(x) = \{y \in I_2 : (x, y) \in \Omega(F)\}$ — срез неблуждающего множества $\Omega(F)$ по x.

C-функцией отображения $F \in T^0(I)$ называется функция $\zeta^* : C(f) \to 2^{I_2}$ такая, что при любом $x \in C(f)$ выполнено равенство $\zeta^*(x) = C(F)(x)$, где $C(F)(x) = \{y \in I_2 : (x, y) \in C(F)\}$ — срез центра $C(F)$ по x.

Будем использовать также вспомогательные многозначные функции

$$\eta_n : \Omega(f^n) \to 2^{I_2} \quad \text{и} \quad \eta_n^* : C(f^n) = C(f) \to 2^{I_2},$$

полагая при всех $n \geq 1$ $\eta_n(x) = \Omega(g_{x,n})$, каково бы ни было $x \in \Omega(f^n)$, и $\eta_n^*(x) = C(g_{x,n})$, каково бы ни было $x \in C(f)$ соответственно.

Приведем утверждения о свойствах непрерывных отображений отрезка (пространство таких отображений с C^0-нормой обозначим $C^0(I_1)$), использующиеся в доказательствах теорем 1 и 2.

Предложение 1. *Если множество периодических точек $\mathrm{Per}(f)$ отображения $f \in C^0(I_1)$ замкнуто, то*

(a) *$T(f) = \{1, 2, 2^2, \ldots, 2^\nu\}$, где $T(f)$ — множество периодов периодических точек f, $0 \leq \nu \leq +\infty$ [7],*

(b) *для каждой точки $x^0 \in \mathrm{Per}(f)$ найдется окрестность $U_1(x^0) \subset I_1$ со свойством*

$$U_1(x^0) \bigcap f^n(U_1(x^0)) \neq \emptyset$$

в том и только том случае, если n кратно периоду $n(x^0) = 2^{i_0}$ точки x^0 [8].

Предложение 2. *Для отображения $f \in C^0(I_1)$ следующие утверждения эквивалентны:*

(a) *множество $\mathrm{Per}(f)$ периодических точек f замкнуто,*

(b) *справедливы равенства $\mathrm{Per}(f) = \Omega(f) = C(f)$, где $C(f)$ — центр отображения f,*

(c) *ω-предельное множество $\omega_f(x)$ произвольной точки x — периодическая орбита [7], [9].*

Предложение 3 ([9]). *Для отображения $f \in C^0(I_1)$ справедливо равенство*

$$C(f) = \overline{\mathrm{Per}(f)} = \Omega(f_{|\Omega(f)}).$$

Предложение 4. *Если множество периодических точек отображения $f \in C^0(I_1)$ замкнуто, а последовательность периодических точек f сходится к x^0, то последовательность траекторий этих точек сходится к траектории точки x^0 [10].*

Будем использовать далее некоторые вспомогательные утверждения о свойствах отображений из $T^0(I)$, имеющиеся в [4].

Лемма 1. *Пусть периодические точки фактор-отображения $f : I_1 \to I_1$ отображения $F \in T^0(I)$ образуют замкнутое множество. Тогда, если x^0 — периодическая точка f периода $n(x^0) = 2^{i_0}$ $(i_0 \geq 1)$, то следующие утверждения эквивалентны:*
(a) $(x^0, y^0) \in \Omega(F)$, (b) $(x^0, y^0) \in \Omega(F^{n(x^0)})$.

Лемма 2. *Если $F \in T^0(I)$, то* (a) $\Omega(f) = \operatorname{pr}\Omega(F)$, (b) $C(f) = \operatorname{pr}(C(F))$, *здесь* $\operatorname{pr}(\cdot)$ — *проекция множества на ось абсцисс.*

В силу леммы 2 и определения 1 неблуждающее множество $\Omega(F)$ и центр $C(F)$ отображения $F \in T^0(I)$ служат графиками многозначных Ω-функции и C-функции соответственно в фазовом пространстве I динамической системы (1).

2. Доказательство теоремы 1. Пример

Доказательство теоремы 1 разобьем на ряд шагов, рассмотренных в леммах 3 и 4. Будем использовать Ω-функцию и вспомогательные функции η_n. Укажем, что в силу предложения 2 отображения η_n определены на множестве $\operatorname{Per}(f)$.

Пусть $\operatorname{Per}(f, n)$ означает множество периодических точек фактор-отображения f, периоды которых делят n.

Лемма 3. *Если множество $Per(f)$ фактор-отображения f отображения $F \in T^0(I)$ замкнуто, то верно равенство*

$$\operatorname*{Ls}_{n\to+\infty} \eta_{n|\operatorname{Per}(f,n)} = \overline{\bigcup_{x\in\operatorname{Per}(f)} \{x\} \times \Omega(\widetilde{g}_x)}, \tag{3}$$

где $\{\eta_{n|\operatorname{Per}(f,n)}\}_{n\geq 1}$ — последовательность графиков функций $\eta_{n|\operatorname{Per}(f,n)}$ в I, $\operatorname{Ls}(\cdot)$ — верхний предел последовательности множеств.

Доказательство. Пусть $z_0(x_0, y_0) \in \operatorname*{Ls}_{n\to+\infty} \eta_{n|\operatorname{Per}(f,n)}$. Это эквивалентно существованию последовательности точек $z_{n_i}(x_{n_i}, y_{n_i}) \in \eta_{n_i|\operatorname{Per}(f,n_i)}$ такой, что

$$z_0 = \lim_{i\to+\infty} z_{n_i},$$

где $n_1 < n_2 < \dots < n_i \dots$ ([11], гл. 2, п. 29, III). Из определения графика функции η_{n_i} следует, что $z_{n_i}(x_{n_i}, y_{n_i}) \in \eta_{n_i|\operatorname{Per}(f,n_i)}$ в том и только том случае, если $x_{n_i} \in \operatorname{Per}(f, n_i)$, $n_i = 2^{\nu_i} p_i$ (здесь 2^{ν_i} — период x_{n_i}), и $y_{n_i} \in \Omega(\widetilde{g}^{p_i}_{x_{n_i}})$ $(i \geq 1)$. Так как $\Omega(\widetilde{g}^{p_i}_{x_{n_i}}) \subseteq \Omega(\widetilde{g}_{x_{n_i}})$ (как показано в [12], равенство $\Omega(\widetilde{g}^{p_i}_{x_{n_i}}) = \Omega(\widetilde{g}_{x_{n_i}})$ для произвольного непрерывного отображения $\widetilde{g}_{x_{n_i}}$ может не выполняться), то получаем $z_0(x_0, y_0) \in \overline{\bigcup_{x\in\operatorname{Per}(f)} \{x\} \times \Omega(\widetilde{g}_x)}$. Таким образом, $\operatorname*{Ls}_{n\to+\infty} \eta_{n|\operatorname{Per}(f)} \subset \overline{\bigcup_{x\in\operatorname{Per}(f)} \{x\} \times \Omega(\widetilde{g}_x)}$.

Обратно, пусть $z_0(x_0, y_0) \in \overline{\bigcup_{x\in\operatorname{Per}(f)} \{x\} \times \Omega(\widetilde{g}_x)}$. Тогда найдется последовательность точек $\{z_n(x_n, y_n)\}_{n\geq 1} \subset \bigcup_{x\in\operatorname{Per}(f)} \{x\} \times \Omega(\widetilde{g}_x)$ такая, что $\lim_{n\to+\infty} z_n = z_0$.

Так как $\operatorname{Per}(f)$ — замкнутое множество, то возможны следующие случаи:

(i) последовательность наименьших периодов точек x_n финально постоянна;

(ii) существует подпоследовательность $\{x_{n_i}\}_{i\geq 1} \subset \{x_n\}_{n\geq 1}$, состоящая из периодических точек f, наименьшие периоды которых 2^{ν_i} образуют строго возрастающую последовательность.

В первом случае положим $n_i = 2^{\nu_0}(2(i + n_0) - 1)$, здесь 2^{ν_0} — период произвольной точки x_n при всех $n \geq n_0$ для некоторого $n_0 \geq 1$, во втором — $n_i = 2^{\nu_i}$, $i \geq 1$. С использованием [12] получаем, что $\eta_{n_i|\operatorname{Per}(f,n_i)}(x_{n_i}) = \Omega(\widetilde{g}_{x_{n_i}})$ при любом $i \geq 1$. Следовательно, $z_0(x_0, y_0) \in \operatorname*{Ls}_{n\to+\infty} \eta_{n|\operatorname{Per}(f,n)}$, и справедливо противоположное включение $\overline{\bigcup_{x\in\operatorname{Per}(f)} \{x\} \times \Omega(\widetilde{g}_x)} \subset \operatorname*{Ls}_{n\to+\infty} \eta_{n|\operatorname{Per}(f,n)}$. Равенство (3) установлено. □

Лемма 4. *Пусть выполнены условия леммы* 3. *Тогда*

$$\zeta = \operatorname*{Ls}_{n\to+\infty} \eta_{n\,|\,\mathrm{Per}(f,n)},$$

где $\eta_{n\,|\,\mathrm{Per}(f,n)}$ $(n \geq 1)$, ζ *— графики соответствующих функций в* I.

Доказательство. В силу равенства (3) верно включение

$$\operatorname*{Ls}_{n\to+\infty} \eta_{n\,|\,\mathrm{Per}(f,n)} \subseteq \zeta. \tag{4}$$

Установим справедливость противоположного включения

$$\zeta \subseteq \operatorname*{Ls}_{n\to+\infty} \eta_{n\,|\,\mathrm{Per}(f,n)}. \tag{5}$$

Будем использовать множество $\pi = \mathrm{Per}(f) \times I_2$.

Пусть $\pi^* = \bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} F^n(\pi)$. Тогда $F : \pi^* \to \pi^*$ — сюръекция.

1. Убедимся сначала, что

$$\zeta_{F_{|\pi}} = \operatorname*{Ls}_{n\to+\infty} \eta_{n\,|\,\mathrm{Per}(f,n)}. \tag{6}$$

Равенство (6) справедливо, если

$$\operatorname*{Ls}_{n\to+\infty} \eta_{n\,|\,\mathrm{Per}(f,n)} = \lim_{n\to+\infty} F^n(\pi) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} F^n(\pi) = \pi^*.$$

Поэтому будем предполагать далее, что

$$\operatorname*{Ls}_{n\to+\infty} \eta_{n\,|\,\mathrm{Per}(f,n)} \neq \pi^*. \tag{7}$$

Возьмем произвольно точку

$$z^0(x^0, y^0) \in \pi^* \setminus \operatorname*{Ls}_{n\to+\infty} \eta_{n\,|\,\mathrm{Per}(f,n)}. \tag{8}$$

Покажем, что $z^0 \notin \zeta_{F_{|\pi}}$. Действительно, пусть в I ε-окрестность $U_\varepsilon(z^0)$ точки z^0 и ε-окрестность $U_\varepsilon(\operatorname*{Ls}_{n\to+\infty} \eta_{n\,|\,\mathrm{Per}(f,n)})$ множества $\operatorname*{Ls}_{n\to+\infty} \eta_{n\,|\,\mathrm{Per}(f,n)}$ выбраны так, что

$$U_\varepsilon(z^0) \bigcap U_\varepsilon(\operatorname*{Ls}_{n\to+\infty} \eta_{n\,|\,\mathrm{Per}(f,n)}) = \emptyset. \tag{9}$$

Обозначим через $n_0 = 2^{\nu_0}$ период точки $x^0 \in \mathrm{Per}(f)$. Используя равномерную непрерывность отображения g_{x,n_0}, по числу $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ укажем $\delta > 0$ так, что для любых $x, x' \in I_1$, $y, y' \in I_2$, удовлетворяющих неравенствам $|x - x'| < \delta$, $|y - y'| < \delta$, выполнено неравенство

$$|g_{x,n_0}(y) - g_{x',n_0}(y')| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{10}$$

Из утверждения (b) предложения 1 следует, что найдется интервал $U_1(x^0) \subseteq (x^0 - \delta, x^0 + \delta)$, в котором для всех $x \in U_1(x^0) \bigcap \mathrm{Per}(f)$ справедливо

$$f^{n_0 j}(x) \in (x^0 - \delta, x^0 + \delta), \quad j \geq 0. \tag{11}$$

Выделим два случая: (a) и (b).

(a). Предположим, что существует $\delta \geq \frac{\varepsilon}{2}$, для которого имеет место (10). Тогда в силу (10) и (11) для любой точки (x, y), где $x \in U_1(x^0) \bigcap \mathrm{Per}(f)$, $|y - y^0| < \frac{\varepsilon}{2}$, и любого $j \geq 1$ справедливо

$$|g_{x,n_0 j}(y) - g_{x^0,n_0 j}(y^0)| = |g_{x,n_0 j}(y) - \widetilde{g}^j_{x^0}(y^0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{12}$$

Так как при некотором натуральном $j_0 = j_0(U_{2,\frac{\varepsilon}{2}}(\Omega(\widetilde{g}_{x^0})))$, не зависящем от y^0, выполнено неравенство

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \chi_{A_1}(\widetilde{g}^j_{x^0}(y^0)) \leq j_0$$

(здесь $U_{2,\frac{\varepsilon}{2}}(\Omega(\widetilde{g}_{x^0}))$ — $\frac{\varepsilon}{2}$-окрестность множества неблуждающих точек $\Omega(\widetilde{g}_{x^0})$ в I_2, χ_{A_1} — характеристическая функция множества $A_1 = I_2 \backslash U_{2,\frac{\varepsilon}{2}}(\Omega(\widetilde{g}_{x^0})))$, то из (2) и (12) следует $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \chi_{A_2}(g_{x,n_0 j}(y)) \leq j_0$, где χ_{A_2} — характеристическая функция множества

$$A_2 = \pi^* \setminus U_\varepsilon(\operatorname*{Ls}_{n\to+\infty} \eta_{n\,|\,\mathrm{Per}(f,n)}).$$

Это вместе с (9) влечет $z^0 \notin \Omega(F^{n_0}{}_{|\pi})$. Используя лемму 1, получаем отсюда $z^0 \notin \zeta_{F_{|\pi}}$.

(b). Рассмотрим случай, когда неравенство (10) выполнено лишь для $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$. Возьмем произвольно и зафиксируем отрицательную полутраекторию точки y^0 относительно отображения $\widetilde{g}_{x^0} = g_{x^0,n_0}$. Так как $z^0 \in \pi^*$, а $F : \pi^* \to \pi^*$ — сюръекция, то отрицательная полутраектория точки y^0 относительно $\widetilde{g}_{x^0}$ корректно определена. Пусть точки $\{y^{-j}\}_{j\geq 0}$ образуют выделенную отрицательную полутраекторию точки y^0, здесь $g_{x^0,n_0 j}(y^{-j}) = \widetilde{g}^j_{x^0}(y^{-j}) = y^0$. Тогда для любой точки $(x,y) \in \pi^*$ и любого $j \geq 1$, где $x \in U_1(x^0) \bigcap \mathrm{Per}(f)$, $|y - y^{-j}| < \delta$, верно неравенство

$$|g_{x,n_0 j}(y) - g_{x^0,n_0 j}(y^{-j})| = |g_{x,n_0 j}(y) - \widetilde{g}^j_{x^0}(y^{-j})| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{13}$$

Так как при некотором натуральном $j_1 = j_1(U_{2,\delta}(\Omega(\widetilde{g}_{x^0})))$, не зависящем от y^0, имеет место неравенство

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \chi_{A_3}(y^{-j}) \leq j_1$$

(здесь $U_{2,\delta}(\Omega(\widetilde{g}_{x^0}))$ — δ-окрестность множества неблуждающих точек $\Omega(\widetilde{g}_{x^0})$ в I_2, χ_{A_3} — характеристическая функция множества $A_3 = I_2 \setminus U_{2,\delta}(\Omega(\widetilde{g}_{x^0})))$, то из (13) следует, что найдется натуральное число $j_2 \geq j_1$ такое, что при всех $j \geq j_2$ для j-го полного прообраза в π^* относительно отображения $F^{n_0}_{|\pi^*}$ $\frac{\varepsilon}{2}$-окрестности $U^{\pi^*}_{\frac{\varepsilon}{2}}(z^0) = U_{\frac{\varepsilon}{2}}(z^0) \bigcap \pi^*$ в π^* точки z^0 справедливо включение

$$(F^{n_0}_{|\pi^*})^{-j}(U^{\pi^*}_{\frac{\varepsilon}{2}}(z^0)) \subset \pi^* \bigcap U_\varepsilon(\operatorname*{Ls}_{n\to+\infty} \eta_{n\,|\,\mathrm{Per}(f,n)}).$$

Отсюда, используя (9), получаем $U^{\pi^*}_{\frac{\varepsilon}{2}}(z^0) \bigcap (F^{n_0}_{|\pi^*})^{-j}(U^{\pi^*}_{\frac{\varepsilon}{2}}(z^0)) = \emptyset$ при любом $j \geq j_2$. Следовательно, $U^{\pi^*}_{\frac{\varepsilon}{2}}(z^0) \bigcap F^{n_0 j}(U^{\pi^*}_{\frac{\varepsilon}{2}}(z^0)) = \emptyset$ каково бы ни было $j \geq j_2$. Последнее вместе с леммой 1 влечет за собой $z^0 \notin \zeta_{F_{|\pi}}$. Так как для $z^0 \in \pi \setminus \pi^*$ выполнено $z^0 \notin \zeta_{F_{|\pi}}$, то равенство (6) доказано.

2. Завершим доказательство леммы 4.

Пусть $I^* = \bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} F^n(I)$. Тогда F сюръективно на I^*, и $\zeta \subset I^*$. Так как для любой точки $(x,y) \in I^*$ выполнено включение $\omega_F((x,y)) \subset (\operatorname*{Ls}_{n\to+\infty} \eta_{n\,|\,\mathrm{Per}(f,n)})$ (где $\omega_F((x,y))$ – ω-предельное множество F-траектории точки (x,y)), то в силу утверждения (c) предложения 2 лемма 4 справедлива, если $\pi^* = \operatorname*{Ls}_{n\to+\infty} \eta_{n\,|\,\mathrm{Per}(f,n)}$.

Пусть выполнено неравенство (7). Возьмем произвольно и зафиксируем точку z^0 так, чтобы выполнялось (8). Покажем, что $z^0 \notin \zeta$.

Пусть ε-окрестности $U_\varepsilon(z^0)$ и $U_\varepsilon(\operatorname*{Ls}_{n\to+\infty} \eta_{n\,|\,\mathrm{Per}(f,n)})$ соответственно точки z^0 и множества $\operatorname*{Ls}_{n\to+\infty} \eta_{n\,|\,\mathrm{Per}(f,n)}$ выбраны в силу (9). Используя результаты п. 1 и теорему Дж. Биркгофа [13], для окрестности $U_{\frac{\varepsilon}{2}}(\operatorname*{Ls}_{n\to+\infty} \eta_{n\,|\,\mathrm{Per}(f,n)})$ множества $\operatorname*{Ls}_{n\to+\infty} \eta_{n\,|\,\mathrm{Per}(f,n)}$ укажем натуральное число $n_1 =$

$n_1(U_{\frac{\varepsilon}{2}}(\operatorname*{Ls}_{n\to+\infty}\eta_{n|\mathrm{Per}(f,n)}))$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\chi_{A_4}(F^n(x^0,y^0))\le n_1, \tag{14}$$

где χ_{A_4} — характеристическая функция множества $A_4=I\setminus U_{\frac{\varepsilon}{2}}(\operatorname*{Ls}_{n\to+\infty}\eta_{n|\mathrm{Per}(f,n)})$. Воспользуемся равномерной непрерывностью отображения F и по числу $\frac{\varepsilon}{2}>0$ укажем $\delta'>0$ так, чтобы для любых $x,x'\in I_1$, $y,y'\in I_2$, удовлетворяющих неравенствам $|x-x'|<\delta'$, $|y-y'|<\delta'$, выполнялось

$$F(x',y')\in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(F(x,y)), \tag{15}$$

где $U_{\frac{\varepsilon}{2}}(F(x,y))$ — $\frac{\varepsilon}{2}$-окрестность точки $F(x,y)$ в I.

Предположим, что существует $\delta'\ge\frac{\varepsilon}{2}$, для которого выполнено (15). Тогда положительная полутраектория точки z^0 $\{F^n(z^0)\}_{n\ge0}$ "отслеживается" положительной полутраекторией $\{F^n(x,y)\}_{n\ge0}$ произвольной точки $(x,y)\in U_{\delta'}(z^0)\bigcap I^*$ ($U_{\delta'}(z^0)$ — δ'-окрестность z^0 в I) с точностью до $\frac{\varepsilon}{2}$. Используя неравенство (14), получаем отсюда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\chi_{A_5}(F^n(x^0,y^0))\le n_1$, где χ_{A_5} — характеристическая функция множества $A_5=I\setminus U_{\varepsilon}(\operatorname*{Ls}_{n\to+\infty}\eta_{n|\mathrm{Per}(f,n)})$. Последнее вместе с предложением 2 влечет за собой $z^0\notin\zeta$.

Пусть (15) имеет место лишь для $\delta'<\frac{\varepsilon}{2}$. Сюръективность $F_{|I^*}$ позволяет рассматривать отрицательные полутраектории (относительно отображения $F_{|I^*}$) точек множества I^*. Проводя аналогичные рассуждения для отрицательных полутраекторий точки z^0 и точек $(x,y)\in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(z^0)\bigcap I^*$, также убеждаемся в том, что $z^0\notin\zeta$. Таким образом, включение (5) установлено. Справедливость леммы 4 следует из (4) и (5). $\square$

Леммы 3 и 4 влекут за собой справедливость теоремы 1. $\square$

Обратим внимание на то, что существенным элементом доказательства леммы 4 (а, следовательно, и теоремы 1) является возможность отслеживать положительные или выделенные отрицательные полутраектории точек в слоях над периодическими точками фактор-отображения соответственно положительными или некоторыми отрицательными полутраекториями "близких" точек в аналогичных слоях (отметим, что классическая теорема о семействах ε-траекторий [14] не применима в рассматриваемом случае). Важную роль в нахождении таких полутраекторий играет свойство непрерывных отображений отрезка с замкнутым множеством периодических точек, указанное в предложении 4.

Из теоремы 2 следует, что множество

$$\Omega_w(F)=\Omega(F)\setminus\Big(\bigcup_{x\in\mathrm{Per}(f)}\{x\}\times\Omega(\widetilde{g}_x)\Big)$$

является граничным в $\Omega(F)$ и, если оно не пусто, состоит из точек (x,y), каждая из которых блуждает относительно содержащего ее слоя $\{x\}\times I_2$.

Приведем пример C^1-гладкого отображения $F\in T^1([0,1]^2)$ с замкнутым множеством периодических точек в базе и непустым множеством $\Omega_w(F)$.

Потребуются прямоугольники

$$\Pi_1=(0,1]\times\left(\frac{1}{8},\frac{1}{8}+\frac{x}{16}\right),\quad \Pi_2=[0,1]\times\left(\frac{1}{8}+\frac{x}{16},\frac{3}{16}+\frac{x}{32}\right),$$

а также их верхняя и нижняя границы соответственно

$$\partial_l(\Pi_1)=[0,1]\times\left\{\frac{1}{8}\right\},\quad \partial_u(\Pi_1)=[0,1]\times\left\{\frac{1}{8}+\frac{x}{16}\right\};$$

$$\partial_l(\Pi_2)=\partial_u(\Pi_1),\qquad \partial_u(\Pi_2)=[0,1]\times\left\{\frac{3}{16}+\frac{x}{32}\right\}.$$

Будем использовать следующие строго монотонные по y функции:

$$\lambda_x(y) - \frac{1}{4} = \begin{cases} \frac{x}{4}\exp\left[-\frac{\exp(-(\frac{1}{8}-y)^{-2})}{(\frac{1}{8}+\frac{x}{16}-y)^2}\right], & \text{если } (x,y) \in \Pi_1; \\ \frac{x}{4}, & \text{если } (x,y) \in \partial_l(\Pi_1); \\ 0, & \text{если } (x,y) \in \partial_u(\Pi_1), \end{cases}$$

$$\mu_x(y) - \frac{1}{4} = \begin{cases} -A\exp\left[-\frac{\exp(-(\frac{3}{16}+\frac{x}{32}-y)^{-2})}{(\frac{1}{8}+\frac{x}{16}-y)^2}\right], & \text{если } (x,y) \in \Pi_2; \\ 0, & \text{если } (x,y) \in \partial_l(\Pi_2); \\ -A, & \text{если } (x,y) \in \partial_u(\Pi_2), \end{cases}$$

где $A = 10^{-3}$, а также полином 3-й степени

$$p(y) = -80y^3 + 88y^2 - 28y + 3.$$

Обозначим через Π_3 прямоугольник $[0,1] \times (\frac{3}{16} + \frac{x}{32}, \frac{1}{4}]$.

Пример. Определим отображение $F \in T^1([0,1]^2)$, где

$$F(x,y) = (x, g_x(y)).$$

При этом семейство отображений в слоях зададим так, чтобы отображение $g_0(y) \in C^1([0,1])$ допускало $C^1\Omega$-взрыв (здесь $C^1([0,1])$ — пространство C^1-гладких отображений отрезка $[0,1]$ в себя с C^1-нормой). Положим

$$g_x(y) = \begin{cases} 16(x+1)y(\frac{1}{4}-y), & \text{если } (x,y) \in [0,1] \times [0,\frac{1}{8}); \\ \lambda_x(y), & \text{если } (x,y) \in \overline{\Pi}_1; \\ \mu_x(y), & \text{если } (x,y) \in \overline{\Pi}_2; \\ \frac{1}{4} + A\sin\frac{2\pi(8y-x)}{2-x}, & \text{если } (x,y) \in \Pi_3; \\ p(y), & \text{если } (x,y) \in [0,1] \times (\frac{1}{4},\frac{1}{2}]; \\ 4y(1-y), & \text{если } (x,y) \in [0,1] \times (\frac{1}{2},1]. \end{cases}$$

Заметим, что $\{(0,(g_{0|[0,\frac{1}{8})})^{-n}(\frac{1}{8}))\}_{n\geq 0} \subset \Omega(F)$ в то время, как любая точка интервала $\{0\} \times (0,\frac{1}{4})$ является блуждающей относительно слоя $\{0\}\times[0,1]$. Следовательно, в примере $\Omega_w(F) \neq \emptyset$.

Обратим внимание на то, что ни одна из точек множества $\Omega_w(F)$ отображения из примера не является ω-предельной, кроме того, здесь $\bigcup\limits_{(x,y)\in I} \omega_F((x,y))$ — незамкнутое множество.

3. Доказательство теоремы 2

В [4] доказано, что если множество $\mathrm{Per}(f)$ периодических точек фактор-отображения f отображения $F \in T^0(I)$ замкнуто, то $C(F) = \overline{\mathrm{Per}(F)}$. Отсюда с использованием предложений 2 и 3 получаем, что в данном случае

$$C(F) = \overline{\bigcup_{x\in\mathrm{Per}(f)} \{x\} \times C(\widetilde{g}_x)} = \overline{\bigcup_{x\in\mathrm{Per}(f)} \{x\} \times \Omega(\widetilde{g}_{x|\Omega(\widetilde{g}_x)})}. \tag{16}$$

Таким образом, для доказательства теоремы 2 достаточно убедиться в том, что $C(F) = \Omega(F_{|\Omega(F)})$. Будем использовать C-функцию и вспомогательные функции η_n^*. Укажем, что в силу предложения 2 отображения η_n^* определены на множестве $\mathrm{Per}(f)$. Воспользуемся последовательностью натуральных чисел $j_n = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$, $n \geq 1$.

Лемма 5. *Если множество* $\mathrm{Per}(f)$ *фактор-отображения* f *отображения* $F \in T^0(I)$ *замкнуто, то существует предел* $\operatorname*{Lim}\limits_{n\to+\infty} \eta^*_{j_n|\mathrm{Per}(f,j_n)}$ *последовательности графиков функций* $\eta^*_{j_n|\mathrm{Per}(f,j_n)}$ *в* I*, и справедливо равенство*

$$\zeta^* = \operatorname*{Lim}_{n\to+\infty} \eta^*_{j_n|\mathrm{Per}(f,j_n)},$$

здесь ζ^* — график соответствующей функции в I.

Действительно, т. к. при любом натуральном n имеем $C(\widetilde{g}_x^n) = C(\widetilde{g}_x)$, то справедливо включение

$$\eta^*_{j_n\,|\,\mathrm{Per}(f,j_n)} \subseteq \eta^*_{j_{n+1}\,|\,\mathrm{Per}(f,j_{n+1})}, \quad n \geq 1.$$

Отсюда получаем, что последовательность графиков функций

$$\eta^*_{j_n\,|\,\mathrm{Per}(f,j_n)} = \bigcup_{x\in\mathrm{Per}(f,j_n)} \{x\} \times C(\widetilde{g}_x)$$

сходится в I, и имеет место равенство

$$\operatorname*{Lim}_{n\to+\infty} \eta^*_{j_n\,|\,\mathrm{Per}(f,j_n)} = \overline{\bigcup_{x\in\mathrm{Per}(f)} \{x\} \times C(\widetilde{g}_x)}. \tag{17}$$

Из равенств (16) и (17) вытекает справедливость леммы 5.

Лемма 6. *Если множество* $\mathrm{Per}(f)$ *периодических точек фактор-отображения f отображения $F \in T^0(I)$ замкнуто, то $\zeta^* = \zeta_{F_{|\Omega(F)}}$, где ζ^*, $\zeta_{F_{|\Omega(F)}}$ — графики соответствующих функций в I.*

Доказательство. В силу равенства (16) и леммы 5 справедливо

$$\zeta^* \subseteq \zeta_{F_{|\Omega(F)}}. \tag{18}$$

Докажем противоположное включение

$$\zeta_{F_{|\Omega(F)}} \subseteq \zeta^*. \tag{19}$$

Будем использовать множество $\Omega^*(F) = \bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} F^n(\Omega(F))$. Для доказательства (19) установим включение

$$\zeta_{F_{|\Omega^*(F)}} \subseteq \zeta^*. \tag{20}$$

Предположим противное. Тогда найдется точка $z^0(x^0, y^0) \in \zeta_{F_{|\Omega^*(F)}} \setminus \overline{\bigcup\limits_{x\in\mathrm{Per}(f)} \{x\} \times \Omega(\widetilde{g}_{x|\Omega(\tilde{g}_x)})}$. Возьмем произвольно и зафиксируем $\varepsilon > 0$ так, чтобы не пересекались ε-окрестности в I $U_\varepsilon(z^0)$ и $U_\varepsilon(\overline{\bigcup\limits_{x\in\mathrm{Per}(f)} \{x\} \times \Omega(\widetilde{g}_{x|\Omega(\tilde{g}_x)})})$ точки z^0 и множества $\overline{\bigcup\limits_{x\in\mathrm{Per}(f)} \{x\} \times \Omega(\widetilde{g}_{x|\Omega(\tilde{g}_x)})}$ соответственно. Воспользуемся равномерной непрерывностью отображения F и по числу $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ укажем $\delta' > 0$ так, чтобы для любых $x, x' \in I_1$, $y, y' \in I_2$, удовлетворяющих неравенствам $|x - x'| < \delta'$, $|y - y'| < \delta'$, выполнялось (15). Пусть для определенности (15) справедливо лишь для $\delta' < \frac{\varepsilon}{2}$. Так как $F : \Omega^*(F) \to \Omega^*(F)$ — сюръекция, а $z^0 \in \Omega^*(F)$, то корректно определена отрицательная полутраектория точки z^0 относительно отображения $F_{|\Omega^*(F)}$.

Пусть точки $\{z^{-n}\}_{n\geq 1} = \{(x^{-n}, y^{-n})\}_{n\geq 1} \subset \Omega^*(F)$ образуют взятую произвольно и фиксированную отрицательную полутраекторию точки $z^0(x^0, y^0)$ относительно $F_{|\Omega^*(F)}$, здесь $f^n(x^{-n}) = x^0$, $g_{x^{-n},n}(y^{-n}) = y^0$. Тогда для любой точки $(x, y) \in \Omega^*(F)$ и любого $n \geq 1$, удовлетворяющих неравенствам $|x - x^{-n}| < \delta'$, $|y - y^{-n}| < \delta'$, верно

$$F^n_{|\Omega^*(F)}(x, y) \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(F^n_{|\Omega^*(F)}(x^{-n}, y^{-n})) = U_{\frac{\varepsilon}{2}}(z^0). \tag{21}$$

Так как для некоторого натурального числа n_*, не зависящего от точки z^0, где $n_* = n_*(\bigcup\limits_{x\in\mathrm{Orb}(x^0)} \{x\} \times U_{2,\delta'}(\Omega(\widetilde{g}_{x|\Omega(\widetilde{g}_x)})))$, имеет место неравенство $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \chi_{A_6}(z^{-n}) \leq n_*$ (здесь через $\mathrm{Orb}(x^0)$ обозначена периодическая орбита, порожденная точкой x^0, χ_{A_6} — характеристическая функция множества $A_6 = \Omega^*(F) \setminus \Big(\bigcup\limits_{x\in\mathrm{Orb}(x^0)} \{x\} \times U_{2,\delta'}(\Omega(\widetilde{g}_{x|\Omega(\tilde{g}_x)}))\Big)$, $U_{2,\delta'}(\Omega(\widetilde{g}_{x|\Omega(\tilde{g}_x)}))$ — δ'-окрестность множества $\Omega(\widetilde{g}_{x|\Omega(\tilde{g}_x)})$ в I_2), то из (21) следует, что найдется натуральное число $n'_* \geq n_*$ такое, что

при всех $n \geq n'_*$ для n-го полного прообраза относительно отображения $F_{|\Omega^*(F)}$ $\frac{\varepsilon}{2}$-окрестности $U^{\Omega^*(F)}_{\frac{\varepsilon}{2}}(z^0) = U_{\frac{\varepsilon}{2}}(z^0) \bigcap \Omega^*(F)$ в $\Omega^*(F)$ точки z^0 справедливо

$$(F_{|\Omega^*(F)})^{-n}(U^{\Omega^*(F)}_{\frac{\varepsilon}{2}}(z^0)) \subset \Omega^*(F) \bigcap U_\varepsilon\Big(\overline{\bigcup_{x \in \mathrm{Per}(f)} \{x\} \times \Omega(\widetilde{g}_{x|\Omega(\widetilde{g}_x)})}\Big).$$

В силу выбора окрестностей $U_\varepsilon(z^0)$ и $U_\varepsilon(\overline{\bigcup_{x \in \mathrm{Per}(f)} \{x\} \times \Omega(\widetilde{g}_{x|\Omega(\widetilde{g}_x)})})$ получаем

$$U^{\Omega^*(F)}_{\frac{\varepsilon}{2}}(z^0) \bigcap (F_{|\Omega^*(F)})^{-n}(U^{\Omega^*(F)}_{\frac{\varepsilon}{2}}(z^0)) = \emptyset$$

при любом $n \geq n'_*$. Следовательно, $z^0 \notin \zeta_{F_{|\Omega^*(F)}}$. Полученное противоречие с выбором точки z^0 доказывает справедливость (20). Заметим, что $\zeta_{F_{|\Omega^*(F)}} = \zeta_{F_{|\Omega(F)}}$. Действительно, т. к. график $\zeta_{F_{|\Omega(F)}}$ замкнут, то какова бы ни была точка $z \in \Omega^*(F) \setminus \zeta_{F_{|\Omega^*(F)}}$, справедливо $z \in \zeta_{F_{|\Omega(F)}}$ в том и только том случае, если z есть предельная точка $\zeta_{F_{|\Omega(F)}}$. Последнее невозможно, т. к. все точки множества $\zeta_F \setminus \Omega^*(F)$ блуждают относительно графика ζ_F (т. е. относительно множества $\Omega(F)$). Таким образом, включение (19) доказано.

Справедливость леммы 6 вытекает из (18) и (19).

Утверждение теоремы 2 следует из леммы 6 и равенства (16). Теорема 2 доказана.

В силу теоремы 2 глубина центра произвольного отображения $F \in T^0(I)$ с замкнутым множеством периодических точек в базе не превосходит 2.

Укажем также, что отображение из примера имеет непустое множество

$$C(F) \setminus \Big(\bigcup_{x \in \mathrm{Per}(f)} \{x\} \times C(\widetilde{g}_x)\Big).$$

Литература

1. Аносов Д.В. *Об аддитивном функционально гомологическом уравнении, связанном с эргодическим поворотом окружности* // Изв. АН СССР. – Сер. матем. – 1973. – Т. 37. – № 6. – С. 1259–1274.
2. Афраймович В.С., Быков В.В., Шильников Л.П. *О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца* // Тр. Моск. матем. о-ва. – 1982. – Т. 44. – С. 150–212.
3. Beck C. *Chaotic cascade model for turbulent velocity distribution* // Phys. Rev. – 1994. – V. E49. – P. 3641–3652.
4. Ефремова Л.С. *О неблуждающем множестве и центре треугольных отображений с замкнутым множеством периодических точек в базе* // Динамич. системы и нелинейные явления. – Киев: Ин-т матем. АН Украины. – 1990. – С. 15–25.
5. Ефремова Л.С. *О понятии Ω-функции косого произведения отображений интервала* // Итоги науки и техн. Сер. Современ. матем. и ее прилож. Тематич. обзоры: Т. 67. Тр. междунар. конф., посвященной 90-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина. Москва, 31 августа – 6 сентября 1998 г. Т. 6: Динамические системы. – М.: ВИНИТИ, 1999. – С. 129–160.
6. Efremova L.S. *New set-valued functions in the theory of skew products of interval maps* // Nonlinear Anal. – 2001. – V. 47. – P. 5297–5308.
7. Шарковский А.Н. *О циклах и структуре непрерывного отображения* // Укр. матем. журн. – 1965. – Т. 17. – № 3. – С. 104–111.
8. Nitecky Z. *Maps of the interval with closed periodic set* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1982. – V. 85. – № 3. – P. 451–456.
9. Шарковський О.М. *Неблукаючі точки та центр неперервного відображення прямої в себе* // Допов. АН УРСР. – 1964. – Т. 7. – С. 865–868.

10. Федоренко В.В., Шарковский А.Н. *Непрерывные отображения интервала с замкнутым множеством периодических точек* // Исследов. дифференц. и дифференциально-разностных уравнений. – Киев: Ин-т матем. АН Украины. – 1980. – С. 137–145.
11. Куратовский К. *Топология.* Т.1. – М.: Мир, 1966. – 594 с.
12. Coven E.M., Nitecki Z. *Nonwandering sets of the powers of maps of the interval* // Ergod. Theory and Dynam. Syst. – 1981. – V. 1. – P. 9–31.
13. Немыцкий В.В., Степанов В.В. *Качественная теория дифференциальных уравнений.* – М.–Л.: Гостехиздат, 1949. – 550 с.
14. Аносов Д.В. *Об одном классе инвариантных множеств гладких динамических систем* // Тр. V междунар. конф. по нелинейным колебаниям. Т. 2. Качественные методы. – Киев: Ин-т матем. АН Украины. – 1970. – С. 39–45.

Нижегородский государственный университет

Поступили
первый вариант 09.09.2003
окончательный вариант 16.12.2005