ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 8 (483)

УДК 517.575+517.956

А.А. ШЛАПУНОВ

О ДВОЙСТВЕННОСТИ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В работе рассмотрены вопросы описания сопряженных пространств для пространств полигармонических функций.

Именно, пусть Δ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, а D — ограниченная область (т. е. открытое связное множество) в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей. Будем называть (комплекснозначную) функцию $u \in C^{2m}(D)$ полигармонической (более точно, m-гармонической, $m \in \mathbb{N}$) в области D, если $\Delta^m u = 0$ в D.

Обозначим через $\mathrm{sol}(\Delta^m, D)$ пространство m-гармонических функций в области D, снабженное стандартной топологией Фреше–Шварца, т. е. топологией равномерной сходимости вместе со всеми производными на компактных подмножествах D.

Обозначим через $\mathrm{sol}(\Delta^m, D)'$ пространство, сопряженное к $\mathrm{sol}(\Delta^m, D)$. Снабдим это пространство сильной топологией, т. е. топологией равномерной сходимости на ограниченных подмножествах $\mathrm{sol}(\Delta^m, D)$.

Как известно, любая удачная характеризация двойственного пространства $\mathrm{sol}(\Delta^m, D)'$ дает дополнительную информацию о решениях уравнения $\Delta^m u = 0$ (ряды Голубева [1], теоремы о стирании особенностей [2] и т. д.).

Существует несколько классических представлений сопряженного пространства для $\mathrm{sol}(\Delta^m, D)$, как, например, двойственность Гротендика [3], где используется подходящая формула Грина. В данной работе двойственность получена с помощью скалярного произведения в пространстве Лебега $L^2(D)$.

Сформулируем сначала основной результат.

Пусть $\mathrm{sol}(\Delta^m, \overline{D})$ обозначает пространство m-гармонических функций в окрестности замыкания области D, снабженное стандартной топологией индуктивного предела по некоторой убывающей последовательности окрестностей $\overline{D}$.

Теорема 1. *Если граница области D является связной и вещественно аналитической, то $\mathrm{sol}(\Delta^m, D)'$ топологически изоморфно пространству $\mathrm{sol}(\Delta^m, \overline{D})$.*

Стаут [2] получил похожие результаты для пространств гармонических функций, используя для построения двойственности скалярное произведение в пространствах Харди.

Для пространств голоморфных функций в односвязных областях в $\mathbb{C}$ и (p, q)-круговых областях в $\mathbb{C}^2$ аналогичная теорема была доказана в [4]. Цорн [5] получил похожие результаты для пространств голоморфных функций в строго псевдовыпуклых областях в $\mathbb{C}^n$, используя скалярное произведение в пространстве $L^2(D)$.

В [6] аналогичная теорема была доказана для произвольной эллиптической системы A с вещественно аналитическими коэффициентами в областях, которые имеют вещественно аналитические границы и обладают некоторыми свойствами выпуклости относительно системы A. Однако при этом была использована другая двойственность.

Работа выполнена при финансовом содействии Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-15-96140, поддержке ведущих научных школ и Падуанского университета (Италия).

Перейдем к построению двойственности. С этой целью предположим, что граница области D является связной вещественно аналитической (и гладкой). Пусть $\rho(x)$ — определяющая функция области D, т. е. такая действительнозначная функция, определенная в некоторой окрестности $\overline{D}$, что $|\nabla\rho| \neq 0$ на ∂D и $D = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) > 0\}$. Без ограничения общности будем считать, что ρ вещественно аналитична в некоторой окрестности ∂D.

Для $\delta \in \mathbb{R}$ положим $D_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) > \delta\}$. Тогда $D_\delta \Subset D \Subset D_{-\delta}$ для достаточно малых $\delta > 0$, а $\partial D_{\pm\delta}$ связные вещественно аналитические (и гладкие).

Теорема 2. *Пусть ∂D связна и вещественно аналитична. Тогда для любой $u \in \mathrm{sol}(\Delta^m, D)$ и любой $v \in \mathrm{sol}(\Delta^m, \overline{D})$ существует предел*

$$h(u,v) = \lim_{\delta\to+0} \int_{D_\delta} \overline{v}(x)u(x)\,dx.$$

Для всякой фиксированной функции $v \in \mathrm{sol}(\Delta^m, \overline{D})$ этот предел определяет непрерывный линейный функционал на $\mathrm{sol}(\Delta^m, D)$.

Отметим, что существенную роль в доказательстве теоремы 2 играют хорошо известная теорема Алаоглу–Банаха и

Лемма 1. *Для достаточно малого $\epsilon > 0$ существуют компакт $K \Subset D$, постоянные $\gamma > 0$ и $C(\epsilon, K, \gamma) > 0$ такие, что для всех $v \in \mathrm{sol}(\Delta^m, D_{-\epsilon}) \cap C^{2m}(\overline{D}_{-\epsilon})$, для всех $u \in \mathrm{sol}(\Delta^m, D)$ и всех $\delta \in (0,\gamma)$ выполняется неравенство*

$$\left| \int_{D_\delta} \overline{v}(x)u(x)\,dx \right| \le C(\epsilon, K, \gamma)\, \|u\|_{C^{2m}(K)}\, \|v\|_{C^{2m}(\overline{D}_{-\epsilon})}.$$

Расширим теперь область применения двойственности $h(u,v)$. Пусть $1 \le k \le l$ и

$$A = \sum_{|\alpha|\le N} A_\alpha D^\alpha$$

— $(l\times k)$-матричный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами (над полем $\mathbb{C}$) в $\mathbb{R}^n$ такой, что для любого открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ всякое решение u уравнения $Au = 0$ в Ω удовлетворяет также уравнению $\Delta^m I_k u = 0$ в Ω с некоторым $m \ge N$ (здесь через I_k обозначена $(k\times k)$-единичная матрица).

Например, этим свойством обладают матричные факторизации оператора Δ^m, т. е. такие операторы, для которых $A^*A = (-1)^m \Delta^m I_k$, где A^* — оператор, формально сопряженный для A. При $m = 1$ такие операторы называются операторами Дирака; в этом случае типичными примерами являются оператор градиента ∇ в $\mathbb{R}^n$, система Коши–Римана в $\mathbb{C}^n$.

Обозначим через $\mathrm{sol}(A, D)$ замкнутое подпространство в пространстве $\mathrm{sol}(\Delta^m I_k, D)$, состоящее из решений уравнения $Au = 0$ в области D. Поскольку $\mathrm{sol}(A,D) \subset \mathrm{sol}(\Delta^m I_k, D)$, то компоненты решений из $\mathrm{sol}(A,D)$ являются m-гармоническими функциями в области D.

Как обычно, $\mathrm{sol}(A,D)'$ — сопряженное пространство к $\mathrm{sol}(A,D)$, снабженное сильной топологией. Пусть $\mathrm{sol}(A,\overline{D})$ обозначает замкнутое подпространство в пространстве $\mathrm{sol}(\Delta^m I_k, \overline{D})$, состоящее из решений уравнения $Au = 0$ в окрестности замыкания области D.

Следствие 1. Пусть ∂D связна и вещественно аналитична. Тогда для любых элементов $u \in \mathrm{sol}(A,D)$ и $v \in \mathrm{sol}(A,\overline{D})$ существует предел

$$h_k(u,v) = \lim_{\delta\to+0} \int_{D_\delta} \sum_{s=1}^{k} \overline{v}_s(x)u_s(x)\,dx. \tag{1}$$

Соотношение (1) индуцирует инъективное непрерывное отображение $J : \mathrm{sol}(A,\overline{D}) \to \mathrm{sol}(A,D)'$.

Дальнейшей целью является нахождение условий, при которых отображение J сюръективно.

Обозначим через $[L^2(D)]^k$ пространство Лебега комплекснозначных k-векторных функций в области D. Известно, что пространство $\mathrm{sol}(A,D)\cap[L^2(D)]^k$ является сепарабельным гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром, которое обозначим через $\mathfrak{C}_A(\cdot,\cdot)$.

Теорема 3. *Отображение J является (топологическим) изоморфизмом пространств* $\mathrm{sol}(A,\overline{D})$ *и* $\mathrm{sol}(A,D)'$ *тогда и только тогда, когда*

(i) $\mathrm{sol}(A,\overline{D})$ *плотно в* $\mathrm{sol}(A,D)$;

(ii) *для всякого фиксированного $x\in D$ ядро $\mathfrak{C}_A(x,\cdot)$ принадлежит пространству $sol(A,\overline{D})$.*

Цорн [5] доказал, что отображение J является изоморфизмом в случае, когда A — система Коши–Римана в $\mathbb{C}^n$ $(n\geq 1)$, а D — строго псевдовыпуклая область с вещественно аналитической границей. Еще на один случай, когда эти условия выполнены, указывает

Следствие 2. Пусть D — шар в $\mathbb{R}^n$ и A — оператор Дирака. Тогда отображение J есть топологический изоморфизм между пространствами $\mathrm{sol}(A,D)'$ и $\mathrm{sol}(A,\overline{D})$.

В заключение приведем схему доказательства теоремы 1. В силу теоремы Мальгранжа–Лакса $\mathrm{sol}(\Delta^m,\overline{D})$ плотно в $\mathrm{sol}(\Delta^m,D)$ для всех областей с гладкой связной границей (напр., [7], теорема 11.11, с. 124). Поэтому выполнено условие (i) теоремы 3. Далее, пусть Φ_m — стандартное фундаментальное решение оператора Δ^m ([8], гл. XII, с. 520–521). Непосредственные вычисления показывают, что $\mathfrak{C}_{\Delta^m}(x,y)=\Delta_y^m\Psi(x,y)$, где $\Psi(x,y)$ — решение следующей задачи Дирихле для оператора Δ^{2m} в области D ([8], гл. XII, § 9, с. 559–568):

$$\begin{aligned}
&\Delta_y^{2m}\Psi(x,y)=0 && \text{в}\ \ D;\\
&\frac{\partial^j}{\partial n_y^j}\Psi(x,y)=\frac{\partial^j}{\partial n_y^j}\Phi_m(x-y) && \text{на}\ \ \partial D\ \ (0\leq j\leq 2m-1).
\end{aligned}$$

По построению функция $\Delta^m\Psi(x,y)$ является m-гармонической в некоторой окрестности $\overline{D}$ относительно переменной y ([6], лемма 4.4), поэтому выполнено и условие (ii) теоремы 3. $\square$

Литература

1. Хавин В.П. *Пространства аналитических функций* // Итоги науки и техн. Матем. анализ. – М.: ВИНИТИ. – 1966. – С. 76–164.
2. Stout E.L. *Harmonic duality, hyperfunctions and removable singularities* // Изв. РАН. Сер. матем. – 1995. – Т. 59. – № 6. – 41 с.
3. Grothendieck A. *Sur les espaces de solutions d'une classe generale d'equations aux derivees partielles* // J. Anal. Math. – 1952–1953. – № 2. – P. 243–280.
4. Айзенберг Л.А., Гиндикин С.Г. *Об общем виде линейного непрерывного функционала на пространствах голоморфных функций* // Учен. зап. Моск. обл. пед. ин-та. – 1964. – Т. 137. – С. 7–15.
5. Zorn P. M. *Analytic functionals and Bergman spaces* // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. – 1982. – V. IX. – P. 365-404.
6. Nacinovich M., Shlapunov A.A., Tarkhanov N.N. *Duality in the spaces of solutions of elliptic systems* // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci. (4). – 1998. – V. XXVI. – P. 207–232.
7. Тарханов Н.Н. *Ряд Лорана для решений эллиптических систем.* – Новосибирск: Наука, 1991. – 318 с.
8. Соболев С.Л. *Введение в теорию кубатурных формул.* – М.: Наука, 1974. – 808 с.

Красноярский государственный университет

Поступили
полный текст 19.01.1998
краткое сообщение 05.02.2002